Proportionnalité à l'école.

1. Types de problèmes et types de tâches.

Sous le nom « problème de proportionnalité » on englobe :

- Problèmes de proportionnalité simple.
- Problèmes de proportionnalité multiple.
- Problèmes de proportionnalité composée.
- Problèmes de proportionnalité inverse.
- Problèmes de proportionnalité « produits de mesures ».

A l'école primaire et au collège seuls les problèmes de proportionnalité simple et « produits de mesures » sont étudiés.

2 types de problèmes de proportionnalité simple.

- Les problèmes de 4ème proportionnelle (on réserve le terme « règle de trois » à la technique et non à une famille de problème.)
- Les problèmes de comparaisons de proportions.

Différents types de tâches.

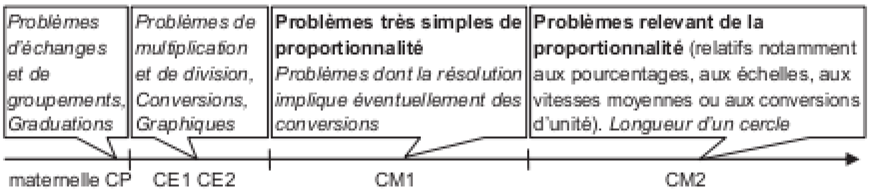
- Déterminer si un problème est un problème de proportionnalité ou non.
- Déterminer une quatrième proportionnelle.
- Comparer des proportions.
- Calculer un coefficient de proportionnalité.

Dans le cas particulier des pourcentages les types de tâches sont :

- Déterminer une proportion sous forme de pourcentage.
- Déterminer l'effectif d'une partie connaissant le pourcentage et l'effectif du tout.

2. Progressivité des apprentissages.

A l'école primaire la proportionnalité n'est pas étudiée comme telle mais est mise en fonctionnement comme outil.



Cycle 1 et Cp : problèmes très simple de multiplication ou de division.

Ce2 des problèmes simples de recherche de quatrième proportionnelle sont donnés comme problèmes pour apprendre à chercher.

A partir du cm1 les problèmes de recherche de 4ème proportionnelle son variés et identifiés comme des problèmes de proportionnalité.

Les problèmes de conversion sont travaillés au fur et à mesure du travail sur les grandeurs.

Ce qui prépare l'étude de problèmes de recherche de quatrième proportionnelle :

- Connaissance des 4 opérations sur les entiers et les décimaux.
- Des expressions rencontrés en ce. : deux fois plus, moitié moins……
- Compétences en calcul mental pour mettre en relation les nombres de façon additive ou multiplicative.
- Connaissance implicite des propriétés des opérations.

> **Exemple**
>
> Au CP, le calcul de la moitié de 70, comme étant la moitié de 60 plus la moitié de 10, au CE1 le fait que : « 5 fois 7 plus 3 fois 7 est égal à 8 fois 7 », relèvent d'une approche implicite de la proportionnalité et préparent à la compréhension de la propriété additive de linéarité.

Les outils.

Tableaux de proportionnalité.

3. Techniques

A. Techniques relatives au type de tâches « déterminer une quatrième proportionnelle »

4 techniques :

Technique 1	Propriétés de linéarité
20 roses c'est 5 fois 4 roses, donc 20 roses coûtent 5 fois plus cher soit 60 €. 5 est le rapport interne dans les deux grandeurs.	

Le rapport entre 2 valeurs de la même grandeur est parfois appelés rapport interne ou scalaire.

Technique 2	« Règle de trois », passage par l'image de l'unité
4 roses coûtent 12 € donc une rose coûte 4 fois moins soit 3 € donc 20 roses coûtent 20 × 3 € soit 60 €.	

Cette technique consiste à appliquer 2 fois la technique de la multiplicative de linéarité, permet de calculer le coefficient de proportionnalité.

Technique 3	Coefficient de proportionnalité
4 roses coûtent 12 €, donc on obtient le prix en multipliant le nombre de roses par 3, donc 20 roses coûtent 3 × 20 € soit 60 €.	

Technique 4	Produit en croix
20 roses coûtent (20 × 12) : 4 € soit 60 €.	

Seule les 3 premières techniques peuvent être construites par les élèves.

La technique du produit en croix est à proscrire à l'école primaire.

B. Techniques relatives au type de tâches « déterminer si une situation est une situation de proportionnalité ou non ».

Situation de proportionnalité

Si l'on met en correspondance deux grandeurs, si lorsqu'on multiplie la première par une constante la seconde est multipliée par la même constante, alors les grandeurs sont proportionnelles.	C'est la technique employée pour le **problème 2** : une distance double d'une autre sur le terrain sera représentée par une distance double sur la carte.

Situation de non proportionnalité

S'il existe une valeur de la première grandeur pour laquelle la multiplication par un nombre t ne fait pas correspondre la deuxième grandeur correspondante multipliée par t (en termes mathématiques : s'il existe x et t tels que $f(t \times x) \neq t \times f(x)$) alors le problème n'est pas un problème de proportionnalité.	Exemples : • Les tarifs postaux : si le poids d'une lettre est multiplié par 2, le tarif d'affranchissement n'est pas multiplié par 2. • La taille d'un enfant n'est pas proportionnelle au poids.

C. Techniques relatives au type de tâches « déterminer l'effectif d'une partie connaissant le pourcentage et l'effectif du tout «

Énoncé : « Sur 350 élèves, 40 % mangent à la cantine. Combien d'élèves mangent à la cantine ? »

Technique

La technique consiste à se représenter la tâche comme une situation de proportionnalité (à proportion fixée, l'effectif du sous-ensemble est proportionnel à l'effectif total), puis à calculer la quatrième proportionnelle, connaissant *t* % et *N*.
On est donc ramené au type de tâches précédent avec les techniques décrites ci-dessus.

Effectif du sous-ensemble	Effectif du total
t	100
?	*N*

Exemple de procédure d'élève :
« sur 100 élèves, 40 mangent à la cantine. Donc sur 300 élèves, 120 mangent à la cantine et sur 50 élèves, 20 y mangent. Donc sur 350, 140 élèves mangent à la cantine. »

Analyse : tout d'abord l'élève reconnaît la situation de proportionnalité en donnant du sens à 40 % puis dans un premier temps il met en œuvre (bien sûr sans la citer) la propriété multiplicative de linéarité en multipliant le nombre 40 par 3 (300 étant égal à 3×100) et en le divisant par 2 (50 étant égal à $100 : 2$) et dans un second temps la propriété additive de linéarité : puisque 350 c'est $300 + 50$, le résultat recherché est $120 + 20$.

D. Technique relative au type de tâches « comparer des proportions ».

Énoncé[1] : « dans la bouteille A, je mets 4 verres d'eau et 2 morceaux de sucre. Dans la bouteille B, je mets 12 verres d'eau et 10 morceaux de sucre. Quelle est la bouteille où l'eau est la plus sucrée ? »

Technique 1	
Calculer pour chaque situation de proportionnalité une quatrième proportionnelle, une des données étant la même pour chaque situation.	Analyse mathématique : l'énoncé présente deux situations de proportionnalité de même type entre une masse (de sucre) et un volume (d'eau), d'une part pour une bouteille A, d'autre part pour une bouteille B. Cette technique consiste à déterminer dans la situation A et dans la situation B le nombre de morceaux de sucre si on a un même volume (fictif). On prendra 12 verres d'eau, car 12 est multiple de 4. Une procédure possible est : « Si on a trois bouteilles de type A, on a trois plus d'eau et de sucre, c'est-à-dire 12 verres d'eau et 6 morceaux de sucre. Pour 12 verres d'eau, dans le mélange A on a 6 morceaux de sucre, dans le mélange B on a 10 morceaux de sucre. Le mélange B est plus sucré ». On voit que si on avait choisi de comparer les volumes à nombre de morceaux de sucre égaux (par exemple, pour 10 morceaux de sucre, 20 verres d'eau pour le mélange A et 12 pour le mélange B), il aurait fallu interpréter que le mélange le plus sucré est celui où il y a le moins d'eau.

Technique 2	
Comparer les deux nombres coefficients de proportionnalité, en les mettant éventuellement sous forme de pourcentages.	On calcule le coefficient de proportionnalité entre le volume et la masse pour chacun des deux mélanges. Pour le mélange A la proportion est $\frac{2}{4}$ morceaux sucre/verre eau (on prend comme unité de masse la masse d'un morceau de sucre, comme unité de volume celui d'un verre d'eau, on voit ici l'intérêt de choisir des unités appropriées au problème), pour le mélange B c'est $\frac{10}{12}$ morceaux sucre/verre eau. Il faut comparer les fractions $\frac{2}{4}$ et $\frac{10}{12}$. Cette technique n'est pas accessible sous cette forme à l'école primaire, la comparaison de fractions, la réduction de fractions au même dénominateur sont des compétences de collège même si, sur des exemples simples, on peut comparer des fractions à l'école primaire comme $\frac{6}{12}$ et $\frac{10}{12}$; on peut cependant avoir une procédure d'élève de primaire se référant à cette technique : « *pour le mélange A, le nombre de morceaux de sucre est la moitié du nombre de verre d'eau, pour le mélange B, le nombre de morceaux de sucre est plus grand que la moitié du nombre de verre d'eau, d'où le mélange B est plus sucré que le A* ».

4. Erreurs, difficultés

a) Difficultés liées à la modélisation de la situation.

- Difficulté à reconnaître qu'il s'agisse d'une situation de proportionnalité ou pouvant se modéliser comme telle.

Calculs de prix : « sachant que 100 g de poisson coûtent 4 €, quels sont les prix des quantités suivantes de poisson : 200 g, 450 g, 75 g, 37 g ? »
La proportionnalité est ici implicite.

- Difficulté à identifier les grandeurs qui sont en relation.
- Difficulté à trier les données associées à chacune des grandeurs en jeu.

Dans l'exemple 1, il y a deux grandeurs (des masses) de même type, ceci nécessite un tri des données correspondant d'une part aux masses de sucre, d'autre part aux masses de farine ; de même dans les agrandissements-réductions, il faut distinguer les longueurs avant agrandissement et après agrandissement.

Exemple 1 suite

Élève A : « 300 g de sucre c'est la moitié de la quantité de farine [flèche vers un cadre où 600 : 2 est posé en colonne] 1 kg = 1000 g de farine. Je cherche la quantité de sucre pour 1 kg de farine. De 600 pour arriver à 1000 g il y a 400 g de différence entre les deux. Je rajoute donc la différence à 300 g de sucre, se qui fait 700 g de sucre.

Les quantités	de sucre	de rhum	d'oeufs	de farine
	300 g	6 cl	12	600 g
	700 g	40,6 cl	16	1000 g

Je cherche la quantité de rhum qu'il faut dans 1 kg de farine. Je rajoute 400 cl à 6 cl qui me fait 40,6 cl. Je cherche le nombre d'oeufs qu'il y a pour 1 kg de farine. Je rajoute 4 oeufs à 12 se qui me fait 16 oeufs. »

Analyse : l'élève n'arrive pas à mettre en œuvre le modèle multiplicatif de la proportionnalité malgré une tentative au tout début. Il utilise ensuite un modèle additif « ajouter 400 » que ce soit des grammes ou des centilitres, en l'adaptant à la taille des nombres et à la « vraisemblance » du résultat puisqu'il ajoute 4 œufs et non 400. On peut faire l'hypothèse que le résultat 40,6 cL comme égal à 400 cL ajoutés à 6 cL n'est pas une erreur de calcul mais une rectification par contrôle sur la « vraisemblance » de la réponse, c'est-à-dire que l'élève cherche à donner des résultats cohérents avec la réalité.

- Surcharge lors de nombreuses relations de proportionnalité.

b) Difficultés liées au choix et à la mise en œuvre d'une technique.

- Erreur liées à la prégnance d'un modèle additif conduisant l'élève à ajouter une même valeur aux 2 grandeurs.

Dans le cadre d'un travail sur les échelles, si 5 cm ont été ajoutés à la distance sur le papier, l'élève ajoute 5 km à la distance réelle.

- Difficulté à identifier les relations de linéarité entre les valeurs d'une même grandeur, soit mentalement soit à l'aide d'une opération.

« 12 roses coûtent 18 €. Combien coûtent 8 roses ? »
Sur cet exemple, la mise en relation se fait pour les élèves de primaire en deux étapes : diviser par trois (prix de 4 roses) puis multiplier par 2 (prix de 8 roses) ; trouver ces deux étapes est difficile. Ce n'est qu'en collège que la nouvelle définition des fractions permettra de savoir que le nombre qui multiplié à 12 donne 8 est le nombre $\frac{8}{12}$.

- Difficulté liée à la nature du coefficient de proportionnalité entre 2 grandeurs de nature différente.

Problème de vitesse ; « un train roule toujours à la même vitesse. Il met 6 minutes pour parcourir 18 kilomètres. Quelle est la distance parcourue en 25 minutes ? » L'élève peut surmonter cette difficulté en mettant en œuvre l'une des techniques suivantes :

- une technique de type « règle de trois » : en 1 min, le train parcourt une distance 6 fois plus petite, soit 3 km, en 25 min il parcourt une distance 25 fois plus grande, soit 75 km.
- une technique de type « coefficient de proportionnalité » : 18 est le triple de 6, pour passer des mesures de durée en minutes à la distance en kilomètres, on multiplie par 3. La distance parcourue en 25 min est égale à 3 × 25 km, soit 75 km.

- Difficulté dans les problèmes de comparaison de proportion, d'imaginer des valeurs « fictives » pour résoudre le problème.

- Erreurs de calcul dans la mise en œuvre d'une technique, soit par non maîtrise des techniques opératoires de calcul, soit par absence de connaissance sur les opérations portant sur des fractions.

! En conclusion : les **procédures personnelles** seront largement sollicitées et exploitées. Elles doivent être anticipées par le professeur. Les techniques les plus simples pour les élèves sont celles utilisant les propriétés de linéarité. Selon la situation, le **coefficient de proportionnalité** n'est pas toujours à la portée des élèves, cependant il faudra le définir. Un usage exclusif d'une seule technique peut mener les élèves à des impasses calculatoires en l'absence de connaissances niveau collège.

5. Variables didactiques.

- la situation de proportionnalité est explicite ou non ;
- les grandeurs sont de même nature ou non ;
- le nombre de valeurs à calculer ; en effet si le nombre est important, une procédure de type « calcul du coefficient de proportionnalité » sera plus efficace ;
- la nature du coefficient de proportionnalité : entier, inverse d'un entier (ce qui revient à diviser), rationnel, non rationnel (exemple le nombre π entre le diamètre et la longueur d'un cercle) ; dans le cas où il est entier, on peut introduire la notion de « visibilité » dans les tables et les répertoires mémorisés : il est plus facile de mettre en relation 7 et 21 que 7 et 84 (car 21 figure dans la table de multiplication usuelle de 7, c'est-à-dire de 1×7 à 9×7).
- les relations entre valeurs données d'une même grandeur : rapports internes, leur nature, leur « visibilité » dans les répertoires ; valeurs sommes de deux autres valeurs.