LES EXERCICES DES SUJETS BACCALAURÉAT REGROUPÉS PAR TYPE

Nombres complexes & Equations à coefficients complexes.

BACCALAURÉAT SECTION SC-EXP

ANNALES DES Exercices DE MATHÉMATIQUES SESSIONS :

*Principale + Contrôle 2007 **** 2017*

Proposé par Mr : NAIFAR MED YASSINE
LYCEE AHED JADID SKHIRA

REPUBLIQUE TUNISIENNE ◈◈◈ MINISTERE DE L'EDUCATION	EXAMEN DU BACCALAUREAT		
	Epreuve : **MATHEMATIQUES**		
SECTION : Sciences Expérimentales			

Exercice N°1 : *(4.5POINTS)* Bac –sciences expérimentales-2017(session principale)

1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2-(\sqrt{5}+2i)z+1+4\sqrt{5}i=0$.

a) Calculer $(\sqrt{5}+2i)^2$.

b) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est $\Delta=-3(\sqrt{5}+2i)^2$.

c) En déduire que les solutions de (E) sont :

$$a=(\sqrt{5}+2i)\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{et} \quad b=(\sqrt{5}+2i)\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right).$$

Dans **la figure 1** de l'annexe ci-jointe, $(O,\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormé direct du plan, (C) est le cercle de centre O et de rayon 3.

2) Soit Q le point d'affixe $\sqrt{5}+2i$.

a) Montrer que le point Q appartient à (C).

b) Construire alors le point Q.

3) Soient A et B les points d'affixes respectives les nombres complexes a et b.

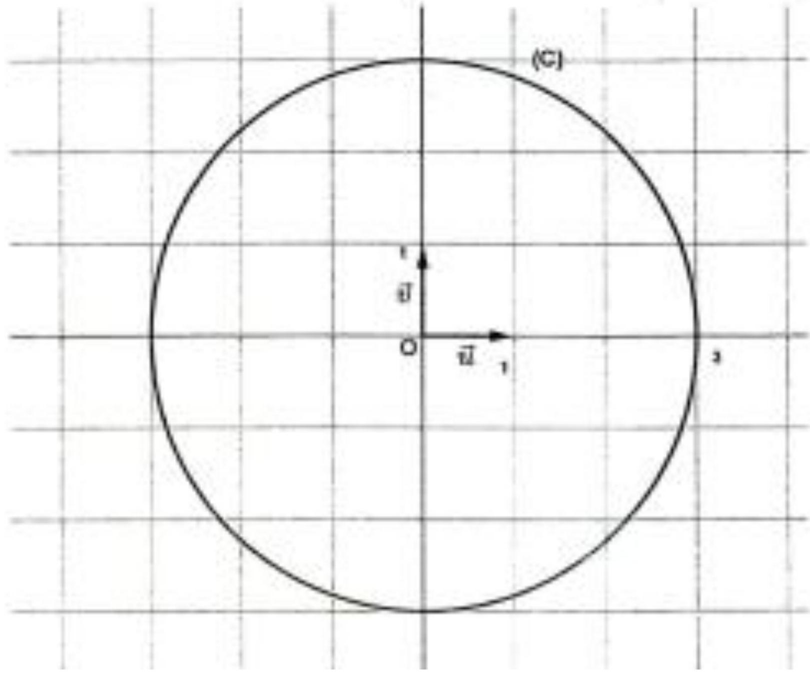
a) Montrer que les points A et B appartiennent au cercle (C).

b) Vérifier que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OQ}$.

c) En déduire que le quadrilatère OAQB est un losange.

d) Construire alors les points A et B.

Figure 1



Exercice N°2: *(5POINTS)* Bac –sciences expérimentales-2016(session principale)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives $a = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $b = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$.

1) a) Construire, dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points A et B.

b) Ecrire a et b sous forme algébrique.

2) La droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par A et la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par B se coupent en un point C.

a) Déterminer l'affixe c du point C.

b) Vérifier que $c^2 = 1 + 2i\sqrt{6}$.

3) On considère le point D d'affixe c^2.

a) Montrer que $OD = 5$.

b) En déduire une construction du point D.

4) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $2z^2 - 2z - i\sqrt{6} = 0$.

On désigne par z_1 la solution dont la partie réelle et la partie imaginaire sont positives et par z_2 l'autre solution.

5) Soit les points I, M_1 et M_2 d'affixes respectives 1, z_1 et z_2.

a) Justifier que le point M_1 est le milieu du segment $[IC]$.

b) Montrer que le quadrilatère OCM_1M_2 est un parallélogramme.

c) Construire les points M_1 et M_2.

Exercice N°3: *(5POINTS)* Bac –sciences expérimentales-2015(session principale)

Dans l'annexe ci-jointe (**Figure 1**), $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé direct du plan et (C) est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{3}$.

1/ Soit A le point d'affixe $a = 1 + i\sqrt{2}$.

a) Montrer que A appartient au cercle (C).

b) Placer A.

2/ On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2 - 2i\sqrt{3}z - 6i\sqrt{2} = 0$.

a) Montrer que le discriminant Δ de l'équation (E) est égal à $12a^2$.

b) En déduire que les solutions de l'équation (E) sont :

$$z_1 = \sqrt{3}\left[-1 + i(1 - \sqrt{2})\right] \quad \text{et} \quad z_2 = \sqrt{3}\left[1 + i(1 + \sqrt{2})\right]$$

3/ On considère le point K d'affixe $z_K = i\sqrt{3}$ et on désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2.

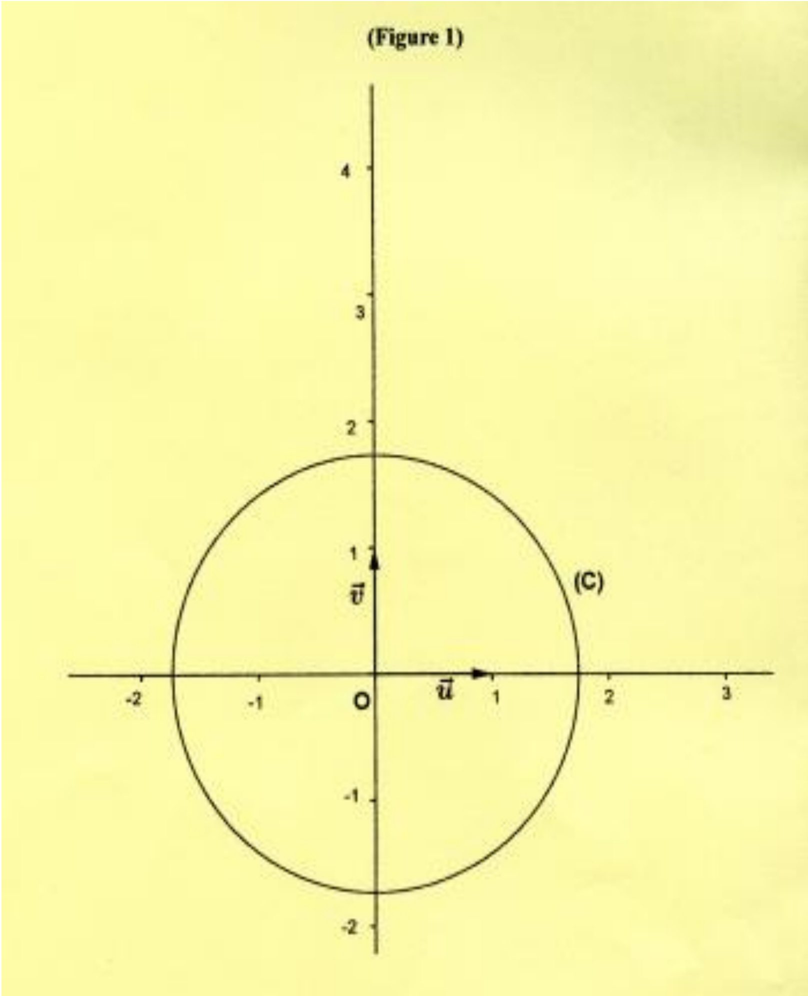
a) Vérifier que K est le milieu du segment $[M_1M_2]$.

b) Montrer que $\frac{z_2 - z_1}{a} = 2\sqrt{3}$.

En déduire que la droite (M_1M_2) est parallèle à la droite (OA).

c) Montrer que $M_1M_2 = 6$.

d) Placer le point K et construire alors les points M_1 et M_2.



Exercice N°4 : *(6POINTS)* Bac –sciences expérimentales-2014(session principale)

1) Soit les nombres complexes $z_1 = \frac{\sqrt{5}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = -\frac{\sqrt{5}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

   a) Calculer $z_1 + z_2$ et $z_1 \times z_2$.

   b) En déduire que, pour tout nombre complexe z, $(z - z_1)(z - z_2) = z^2 + i\sqrt{3}z - 2$.

Dans la suite, on munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et on considère les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2.

2) Dans l'annexe ci-jointe **(figure 2)**, on a tracé le cercle (C) de centre O et de rayon $\sqrt{2}$ et on a placé le point H d'affixe $\frac{-i\sqrt{3}}{2}$.

   a) Montrer que M_1 et M_2 appartiennent au cercle (C).

   b) Justifier que H est le milieu du segment $[M_1M_2]$.

   c) Construire les points M_1 et M_2.

3) Soit K le point d'affixe $-i\sqrt{3}$.

Soit z un nombre complexe et M et N les points du plan complexe d'affixes respectives z et z^3.

a) Montrer que :

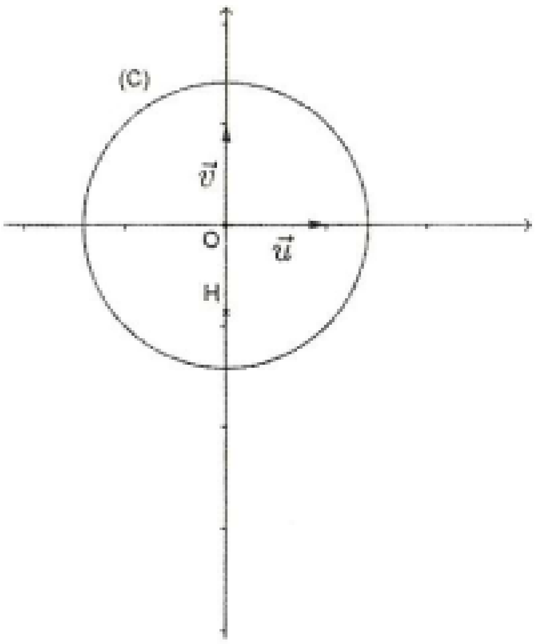
(K est le milieu du segment [M N]) si et seulement si ($z^3 + z + 2i\sqrt{3} = 0$).

b) Vérifier que $z^3 + z + 2i\sqrt{3} = (z - i\sqrt{3})(z^2 + i\sqrt{3}z - 2)$.

c) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^3 + z + 2i\sqrt{3} = 0$.

d) Construire alors les points N_1 et N_2 d'affixes respectives z_1^3 et z_2^3 (On rappelle que z_1 et z_2 sont les affixes des points M_1 et M_2).

e) Déterminer l'affixe a d'un point A de l'axe $(O, \vec{v})$ dont le symétrique par rapport au point K est d'affixe a^3.



(figure 2)

Exercice N°5 : (5 POINTS) Bac –sciences expérimentales-2017 (session contrôle)

A/1) a) Justifier que $\left(\sqrt{2}\right)^3 = 2\sqrt{2}$.

b) Déterminer les racines cubiques du nombre complexe $2\sqrt{2}\,i$.

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Dans la **figure** de l'annexe ci-jointe :

- (C) est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.
- A et D sont les points d'affixes respectives $z_A = -\sqrt{2}\,i$ et $z_D = 2\sqrt{2}\,i$.

a) Construire dans l'annexe les points B et C d'affixes respectives

$z_B = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $z_C = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

b) Vérifier que $z_B = \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et que $z_C = -\frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) Montrer que $(BC) \perp (AD)$.

d) Montrer que le quadrilatère ABDC est un losange.

B/ Soit α un nombre complexe non nul. On désigne par M, N et P les points d'affixes respectives $z_M = \alpha$, $z_N = \alpha e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $z_P = \alpha e^{i(-\frac{2\pi}{3})}$.

1) a) Calculer $z_N{}^3$ et $z_P{}^3$.

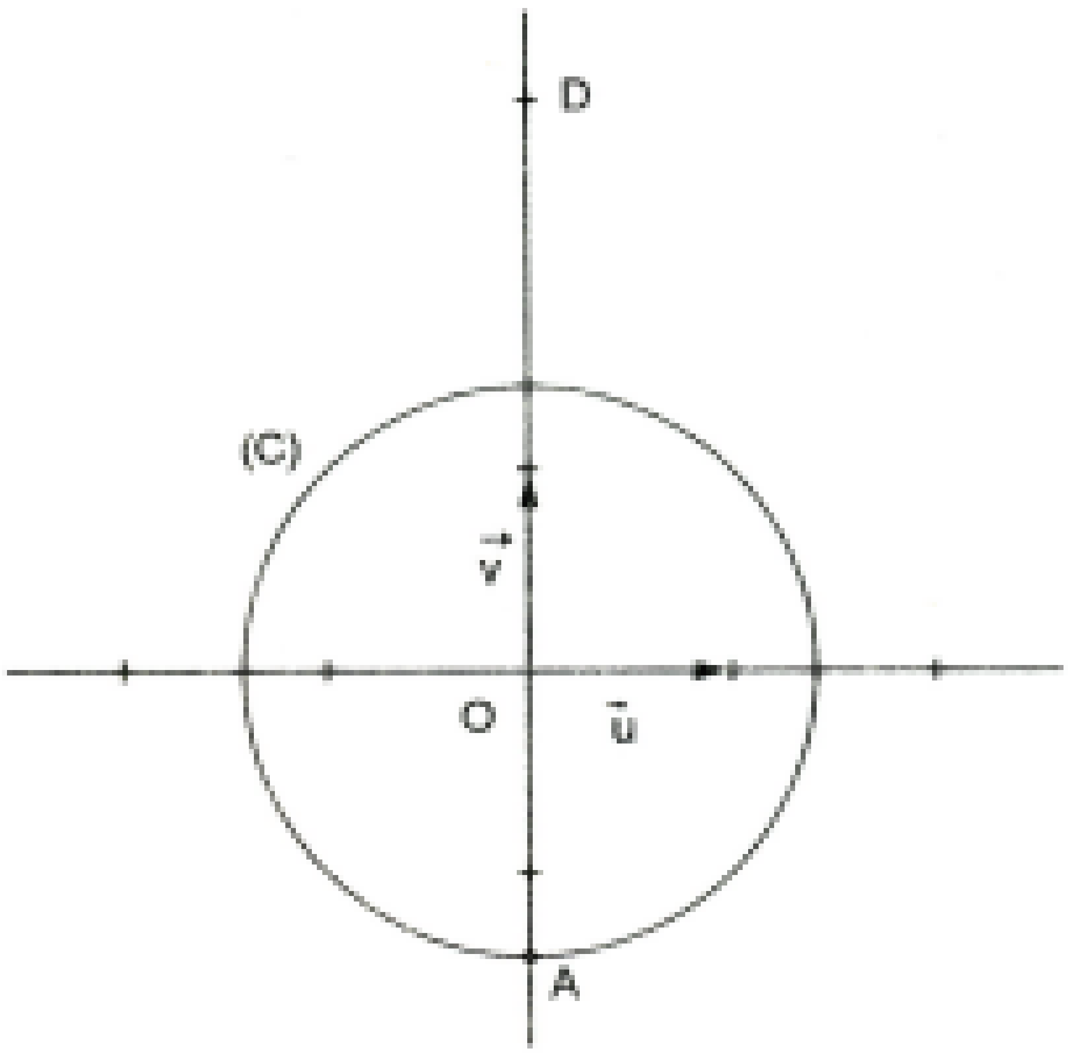
b) En déduire la nature du triangle MNP .

2) Soit Q le point d'affixe $z_Q = \alpha^3$.

a) Montrer que

(le quadrilatère MNQP est un losange) équivaut à ($\alpha^3 = -2\alpha$).

b) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles MNQP est un losange.



Exercice N°6: **(5 POINTS)** **Bac –sciences expérimentales-2016 (session contrôle)**

Dans la figure 1 de l'annexe jointe, $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé direct du plan, (C) est le cercle de centre O et de rayon 1 et A est le point de (C) d'abscisse $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ et d'ordonnée positive.

On note a l'affixe du point A.

1) Soit θ une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OA})$.

   a) Donner, en fonction de θ, l'écriture exponentielle des nombres complexes a, $\bar{a}$, a^2 et $\bar{a}^2$.

   b) Construire sur l'annexe les points B, C et D d'affixes respectives $\bar{a}$, a^2 et $\bar{a}^2$.

2) a) Justifier que $a+\bar{a} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

   b) Montrer que a et $\bar{a}$ sont les solutions de l'équation (E) : $z^2 - \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)z + 1 = 0$.

3) a) Montrer que pour tout nombre complexe z,

$$z^5 - 1 = (z-1)\left[z^2 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)z + 1\right]\left[z^2 + \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)z + 1\right].$$

   b) En déduire que a est une racine cinquième de l'unité.

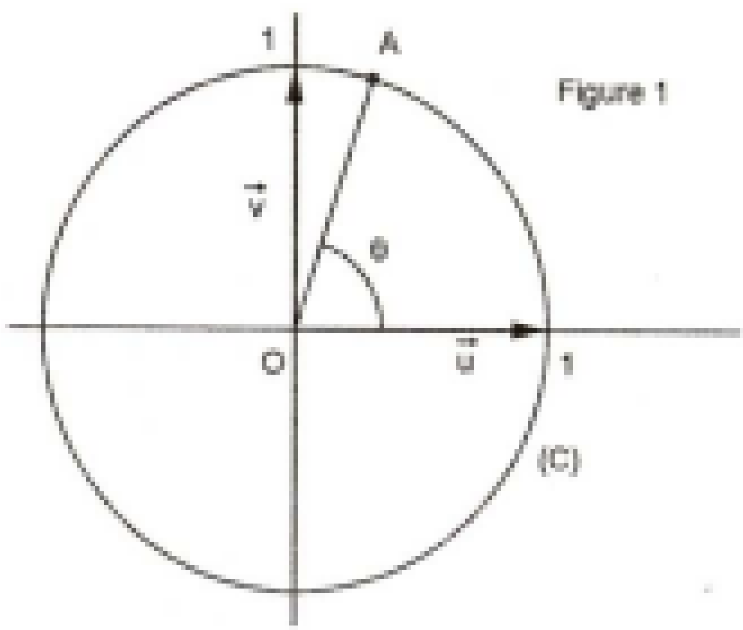
4) a) Donner sous forme exponentielle les racines cinquièmes de l'unité distinctes de 1.

   b) Vérifier que $e^{i\frac{2\pi}{5}}$ est l'unique racine cinquième de l'unité dont la partie réelle et la partie imaginaire sont strictement positives.

   c) En déduire que $a = e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

5) Soit I le point d'affixe 1.

   Montrer que les points I, A, C, D et B sont les sommets d'un pentagone régulier.



Exercice N°7: **(5 POINTS)** **Bac –sciences expérimentales-2015 (session contrôle)**

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 4e^{i\frac{\pi}{3}}z + e^{2i\frac{\pi}{3}} = 0$.

1/ a) Montrer que le discriminant Δ de l'équation (E) est égal à $\left(2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2$.

b) Résoudre l'équation (E) .On donnera les solutions sous forme exponentielle.

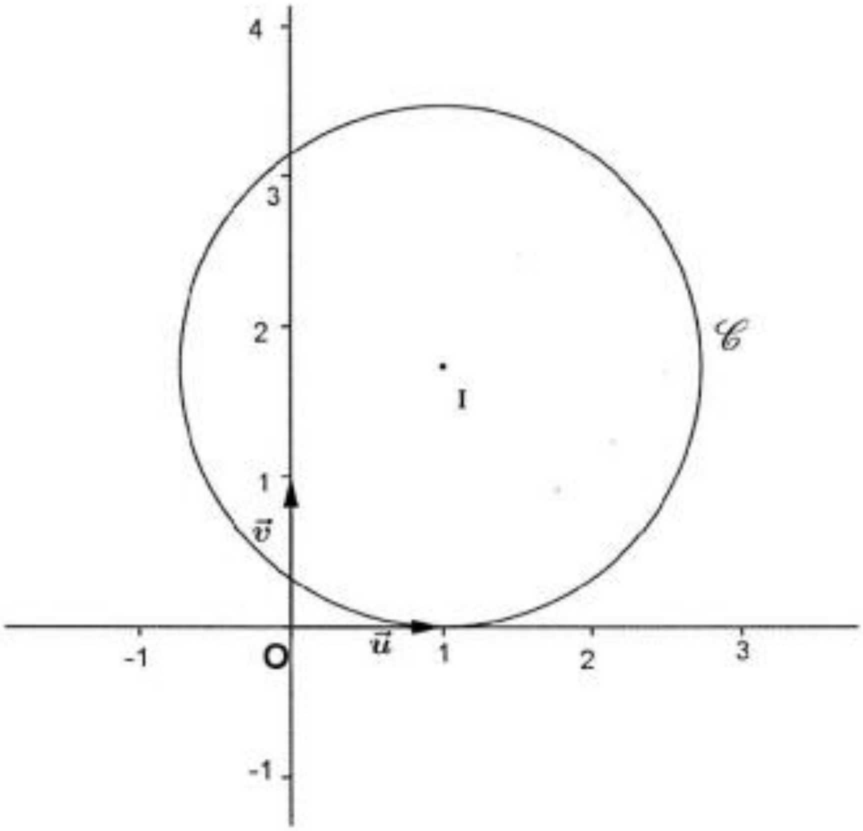
2/ Dans l'annexe ci-jointe, $(O,\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormé direct du plan et $\mathscr{C}$ est le cercle de centre le point I d'affixe $z_I = 1 + i\sqrt{3}$ et de rayon $\sqrt{3}$.

a) Écrire z_I sous forme exponentielle.

b) La droite (OI) coupe le cercle $\mathscr{C}$ en deux points A et B tels que $OA < OB$.

Placer A et B, puis justifier que $OA = 2 - \sqrt{3}$ et $OB = 2 + \sqrt{3}$.

c) En déduire que les affixes respectives z_A et z_B des points A et B sont les solutions de l'équation (E).



Exercice N°8: (5 POINTS) Bac –sciences expérimentales-2014 (session contrôle)

On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $2z^2 - \sqrt{2}(1-i)z - 2i = 0$.

1) a) Montrer que le discriminant Δ de l'équation (E) est égal à $6(1+i)^2$.

b) Résoudre l'équation (E).

2) a) Donner l'écriture exponentielle de $1-\mathrm{i}$.

b) Vérifier que pour tout nombre complexe z :

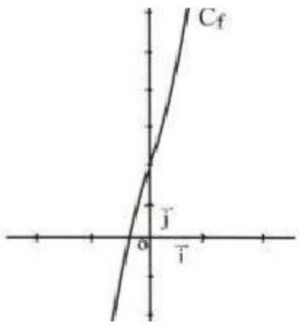
$$2\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}z\right)^2 - \sqrt{2}(1-i)\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}z\right) - 2i = -2i(z^2 - z + 1)\ .$$

c) Montrer que les solutions de l'équation $z^2 - z + 1 = 0$ sont $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{\pi}{3}}$.

d) En déduire une écriture exponentielle de chacune des solutions de l'équation (E).

e) Déterminer alors la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$.

Exercice N°9 : *(6 POINTS)* Bac –sciences expérimentales-2013(session principale)



I. Dans la figure ci - contre, on a représenté dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe C_f de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 6x + 2$.

1) Justifier que l'équation $x^3 + 6x + 2 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α.

2) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

II. On se propose dans cette partie de déterminer la valeur exacte de α.

1) On considère dans $\mathbb{C}$ les équations $(E_1) : z^3 = 2$ et $(E_2) : z^3 = -4$.

a) Justifier que les solutions de (E_1) sont $a_1 = \sqrt[3]{2}$, $a_2 = \sqrt[3]{2}\, e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $a_3 = \sqrt[3]{2}\, e^{i\left(\frac{-2\pi}{3}\right)}$.

b) Justifier que les solutions de (E_2) sont $b_1 = -\sqrt[3]{4}$, $b_2 = \sqrt[3]{4}\, e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $b_3 = \sqrt[3]{4}\, e^{i\left(\frac{-\pi}{3}\right)}$.

c) Vérifier que $a_1b_1 = a_2b_2 = a_3b_3 = -2$.

2) Soit a et b deux nombres complexes vérifiant $a^3 + b^3 = -2$ et $ab = -2$.

a) Vérifier que $(a+b)^3 = -2 - 6(a+b)$.

b) En déduire que $a + b$ est une solution de l'équation $z^3 + 6z + 2 = 0$.

3) Déduire les solutions de l'équation $z^3 + 6z + 2 = 0$.

4) Conclure.

Exercice N°10 : **(4 POINTS)** **Bac –sciences expérimentales-2012 (session principale)**

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On désigne par (C) le cercle de centre O et de rayon 1 et par I et A les points d'affixes respectives 1 et $a=\sqrt{3}+i$.

1) a/ Donner la forme exponentielle de a.

b/ Construire le point A.

2) Soit B le point d'affixe $b=\dfrac{a-1}{1-\overline{a}}$.

a/ Vérifier que $b\overline{b}=1$. En déduire que le point B appartient au cercle (C).

b/ Montrer que $\dfrac{b-1}{a-1}$ est un réel. En déduire que les points A, B et I sont alignés.

c/ Construire le point B dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.

3) Soit θ un argument du nombre complexe b.

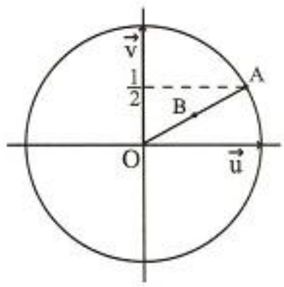
Montrer que $\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{3}-3}{5-2\sqrt{3}}$ et $\sin\theta=\dfrac{2-2\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}}$.

Exercice N°11 : **(4 POINTS)** **Bac –sciences expérimentales-2012 (session contrôle)**

Répondre par vrai ou faux à chacune des propositions suivantes en justifiant la réponse .

1) $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{5}}$ est une racine cinquième de $4\sqrt{2}$.

2) Dans la figure ci-contre , $(O,\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormé direct du plan et A est un point du cercle trigonométrique d'ordonnée $\dfrac{1}{2}$.



Si B est le milieu du segment $[OA]$ alors l'affixe du point B est $\dfrac{\sqrt{2}}{4}+\dfrac{1}{4}i$.

3) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct.

Si M et N sont les points d'affixes les solutions de l'équation $4z^2-5z-(3+2i)=0$ alors l'affixe du milieu du segment $[MN]$ est un réel.

Exercice N°12 : **(4 POINTS)** **Bac –sciences expérimentales-2011 (session contrôle)**

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1) Le nombre $\left(\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}\right)^5$ est un réel.

2) Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2-6z-7+i=0$ sont $1+2i$ et $-1+3i$.

3) Soit z et z' deux nombres complexes non nuls.

Si $\arg(z')\equiv -\arg(z)\ [2\pi]$ alors $z'=\overline{z}$.

4) L'écriture exponentielle du nombre complexe $(\sqrt{3}+i)^8$ est $2^8e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)}$.

Exercice N°13 : (5 POINTS) Bac –sciences expérimentales-2011(session principale)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives $a=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $b=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$.

1) a) Donner l'écriture exponentielle de chacun des nombres complexes a et b.
   b) Vérifier que $b^2=a$.

2) Soit C le point d'affixe $c=a+b$.
   a) Placer les points A, B et C.
   b) Vérifier que $c=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

3) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2+z-c=0$.
   a) Vérifier que b est une solution de l'équation (E).
   b) On désigne par d la deuxième solution de l'équation (E).
   Montrer que $d=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}e^{i\left(\frac{-11\pi}{12}\right)}$
   c) Placer alors, le point D d'affixe d.

Exercice N°14: (5 POINTS) Bac –sciences expérimentales-2010(session principale)

1) a) Vérifier que $(5+2i)^2=21+20i$.
   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-(5-4i)z-3-15i=0$.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On désigne par A, B, A′ et B′ les points d'affixes respectives $-3i$, $5-i$, -3 et $1+5i$.

2) a) Placer les points A, B, A′ et B′.
   b) Montrer que OAA′ et OBB′ sont des triangles rectangles et isocèles.

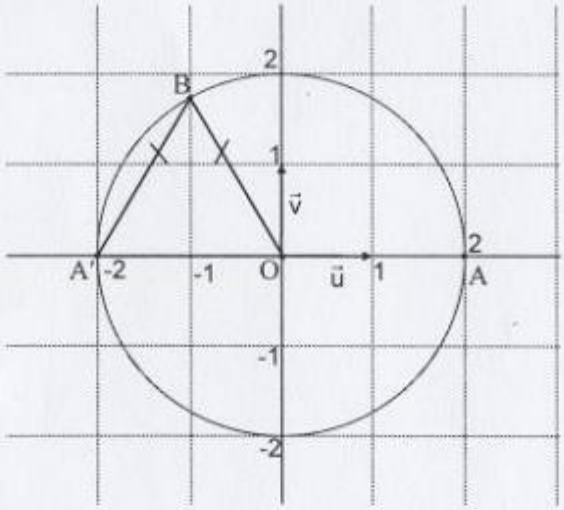
3) Soit M un point de la droite (AB) d'affixes z_M.
   a) Montrer qu'il existe un réel k tel que $z_M=5k+(2k-3)i$.
   b) Montrer que les droites (OM) et (A′B′) sont perpendiculaires si et seulement si le point M est le milieu du segment [AB].
   Vérifier que dans ce cas A′B′ = 2 OM.

Exercice N°15: (3 POINTS) Bac –sciences expérimentales-2010 (session controle)

Répondre par vrai ou faux à chacune des propositions suivantes.
Aucune justification n'est demandée.

1) Si u et v sont deux racines cinquième de l'unité, alors u.v est aussi une racine cinquième de l'unité.
2) $1+i\sqrt{2009}$ est une solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2-2z+2010=0$.
3) Un argument du nombre complexe $z=-5e^{\frac{i\pi}{6}}$ est $-\frac{\pi}{6}$.
4) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, l'ensemble des points M d'affixe z tels que $z=3e^{i\theta}$, où θ décrit l'intervalle $[o,\pi]$, est un demi-cercle.

FEUILLE A RENDRE AVEC LA COPIE



Exercice N°16 : *(6 POINTS)* **Bac –sciences expérimentales-2009 (session principale)**

Dans la figure de la page 3/3, $(O,\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormé direct du plan, $\mathscr{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 2 et B est un point d'affixe z_B.

1) Déterminer par une lecture graphique le module et un argument de z_B.
   En déduire que $z_B = -1 + i\sqrt{3}$.
2) a) Placer sur la figure le point C d'affixe $z_C = 1 + i\sqrt{3}$.
   b) Montrer que le quadrilatère OACB est un losange.
3) On se propose de déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tels que z^3 soit un réel positif ou nul.
   a) Vérifier que les points O, A et B appartiennent à E.
   b) Prouver que tout point M de la demi-droite $[OB)$ appartient à E.
   c) Soit z un nombre complexe non nul, de module r et d'argument θ.
   Montrer que z^3 est un réel positif si et seulement si $\theta = \frac{2k\pi}{3}$; $k \in \mathbb{Z}$.
   d) En déduire que E est la réunion de trois demi-droites que l'on déterminera.
   Représenter E sur la figure.

Exercice N17 : *(2 POINTS)* **Bac –sciences expérimentales-2008 (session principale)**

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse correcte vaut 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.

1) Le nombre complexe $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$ a pour argument

a) $\dfrac{\pi}{12}$; b) $\dfrac{\pi}{4}$; c) $\dfrac{\pi}{3}$.

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère les points A, B, C, et D d'affixes respectives -1, $1+2i$, 3, et $-3i$. Alors on a

a) les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux ;

b) le quadrilatère ABCD est un parallélogramme ;

c) les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Exercice N18: *(6POINTS)* **Bac –sciences expérimentales-2008 (session contrôle)**

1) a) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E): $z^2 - z + 1 = 0$.

b) Mettre les solutions de (E) sous forme exponentielle.

c) En déduire les solutions de l'équation (E'): $z^4 - z^2 + 1 = 0$.

2) Mettre le polynôme $P(z) = z^4 - z^2 + 1$ sous la forme d'un produit de deux polynômes du second degré à coefficients réels.

3) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

On désigne par A, B, C et D les images des solutions de l'équation (E') telles que $Re(z_A)>0$, $Im(z_A)>0$; $Re(z_B)>0$ et $Im(z_D)>0$

a) Placer les points A, B, C et D.

b) Déterminer la nature du quadrilatère ABCD.

Exercice N19 : *(4POINTS)* **Bac –sciences expér & techniq -2007 (session principale)**

1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): 2z^2 + (7+i\sqrt{3})z - 4(1-i\sqrt{3}) = 0$.

a – Montrer que (E) admet une solution réelle que l'on déterminera.

b – Donner alors l'autre solution de (E).

2) a – Calculer $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)^2$.

b – Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E'): 2z^4 + (7+i\sqrt{3})z^2 - 4(1-i\sqrt{3}) = 0$.

3) Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$; on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2i$ et $z_B = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$ et on désigne par I le milieu du segment [OA].

a – Ecrire z_B sous forme exponentielle.

b – Placer I et B et montrer que le triangle OIB est isocèle.

Exercice N1: (corrigé) Bac –sciences expérimentales-2017(session principale)

1) a) $\left(\sqrt{5}+2i\right)^2=\sqrt{5}^2+2\times\sqrt{5}\times 2i+(2i)^2=5+4i\sqrt{5}-4=1+4i\sqrt{5}$.

b) $\Delta=\left[-\left(\sqrt{5}+2i\right)\right]^2-4\times 1\times\left(1+4i\sqrt{5}\right)=\left(\sqrt{5}+2i\right)^2-4\left(\sqrt{5}+2i\right)^2=-3\left(\sqrt{5}+2i\right)^2$.

c) $\Delta=-3\left(\sqrt{5}+2i\right)^2=\left[i\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+2i\right)\right]^2$, donc $\delta=i\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+2i\right)$ par suite :

$$a=\frac{\sqrt{5}+2i+i\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+2i\right)}{2}=\frac{\left(\sqrt{5}+2i\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)}{2}=\left(\sqrt{5}+2i\right)\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)$$

et $a=\dfrac{\sqrt{5}+2i-i\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+2i\right)}{2}=\dfrac{\left(\sqrt{5}+2i\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)}{2}=\left(\sqrt{5}+2i\right)\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)$.

Donc les solutions de (E) sont a et b.

2) a) $OQ=\left|z_Q\right|=\left|\sqrt{5}+2i\right|=\sqrt{\sqrt{5}^2+2^2}=\sqrt{9}=3$, donc $Q\in C_{(O,3)}=C$.

b) $Q\in C\ \cap\{y=2\}$, avec $\mathrm{Re}(z_A)>0$.

3) a) $OA=|a|=\left|\left(\sqrt{5}+2i\right)\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|\left(\sqrt{5}+2i\right)\right|.\left|1+i\sqrt{3}\right|=\frac{1}{2}OQ\times\sqrt{4}=3$. Donc $A\in C$.

$OB=|b|=\left|\left(\sqrt{5}+2i\right)\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|\left(\sqrt{5}+2i\right)\right|.\left|1-i\sqrt{3}\right|=\frac{1}{2}OQ\times\sqrt{4}=3$. Donc $B\in C$.

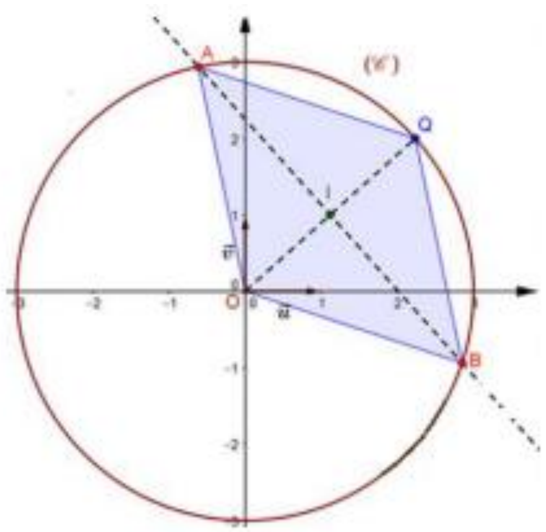
b) $z_{\overrightarrow{OA}}+z_{\overrightarrow{OB}}=a+b=\left(\sqrt{5}+2i\right)\left[\frac{1+i\sqrt{3}}{2}+\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right]=\sqrt{5}+2i=z_Q=z_{\overrightarrow{OQ}}$.

Ainsi $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OQ}$.

c) On a : $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OQ}$ donc le quadrilatère $OAQB$ est un parallélogramme, de plus $OA=OB$ ainsi $OAQB$ est un losange.

d) On construit le point I milieu du segment $[OQ]$

La perpendiculaire à (OQ) passant par I coupe le cercle C en A et B tel que $\mathrm{Im}(z_A)>0$, car $a=\dfrac{\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{2}+i\,\dfrac{2+\sqrt{15}}{2}$ et $b=\dfrac{\sqrt{5}+2\sqrt{3}}{2}+i\,\dfrac{2-\sqrt{15}}{2}$.



Exercice N2: **(corrigé)** **Bac –sciences expérimentales-2016(session principale)**

1) a) Voir figure.

   b) $a = \sqrt{3} + i$ et $b = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

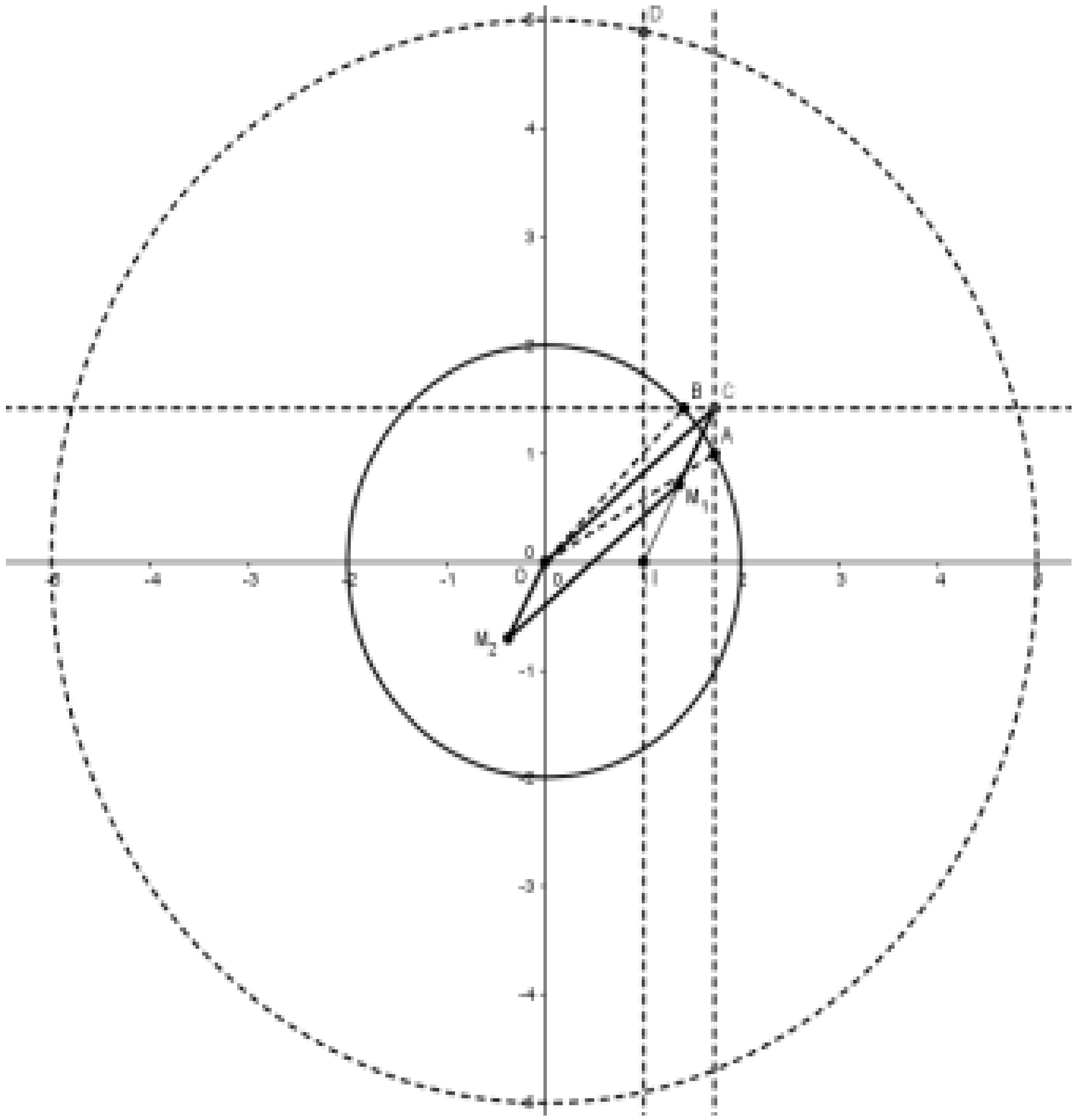
2) a) $\begin{cases} \mathrm{Re}(c) = \mathrm{Re}(a) \\ \mathrm{Im}(c) = \mathrm{Im}(b) \end{cases}$,

   on en déduit que $c = \sqrt{3} + i\sqrt{2}$.

   b) $c^2 = \left(\sqrt{3} + i\sqrt{2}\right)^2 = 3 - 2 + 2\sqrt{6}i = 1 + 2i\sqrt{6}$.

3) a) $OD = \left|c^2\right| = \sqrt{1 + 24} = 5$.

   b) D'une part $OD = 5$ donc D appartient au cercle de centre D et de rayon 5, d'autre part



$\mathrm{Re}\left(c^2\right) = 1$ donc D appartient à la droite
d'équation $x = 1$ d'où la construction de D.
(En tenant compte de $\mathrm{Im}\left(c^2\right) > 0$)

4) $\Delta = 4 + 8i\sqrt{6} = 4c^2$. Soit $\delta = 2c$.

$z_1 = \dfrac{1+\sqrt{3}+i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{1-\sqrt{3}-i\sqrt{2}}{2}$.

5) a) $z_1 = \dfrac{1+c}{2}$, il en résulte que M_1 est le milieu de [IC].

b) $c = z_1 - z_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{M_2M_1}$. On en déduit que OCM_1M_2 est un parallélogramme.

c) Voir figure.

Exercice N°3 : **(corrigé)** <u>**Bac –sciences expérimentales-2015(session principale)**</u>

1/ a) $|a| = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$ donc $A \in (C)$.

b) Il suffit de tracer la droite d'équation $x = 1$ et de remarquer que $\left(\mathrm{Im}(a) > 0\right)$.

2/ a) $\Delta = \left(2i\sqrt{3}\right)^2 + 24i\sqrt{2} = -12 + 24i\sqrt{2} = 12\left(-1 + 2i\sqrt{2}\right) = 12a^2$.

b) Soit $\delta = 2\sqrt{3}a = 2\sqrt{3}\left(1 + i\sqrt{2}\right)$.

$$z_1 = \frac{2i\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\left(1+i\sqrt{2}\right)}{2} = \sqrt{3}\left[i - 1 - i\sqrt{2}\right] = \sqrt{3}\left[-1 + i\left(1-\sqrt{2}\right)\right].$$

$$z_2 = \frac{2i\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\left(1+i\sqrt{2}\right)}{2} = \sqrt{3}\left[i + 1 + i\sqrt{2}\right] = \sqrt{3}\left[1 + i\left(1+\sqrt{2}\right)\right].$$

3/ a) $\dfrac{z_1 + z_2}{2} = i\sqrt{3} = z_K$ donc $K = M_1 * M_2$.

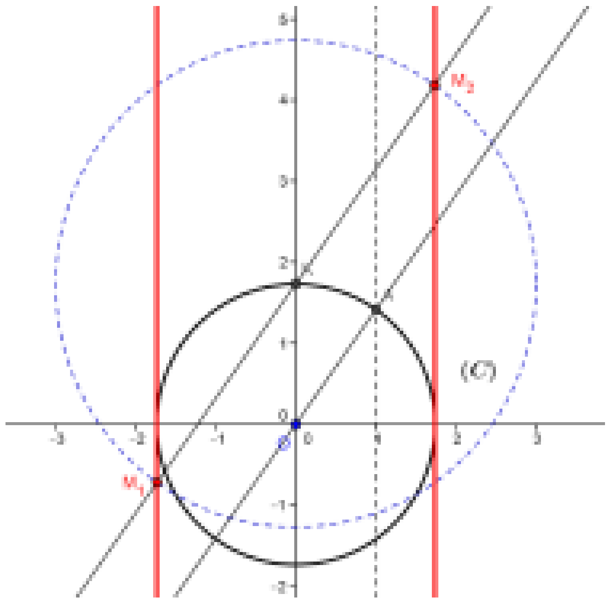
b) $$\frac{z_2 - z_1}{a} = \frac{2\left(\sqrt{3} + i\sqrt{6}\right)}{\left(1+i\sqrt{2}\right)} = \frac{2\left(\sqrt{3}+i\sqrt{6}\right)\left(1-i\sqrt{2}\right)}{3} = \frac{2\sqrt{3}\left(1+i\sqrt{2}\right)\left(1-i\sqrt{2}\right)}{3} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}.$$

$\dfrac{\mathrm{Aff}\left(\overrightarrow{M_1M_2}\right)}{\mathrm{Aff}\left(\overrightarrow{OA}\right)}$ est réel donc les vecteurs $\overrightarrow{M_1M_2}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont colinéaires donc $(M_1M_2) \parallel (OA)$.

c) $M_1M_2 = |z_2 - z_1| = \left|2\sqrt{3} + 2i\sqrt{6}\right| = \sqrt{36} = 6$.

d) Les points M_1 et M_2 appartiennent à la droite parallèle à (OA) passant par K et le cercle de centre K et de rayon 3.

Ou bien : Les points M_1 et M_2 appartiennent à la droite parallèle à (OA) passant par K et les droites d'équations respectives $x = -\sqrt{3}$ et $x = \sqrt{3}$.



Exercice N°4 : **(corrigé)** **Bac –sciences expérimentales-2014(session principale)**

1) a) $z_1 + z_2 = -i\sqrt{3}$ et $z_1 \times z_2 = -2$.

b) $\begin{cases} z_1 + z_2 = -i\sqrt{3} \\ z_1 \times z_2 = -2 \end{cases}$ donc z_1 et z_2 sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 + i\sqrt{3}z - 2 = 0$, il en résulte que $z^2 + i\sqrt{3}z - 2 = (z - z_1)(z - z_2)$ où $z \in \mathbb{C}$.

2) a) $OM_1 = |z_1| = \sqrt{2}$ et $OM_2 = |z_2| = \sqrt{2}$ donc M_1 et M_2 appartiennent au cercle (C).

b) $\dfrac{z_1 + z_2}{2} = -i\sqrt{3} = z_H$

c) Voir figure.

3) a) $K = M * N \Leftrightarrow \dfrac{z + z^3}{2} = -i\sqrt{3} \Leftrightarrow z^3 + z + 2i\sqrt{3} = 0.$

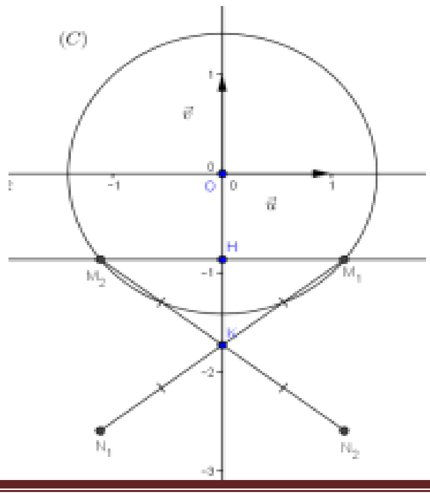
b) Il suffit de développer.

c) $z^3 + z + 2i\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow (z - i\sqrt{3})(z^2 + i\sqrt{3}z - 2) = 0 \Leftrightarrow z = i\sqrt{3}$ ou $z = z_1$ ou $z = z_2$.,

$S_{\mathbb{C}} = \{i\sqrt{3}, z_1, z_2\}$

d) Puisque z_1 et z_2 sont des solutions de l'équation $z^3 + z + 2i\sqrt{3} = 0$ donc N_1 et N_2 sont les symétriques respectifs de M_1 et M_2 par rapport à K.

e) a est la troisième solution de l'équation $z^3 + z + 2i\sqrt{3} = 0$ donc $a = i\sqrt{3}$.



Exercice N°5 : **(corrigé)** <u>**Bac –sciences expérimentales-2017 (session contrôle)**</u>

A/

1) a) $\left(\sqrt{2}\right)^3=\left(\sqrt{2}\right)^2\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

b) $Z^3=2\sqrt{2}i=\left(\sqrt{2}\right)^3 e^{i\frac{\pi}{2}}$ signifie $Z=2\sqrt{2}i=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$ avec $k\in\{0,1,2\}$.

Signifie $Z=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$ ou $Z=\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}$ ou $Z=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

Ainsi les racines cubiques du nombre complexe $2\sqrt{2}i$ sont

$Z=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$; $Z=\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}$ et $Z=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

2) a) $\Rightarrow z_B=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\Leftrightarrow\begin{cases}|z_B|=\sqrt{2}\\ \arg(z_B)=\frac{\pi}{6}[2\pi]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}B\in\zeta_{(O,\sqrt{2})}\\ \left(\vec{u},\overrightarrow{OB}\right)=\frac{\pi}{6}[2\pi]\end{cases}$

signifie $B\in\zeta\cap[Ot)$ où $\left(\vec{u},\overrightarrow{Ot}\right)=\frac{\pi}{6}[2\pi]$.

$\Rightarrow z_C=\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}\Leftrightarrow\begin{cases}|z_C|=\sqrt{2}\\ \arg(z_C)=\frac{\pi}{6}[2\pi]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C\in\zeta_{(O,\sqrt{2})}\\ \left(\vec{u},\overrightarrow{OC}\right)=\frac{5\pi}{6}[2\pi]\end{cases}$

signifie $C\in\zeta\cap[Ot')$ où $\left(\vec{u},\overrightarrow{Ot'}\right)=\frac{5\pi}{6}[2\pi]$.

b) $\Rightarrow z_B=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\Rightarrow z_C=\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=-\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Autrement : $\Rightarrow$ $z_C=\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}=\sqrt{2}e^{i\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)}=-\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}=-\overline{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}}=-\overline{z_B}$.

$=-\overline{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=-\left(\frac{\sqrt{6}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) $\Rightarrow z_{\overrightarrow{BC}}=z_C-z_B=-\sqrt{6}$.

$\Rightarrow z_{\overrightarrow{AD}}=z_D-z_A=3\sqrt{2}\,i$.

Donc $\frac{z_{\overrightarrow{AD}}}{z_{\overrightarrow{BC}}}=-\sqrt{3}\,i\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{AD}$. Ainsi $(BC)\perp(AD)$.

Autrement : $z_C=-\overline{z_B}$ signifie $S_{(O,\vec{v})}(B)=C$ signifie $\left(O,\vec{v}\right)\perp(BC)$

Or $\left(O,\vec{v}\right)=(AD)$, Ainsi $(BC)\perp(AD)$.

d) $\Rightarrow z_{\overrightarrow{AC}}=z_C-z_A=-\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}i=-\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

$\Rightarrow z_{\overrightarrow{BD}}=z_D-z_B=2\sqrt{2}i-\frac{\sqrt{6}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

Donc $z_{\overrightarrow{AC}}=z_{\overrightarrow{BD}}$, d'où ABDC est un parallélogramme de plus $(BC)\perp(AD)$;
Ainsi ABDC est un losange.

B/ 1) **a)** ⇒ $z_N^3 = \left(\alpha e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 = \alpha^3 e^{i2\pi} = \alpha^3$.

⇒ $z_P^3 = \left(\alpha e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}\right)^3 = \alpha^3 e^{-i2\pi} = \alpha^3$.

b) ⇒ $z_N^3 = z_P^3 = \alpha^3$.

Donc les racines cubiques du nombre complexe non nul α^3 sont z_N, z_P et z_M
et comme les points images des racines cubiques d'un nombre complexe non nul
sont les sommets d'un triangle équilatéral, ainsi MNP est un triangle équilatéral.

2) a) ⇒ MNQP est un losange signifie MNQP est un parallélogramme et MN = MQ
signifie MNQP est un parallélogramme(car MNP est un triangle équilatéral)

signifie $z_{\overrightarrow{MN}} = z_{\overrightarrow{PQ}}$ signifie $z_N - z_M = z_Q - z_P$ signifie $z_Q = -z_M + z_P + z_N$

signifie $\alpha^3 = -\alpha + \alpha e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)} + \alpha e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}$ signifie $\alpha^3 = -\alpha + \alpha\left(e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)} + e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}\right)$

signifie $\alpha^3 = -\alpha + \alpha \times 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ signifie $\alpha^3 = -\alpha + \alpha \times 2\left(-\frac{1}{2}\right)$

signifie $\alpha^3 = -2\alpha$.

b) ⇒ MNQP est un losange signifie $\alpha^3 = -2\alpha$ signifie $\alpha\left(\alpha^2 + 2\right) = 0$

signifie $\alpha^2 + 2 = 0$ car $\alpha \in \mathbb{C}^*$

signifie $\alpha^2 = -2$ signifie $\alpha = i\sqrt{2}$ ou $\alpha = i\sqrt{2}$.

Exercice N°6 : **(corrigé)** <u>**Bac –sciences expérimentales-2016 (session contrôle)**</u>

1) a) $a = e^{i\theta}, \bar{a} = e^{-i\theta}$, $a^2 = e^{2i\theta}$ et $\bar{a}^2 = e^{-2i\theta}$.

b) Voir figure.

2) a) $a + \bar{a} = 2\operatorname{Re}(a) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

b) $a^2 - \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)a + 1 = a^2 - a\left(a + \bar{a}\right) + 1 = a^2 - a^2 - \left|a^2\right| + 1 = 0$ ce qui prouve que a est solution de l'équation (E).

$\bar{a}^2 - \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\bar{a} + 1 = \overline{a^2 - \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)a + 1} = 0$ ce qui prouve que $\bar{a}$ est solution de l'équation (E).

3) a) $(z-1)\left(z^2 - \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)z + 1\right)\left(z^2 + \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)z + 1\right) = (z-1)\left(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1\right) = z^5 - 1$.

b) En changeant z par a dans a), on obtient $a^5 - 1 = (a-1)\left(a^2 - \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)a + 1\right)\left(a^2 + \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)a + 1\right)$

et puisque a est solution de l'équation (E) donc $\left(a^2 - \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)a + 1\right) = 0$, il en résulte que

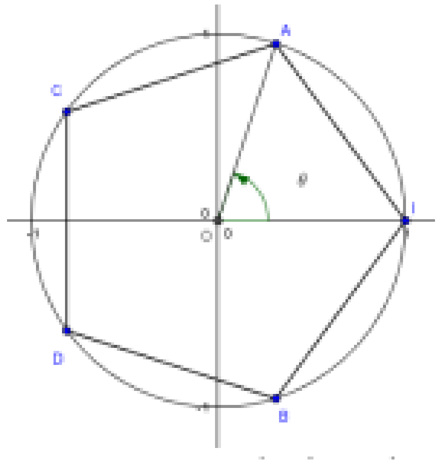
$a^5 - 1 = 0 \Leftrightarrow a^5 = 1$ ou encore a est une racine cinquième de l'unité.

4) a) Les racines cinquièmes de l'unité distinctes de 1 sont $e^{i\frac{2k\pi}{5}}$, $k \in \{1,2,3,4\}$.

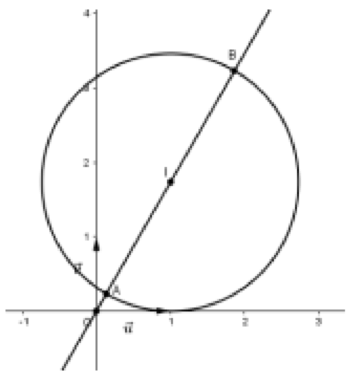
b) $\begin{cases} \cos\frac{2\pi}{5} > 0 \\ \sin\frac{2\pi}{5} > 0 \end{cases}$, $\mathrm{Im}(1) = 0$, $\cos\frac{4\pi}{5} < 0$, $\cos\frac{6\pi}{5} < 0$ et $\sin\frac{8\pi}{5} < 0$. Il en résulte que $e^{i\frac{2k\pi}{5}}$ est l'unique racine cinquième de l'unité dont la partie réelle et imaginaire sont strictement positives.

c) On sait que a est une racine cinquième de l'unité dont la partie réelle et imaginaire sont strictement positives, d'après b), $a = e^{i\frac{2k\pi}{5}}$.

5) Les affixes respectives des points I, A, B, C et D sont les racines cinquièmes de l'unité donc les points I, A, B, C et D sont les sommets d'un pentagone régulier inscrit dans le cercle (C).



Exercice N°7: **(corrigé)** Bac –sciences expérimentales-2015(session contrôle)



1/ a) $\Delta = \left(4e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2 - 4e^{i\frac{2\pi}{3}} = 12e^{i\frac{2\pi}{3}} = \left(2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2$.

b) Soit $\delta = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$.

$$z' = \frac{4e^{i\frac{\pi}{3}} - 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}}{2} = \left(2-\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

$$z'' = \frac{4e^{i\frac{\pi}{3}} + 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}}{2} = \left(2+\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

2/ a) $z_I = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

b) $OA = OI - IA = 2 - \sqrt{3}$.
$OB = OI + IB = 2 + \sqrt{3}$.

c) $|z_A| = OA = 2 - \sqrt{3}$ et $\arg(z_A) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{OA}\right)[2\pi] = \left(\vec{u}, \overrightarrow{OI}\right)[2\pi] = \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Il en résulte que $z_A = \left(2-\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{3}}$.

$|z_B| = OB = 2 + \sqrt{3}$ et $\arg(z_B) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{OB}\right)[2\pi] = \left(\vec{u}, \overrightarrow{OI}\right)[2\pi] = \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Il en résulte que $z_B = \left(2+\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Exercice N°8: **(corrigé)** **Bac –sciences expérimentales-2014(session contrôle)**

1) a) $\Delta = 2(1-i)^2 + 16i = 12i = 6(1+i)^2$.

b) $\Delta = 6(1+i)^2$, soit $\delta = \sqrt{6}(1+i)$, $z' = \dfrac{\sqrt{2}(1-i)+\sqrt{6}(1+i)}{4} = \dfrac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}$ et

$z'' = \dfrac{\sqrt{2}(1-i)-\sqrt{6}(1+i)}{4} = \dfrac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)-i\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{4}$.

$S_{\mathbb{C}} = \left\{\dfrac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}, \dfrac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)-i\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{4}\right\}$.

2) a) $1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

b) $2\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}z\right)^2 - \sqrt{2}(1-i)\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}z\right) - 2i = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}z^2 - 2e^{-i\frac{\pi}{2}}z - 2i = -2iz^2 + 2iz - 2i = -2i\left(z^2 - z + 1\right)$.

c) $\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^2 - e^{-i\frac{\pi}{3}} + 1 = e^{-i\frac{2\pi}{3}} - e^{-i\frac{\pi}{3}} + 1 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i - \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) + 1 = 0$,

$\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2 - e^{i\frac{\pi}{3}} + 1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{3}} + 1 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i - \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) + 1 = 0$ et l'équation $z^2 - z + 1 = 0$ est une

équation de second degré dans $\mathbb{C}$ donc $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{\pi}{3}}$ sont les solutions de l'équation $z^2 - z + 1 = 0$.

d) D'après 2)b) z est une solution de l'équation $z^2 - z + 1 = 0$ si et seulement si $e^{-i\frac{\pi}{4}}z$ est une solution de (E) et puisque $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{\pi}{3}}$ sont les solutions de l'équation $z^2 - z + 1 = 0$, on en déduit que les solutions de (E) sont $e^{-i\frac{\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{4}} = e^{-i\frac{7\pi}{12}}$ et $e^{i\frac{\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{12}}$ et comme

$\text{Re}\left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right) > 0$ et $\text{Im}\left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right) > 0$ donc $e^{i\frac{\pi}{12}} = \dfrac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}$ par suite

$\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \text{Re}\left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right) = \text{Re}\left(\dfrac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}\right) = \dfrac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}{4}$.

Exercice N°9 : (corrigé)*(6 POINTS)* Bac –sciences expérimentales-2013(session principale)

$f'(x) = 3x^2 + 6$ donc $f'(x) > 0$

1. Graphiquement : la courbe C_f coupe l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse comprise entre -1 et 0 donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$.

OU

La fonction f est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$.

2. $f(-0{,}4) \approx -0{,}464$ et $f(-0{,}3) \approx 0{,}173$, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc $-0{,}4 < \alpha < -0{,}3$

II 1. *a.* $a_1^{\,3} = \sqrt[3]{2}^{\,3} = 2$ donc a_1 est solution de $z^3 = 2$

Les racines cubiques de l'unité sont 1 ; $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{-2\pi}{3}}$ donc les racines cubiques de 2 sont a_1, $a_1 e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $a_1 e^{i\frac{-2\pi}{3}}$

soit les solutions de $z^3 = 2$ sont : $a_1 = \sqrt[3]{2}$, $a_2 = \sqrt[3]{2}\, e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $a_3 = \sqrt[3]{2}\, e^{i\frac{-2\pi}{3}}$.

1. *b.* $b_1^{\,3} = \left(-\sqrt[3]{4}\right)^3 = -4$ donc b_1 est solution de $z^3 = -4$

Les racines cubiques de l'unité sont 1 ; $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{-2\pi}{3}}$ donc les racines cubiques de -4 sont b_1, $b_1 e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $b_1 e^{i\frac{-2\pi}{3}}$ soit $-\sqrt[3]{4}$, $-\sqrt[3]{4}\, e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $-\sqrt[3]{4}\, e^{i\frac{-2\pi}{3}}$.

$-1 = e^{i\pi}$donc $-\sqrt[3]{4}\, e^{i\frac{2\pi}{3}} = \sqrt[3]{4}\, e^{i\pi} e^{i\frac{2\pi}{3}} = \sqrt[3]{4}\, e^{i\frac{5\pi}{3}}$ soit encore $\sqrt[3]{4}\, e^{i\frac{-\pi}{3}}$

$-\sqrt[3]{4}\, e^{i\frac{-2\pi}{3}} = \sqrt[3]{4}\, e^{i\pi} e^{i\frac{-2\pi}{3}} = \sqrt[3]{4}\, e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Les solutions de $z^3 = -4$ sont $b_1 = -\sqrt[3]{4}$; $b_2 = \sqrt[3]{4}\, e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $b_3 = \sqrt[3]{4}\, e^{i\frac{-\pi}{3}}$.

c. $a_1 b_1 = -\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{2} = -\sqrt[3]{8} = -2$

$a_2 b_2 = \sqrt[3]{4}\ \sqrt[3]{2}\ e^{i\frac{\pi}{3}} e^{i\frac{2\pi}{3}} = \sqrt[3]{8}\ e^{i\pi} = -2$

$a_3 b_3 = \sqrt[3]{4}\ \sqrt[3]{2}\ e^{i\frac{-\pi}{3}} e^{i\frac{-2\pi}{3}} = \sqrt[3]{8}\ e^{-i\pi} = -2$

2. *a.* $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ donc $(a+b)^3 = -2 - 6(a+b)$.

2. *b.* $(a+b)^3 = -2 - 6(a+b)$ donc $(a+b)^3 + 6(a+b) + 2 = 0$ $a+b$ est solution de $z^3 + 6z + 2 = 0$
Soit a une solution de $z^3 = 2$ et b une solution de $z^3 = -4$ alors $a^3 + b^3 = 2 - 4 = -2$

Si $a = a_1$ et $b = b_1$ alors $a_1^{\,3} + b_1^{\,3} = -2$ et $a_1 b_1 = -2$ donc $a_1 + b_1$ est solution de $z^3 + 6z + 2 = 0$
Si $a = a_2$ et $b = b_2$ alors $a_2^{\,3} + b_2^{\,3} = -2$ et $a_2 b_2 = -2$ donc $a_2 + b_2$ est solution de $z^3 + 6z + 2 = 0$
Si $a = a_3$ et $b = b_3$ alors $a_3^{\,3} + b_3^{\,3} = -2$ et $a_3 b_3 = -2$ donc $a_3 + b_3$ est solution de $z^3 + 6z + 2 = 0$

$a_1 + b_1 = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$

$a_2 + b_2 = \sqrt[3]{2}\ e^{i\frac{2\pi}{3}} + \sqrt[3]{4}\, e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $a_3 + b_3 = \sqrt[3]{2}\ e^{i\frac{-2\pi}{3}} + \sqrt[3]{4}\, e^{i\frac{-\pi}{3}}$ donc $a_3 + b_3$ est le conjugué de $a_2 + b_2$

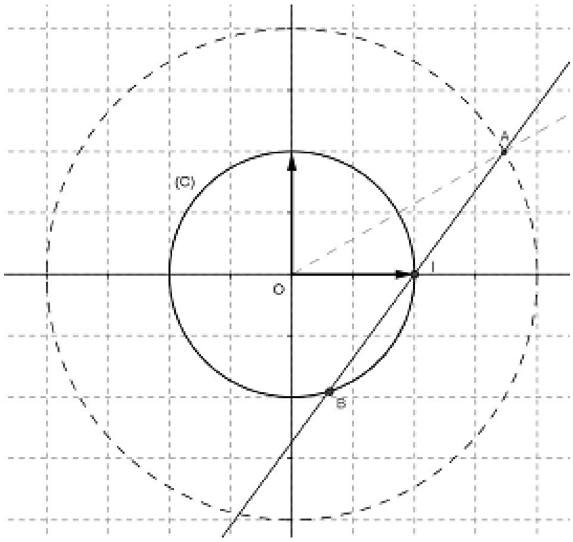
$a_1 + b_1$; $a_2 + b_2$; $a_3 + b_3$ sont deux à deux distinctes or une équation de degré n admet exactement n solutions complexes donc $z^3 + 6z + 2 = 0$ admet pour solutions $a_1 + b_1$; $a_2 + b_2$; $a_3 + b_3$.

4. α est solution de $z^3 + 6z + 2 = 0$ et α est réel donc $\alpha = a_1 + b_1 = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$.

Exercice N°10: (corrigé) (4 POINTS) Bac –sciences expérimentales-2012 (session principale)

1) a) $a=\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=2e^{i\frac{\pi}{6}}$

b)



2) a) $b=\frac{a-1}{1-\bar{a}}$

$b\bar{b}=\left(\frac{a-1}{1-\bar{a}}\right)\times\overline{\left(\frac{a-1}{1-\bar{a}}\right)}=\left(\frac{a-1}{1-\bar{a}}\right)\times\left(\frac{\bar{a}-1}{1-a}\right)=\left(\frac{a-1}{1-a}\right)\times\left(\frac{\bar{a}-1}{1-\bar{a}}\right)=(-1)\times(-1)=1$

$b\bar{b}=1\Leftrightarrow|b|^2=1\Leftrightarrow|b|=1\Leftrightarrow OB=1$ donc B est un point de (C).

b) $\left(\frac{b-1}{a-1}\right)\times\overline{\left(\frac{b-1}{a-1}\right)}=\left(\frac{b-1}{a-1}\right)\times\left(\frac{\bar{b}-1}{\bar{a}-1}\right)=\frac{b\bar{b}-b-\bar{b}+1}{a\bar{a}-a-\bar{a}+1}=\frac{2-(b+\bar{b})}{5-(a+\bar{a})}$ or $a+\bar{a}=2\,\text{Ré}(a)$ et $b+\bar{b}=2\,\text{Ré}(b)$

Ainsi $\frac{b-1}{a-1}$ est un réel.

$\frac{b-1}{a-1}=\frac{z_B-z_I}{z_A-z_I}=\frac{z_{\overrightarrow{IB}}}{z_{\overrightarrow{IA}}}\in IR$ donc $\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{IA}$ sont colinéaires et par suite I, A et B sont alignés.

Autrement : $\overline{\left(\frac{b-1}{a-1}\right)}=\frac{\bar{b}-1}{\bar{a}-1}=\frac{\frac{1}{b}-1}{\bar{a}-1}=\frac{\frac{1-b}{b}}{\bar{a}-1}=(1-b)\times\left(\frac{1}{b\times(\bar{a}-1)}\right)=(1-b)\left(\frac{1-\bar{a}}{a-1}\times\frac{1}{\bar{a}-1}\right)=\frac{b-1}{a-1}$

Ainsi $\frac{b-1}{a-1}$ est un réel.

c) $B\in(C)\cap(AI)$

3) $b=\frac{a-1}{1-\bar{a}}=\frac{(a-1)(1-a)}{|1-a|^2}=-\frac{(1-a)^2}{|1-a|^2}=-\frac{1+a^2-2a}{|1-a|^2}=-\frac{3+2i\sqrt{3}-2\sqrt{3}-2i}{5-2\sqrt{3}}$

D'où $b=\frac{-3+2\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}}+i\frac{-2\sqrt{3}+2}{5-2\sqrt{3}}$ or b d'argument θ et $|b|=1$ donc $b=\cos\theta+i\sin\theta$

D'où $\cos\theta=\frac{-3+2\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}}$ et $\sin\theta=\frac{-2\sqrt{3}+2}{5-2\sqrt{3}}$

Exercice N°11 : **(corrigé)** **(4 POINTS)** **Bac –sciences expérimentales-2012 (session controle)**

1) Faux en effet $\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{5}}\right)^5 = 4\sqrt{2}e^{i\pi} = -4\sqrt{2}$

2) Faux en effet , $z_A = \cos\theta + i\ \sin\theta$; θ étant l'argument de z_A $\sin\theta = \frac{1}{2}$donc $\theta = \frac{\pi}{6}$ ainsi

$$z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

2) Vrai en effet l'affixe du milieu du segment [MN] est $\frac{z_M + z_N}{2} = \frac{-\frac{-5}{4}}{2} = \frac{5}{8}$

Exercice N°12: **(corrigé)** **(4 POINTS)** **Bac –sciences expérimentales-2011 (session controle)**

- ✓ **Aptitudes visées :** Déterminer la forme trigonométrique, exponentielle d'un nombre complexe non nul, interpréter géométriquement l'argument d'un nombre complexe, résoudre une équation du second degré dans l'ensemble des nombres complexes.
- ✓ **Corrigé :**

Répondre par vrai ou Faux en justifiant :

1) Le nombre $\left(\cos\frac{2\pi}{5} + i\ \sin\frac{2\pi}{5}\right)^5$ est un réel : **Vrai**

$$\left(\cos\frac{2\pi}{5} + i\ \sin\frac{2\pi}{5}\right)^5 = \cos 2\pi + i\ \sin 2\pi = 1 \in \mathbb{R}\ .$$

2) Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 - 6z - 7 + i = 0$ sont $1 + 2i$ et $-1 + 3i$. : **Faux**

la somme des racine est $z' + z'' = 1 + 2i + -1 + 3i = \ = 5i \neq\ -\frac{b}{a} = 6$.

3) Soit z et z' deux nombres complexe non nuls.

Si arg(z') $\arg(z') \equiv -\arg(z)[2\pi]$ alors $z' = \overline{z}$: **Faux**

Si on prend $e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z' = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$, on a alors $\arg(z') \equiv -\arg(z)[2\pi]$ mais $z' \neq z$.

4) L'écriture exponentielle du nombre complexe $\left(\sqrt{3} + i\right)^8$ est $2^8 e^{i\frac{4\pi}{3}}$: **Vrai**

$$\left(\sqrt{3} + i\right)^8 = \left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^8 = 2^8 e^{i\frac{4\pi}{3}}.$$

Exercice N°13 : **(corrigé)** **(5 POINTS)** **Bac –sciences expérimentales-2011(session principale)**

- ✓ **Contenu :** Nombres complexes.
- ✓ **Aptitudes visées :** Déterminer la forme exponentielle d'un nombre complexe, représenter un point connaissant son affixe, interpréter géométriquement le module et l'argument d'un nombre complexe, résoudre une équation du second degré dans l'ensemble des nombres complexes.
- ✓ **Corrigé :**

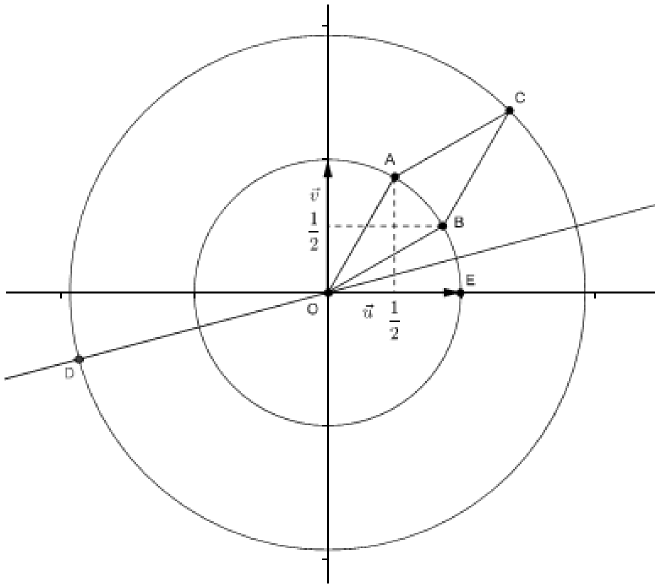
$a = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $b = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

1) a / Forme exponentielle de a et de b :

$a = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $b = e^{i\frac{\pi}{6}}$

b / Vérifions que $b^2 = a$.

On a $b^2 = \left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^2 = e^{i\frac{\pi}{3}} = a$.



2) a/ Plaçons les points A , B et C.

■ On a $|a| = |b| = 1$ donc OA=OB=1

D'où A et B appartiennent au cercle trigonométrique, on construit alors le point du cercle trigonométrique d'abscisse $\frac{1}{2}$ et d'ordonnée positive et le point du cercle trigonométrique d'ordonnée $\frac{1}{2}$ et d'abscisse positive. (On peut aussi utilise les angles $\left(\vec{u},\overrightarrow{OA}\right)$ et $\left(\vec{u},\overrightarrow{OB}\right)$.

■ C est le point d'affixe c = a+b signifie $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ signifie OACB est un

parallélogramme, d'où la construction.

b/ Vérifions que $c = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

$$c = a+b = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+i) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)e^{i\frac{\pi}{4}}$$

3) (E) : $z^2 + z - c = 0$:

a/ Vérifions que b est une solution de (E) :

On a $b^2+b-c = a+b-c = 0$ alors b est une solution de (E).

b / Déterminons la deuxième solution d de (E) :

On a : $b\,d = -c$ (produit des racines)

Signifie $d = -\dfrac{c}{b} = -\dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}e^{-i\frac{11\pi}{12}}$

c/ Plaçons alors D(d) :

■ On a $|d| = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} = OC$ et un arg(d) est $-\dfrac{11\pi}{12}$, donc D est le point du cercle

du centre O et passant par C et tel que une mesure $\left(\vec{u},\overrightarrow{OD}\right)$ est $-\dfrac{11\pi}{6}$.

Exercice N°14: **(corrigé)** **(5 POINTS)** **Bac –sciences expérimentales-2010(session principale)**

- ✓ **Contenu : Nombres complexes**
- ✓ **Aptitudes visées:** Résoudre une équation complexe du second degré, interpréter géométriquement des affixes de points pour : déterminer la nature d'un triangle, décider de la perpendiculaire de deux droites.
- ✓ **Corrigé :**

1°) a°) Il s'agit d'un développement utilisant une identité remarquable :

$(5+2i)^2 = 5^2 + 2.5.(2i) + (2i)^2 = 25 + 20i - 4 = 21 + 20i$.

1°) b°) Il s'agit d'une équation complexe du second degré dont le discriminant est :

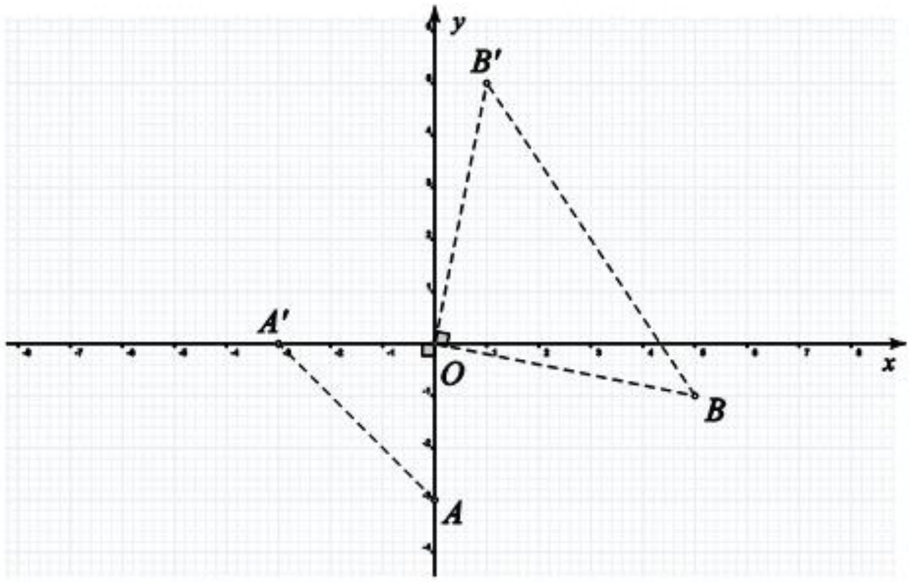
$\Delta = \left[-(5-4i)\right]^2 - 4(-3-15i) = (5-4i)^2 + 12 + 60i = 25 - 40i - 16 + 12 + 60i = 21 + 20i$

En tenant compte du résultat précédemment établi en 1°) a°) , on peut écrire : $\Delta = (5+2i)^2$

Ce qui se traduit encore par : les racines carrées complexes de Δ sont : $\delta_1 = 5 + 2i$ et $\delta_2 = -5 - 2i$

Les solutions de l'équation sont donc : $z_1 = \dfrac{(5-4i)-(5+2i)}{2} = -3i$ et $z_2 = \dfrac{(5-4i)+(5+2i)}{2} = 5 - i$.

2°) a°)



Note : On veillera à dresser un repère $(O,\vec{u},\vec{v})$ orthonormé direct .

2°) b°)

• Triangle OAA' :

Les deux points A et A' appartiennent respectivement aux axes $(O,\vec{v})$ et $(O,\vec{u})$.
Ces axes étant perpendiculaires, le triangle OAA' est donc rectangle en O.

$OA=|-3i|=3$ et $OA'=|-3|=3$ alors le triangle OAA' est isocèle en O.

• Triangle OBB' :

Le rapport $\frac{z_{B'}}{z_B}=\frac{1+5i}{5-i}=....=i$ est imaginaire pur. On en déduit que OBB' est rectangle en O.

$OB=|5-i|=\sqrt{26}$ et $OB'=|1+5i|=\sqrt{26}$ alors OBB' est isocèle de sommet principal O.

Note : Méthode alternative acceptable : Réciproque de Pythagore : $OB'^2=26$, $OB^2=26$, $BB'^2=52$.

3°) a°)

$M\in(AB)$ signifie " $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires " signifie $\overrightarrow{AM}=k.\overrightarrow{AB}$, $k\in\mathbb{R}$

signifie $z_M+3i=k[(5-i)-(-3i)]$, $k\in\mathbb{R}$ signifie $z_M+3i=k[5+2i]$, $k\in\mathbb{R}$

signifie $z_M=5k+(2k-3)i$, $k\in\mathbb{R}$

3°) b°) Le raisonnement est le suivant :

" (OM) et $(A'B')$ sont perpendiculaires" signifie " $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont orthogonaux" signifie

" $\frac{z_M}{(1+5i)-(-3)}$ est imaginaire pur" signifie " $\frac{5k+(2k-3)i}{4+5i}$ est imaginaire pur" signifie

" $(30k-15)-i(17k-12)$ est imaginaire pur" signifie $30k-15=0$ signifie $k=\frac{1}{2}$ signifie $z_M=\frac{5-4i}{2}$

Note : L'absence de connecteurs logiques a été sanctionnée

Par ailleurs, l'affixe du point milieu du segment $[AB]$ est $z_{A*B}=\frac{z_A+z_B}{2}=\frac{-3i+5-i}{2}=\frac{5-4i}{2}$

Pour $z_M=\frac{5-4i}{2}$, on a : $2OM=2\left|\frac{5-4i}{2}\right|=\sqrt{41}$ et $A'B'=|4+5i|=\sqrt{41}=2OM$

Exercice N°15: (corrigé) (3 POINTS) Bac –sciences expérimentales-2010 (session controle)

- **Contenu :** Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe non nul, équation complexe du second degré, forme exponentielle d'un nombre complexe non nul et interprétation géométrique.
- **Aptitudes visées :** reconnaitre une racine $5^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe, vérifier une équation complexe, écrire un nombre complexe sous forme exponentielle, déterminer un lieu géométrique d'un point variable.
- **Corrigé :**

Les choix corrects sont :

1°) Vrai : Si $u^5 = v^5 = 1$ alors $(u.v)^5 = 1$

2°) Vrai : il suffit de faire une vérification.

3°) Faux : Un argument du nombre complexe $z = -5e^{i\frac{\pi}{6}}$ est $\frac{7\pi}{6}$ ou $-\frac{5\pi}{6}$

4°) Vrai : θ décrit seulement l'intervalle $[0,\pi]$ (demi- cercle)

Exercice N°16: (corrigé) *(6 POINTS)* Bac –sciences expérimentales-2009 (session principale)

- **Contenu :** Nombres complexes.
- **Aptitudes visées :** Déterminer la forme exponentielle d'un nombre complexe, représenter un point connaissant son affixe, interpréter géométriquement le module et l'argument d'un nombre complexe.
- **Corrigé :**

1) $B \in \mathscr{C}_{(O,2)}$ signifie $|z_B| = 2$

$(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OB}}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$ équivaut à $\arg(z_B) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

$z_B = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3}$.

2) a- On a : $\begin{cases} \operatorname{Re}(z_C) = -\operatorname{Re}(z_B) \\ \operatorname{Im}(z_C) = \operatorname{Im}(z_B) \end{cases}$ d'où $C = S_{(O,\vec{v})}(B)$ (voir figure).

b- $\operatorname{aff}(\overrightarrow{OA}) = z_A = 2$ et $\operatorname{aff}(\overrightarrow{BC}) = z_C - z_B = 1 + i\sqrt{3} + 1 - i\sqrt{3} = 2$ d'où

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$ par suite OACB est un parallélogramme, de plus $OA = OB = 2$.

Conclusion : OACB est un losange.

Remarque : On peut montrer que OACB est un parallélogramme en vérifiant que ses diagonales [AB] et [OC] ont même milieu.

3) a- $z_O = 0$ alors $z_O^3 = 0 \in \mathbb{R}_+$ d'où $O \in E$.

$z_A = 2$ alors $z_A^3 = 8 \in \mathbb{R}_+$ d'où $A \in E$.

$z_B = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ alors $z_B^3 = 8e^{i2\pi} = 8$ d'où $B \in E$.

En posant $OM = |z| = r$, on aura $z_M = r\,e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ce qui donne $z_M^3 = r^3\, e^{i2\pi} = r^3 \in \mathbb{R}_+^*$ par suite $M \in E$.

- Si $M = O$ alors $M \in E$.

Conclusion : tout point M de la demi-droite $[OB)$ appartient à E.

c- Soit z un nombre complexe non nul, de module r et d'argument θ.

$$z^3 \in \mathbb{R}_+^* \iff z^3 = |z^3| \iff r^3 e^{3i\theta} = r^3 \iff e^{3i\theta} = 1$$

$$\iff 3\theta = 2k\pi \;, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\iff \theta = \frac{2k\pi}{3} \;, k \in \mathbb{Z}.$$

d- • D'après 3)c- si $z \neq 0$ alors $\theta = \dfrac{2k\pi}{3}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

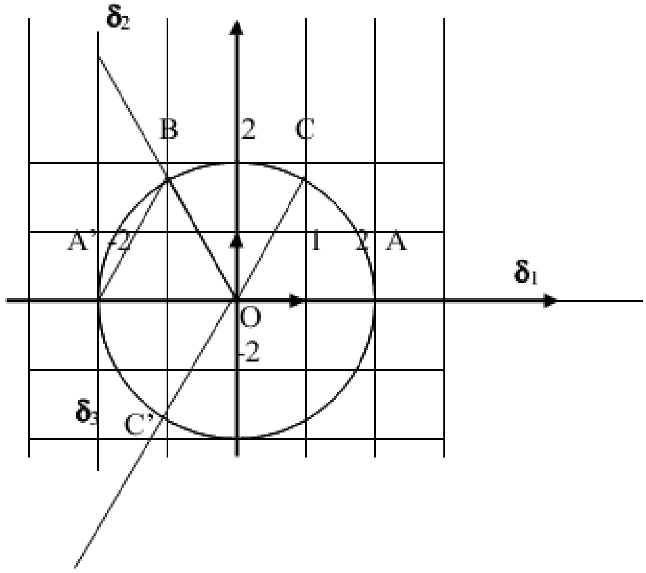
$k = 3k', k' \in \mathbb{Z} \iff (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}}) \equiv 0[2\pi] \iff M \in [OA)-\{O\}$.

$k = 3k'+1, k' \in \mathbb{Z} \iff (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi] \iff M \in [OB)-\{O\}$.

$k = 3k'+2, k' \in \mathbb{Z} \iff (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}}) \equiv \frac{4\pi}{3}[2\pi] \iff M \in [OC')-\{O\}$ tel que $C' = S_O(C)$.

- D'après 3)a- $O \in E$

Conclusion : $E = [OA) \cup [OB) \cup [OC')$



Exercice N17 : **(corrigé)** *(2 POINTS)* Bac –sciences expérimentales-2008 (session principale)

1) (a)

Justification (non demandée) : $1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ alors $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i} = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{12}}$

2) (c)

Justification (non demandée) :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ *alors* $\overrightarrow{CD} = \dfrac{-3}{2}\overrightarrow{AB}$

Exercice N18: **(corrigé)** *(6POINTS)* **Bac –sciences expérimentales-2008 (session contrôle)**

Contenu : Nombres complexes.

Aptitudes visées : Résoudre une équation de degré supérieur ou égal à 2, déterminer la forme exponentielle d'un nombre complexe, représenter un point connaissant son affixe, décider du parallélisme ou de l'orthogonalité de deux droites. .

1) a) $\Delta = 1-4 = -3 = (i\sqrt{3})^2$ alors $z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \overline{z_1}$.

$S_{\mathbb{C}} = \{ \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \ , \ \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \}$

b) $z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$, $z_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

c) Les solutions sont les deux racines carrées de z_1 et celles de z_2

$S_{\mathbb{C}} = \{ e^{i\frac{\pi}{6}} \ , \ e^{i\frac{7\pi}{6}} \ , e^{i\frac{5\pi}{6}} \ , \ e^{-i\frac{\pi}{6}} \}$.

2) On pose $z_0 = e^{i\frac{\pi}{6}}$ *alors* $e^{i\frac{7\pi}{6}} = -z_0$; $e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\overline{z_0}$ *et* $e^{-i\frac{\pi}{6}} = \overline{z_0}$.

$z_0 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

$P(z) = (z - z_0)(z - \overline{z_0})(z + z_0)(z + \overline{z_0})$

$P(z) = (z^2 - (z_0 + \overline{z_0})z + z_0 \cdot \overline{z_0})(z^2 + z(z_0 + \overline{z_0}) + z_0 \cdot \overline{z_0})$

$P(z) = (z^2 - 2\,\mathrm{Re}(z_0)z + |z_0|^2)(z^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_0)z + |z_0|^2)$

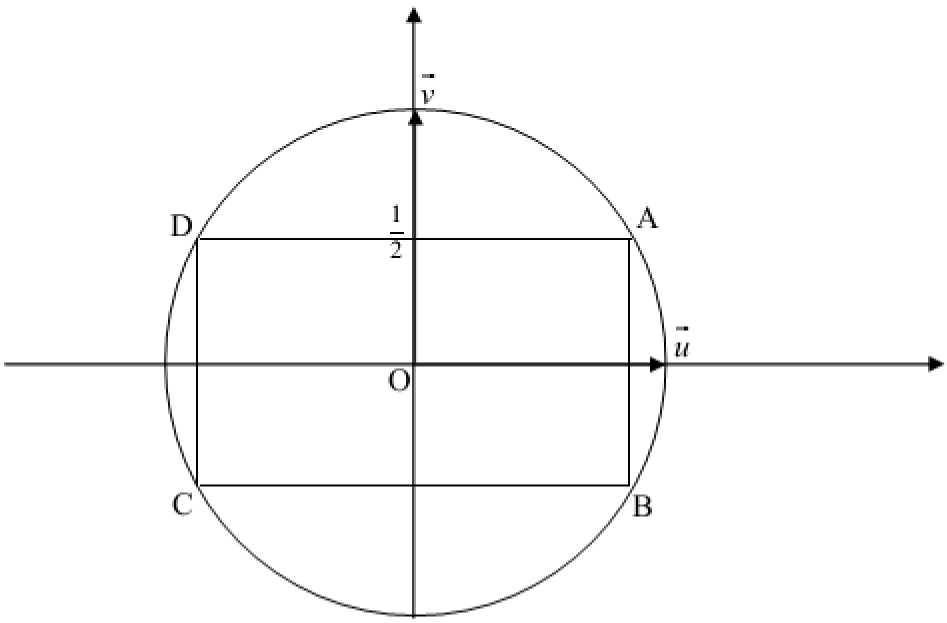
$P(z) = (z^2 - \sqrt{3}z + 1)(z^2 + \sqrt{3}z + 1)$

Autrement:

$P(z) = z^4 + 1 - z^2 = (z^2)^2 + (1)^2 - (z)^2 = (z^2+1)^2 - 2z^2 - (z)^2 = (z^2+1)^2 - 3z^2$

$P(z) = (z^2+1)^2 - (\sqrt{3}z)^2 = (z^2 - \sqrt{3}z + 1)(z + \sqrt{3}z + 1)$

3)
a)



b)

- $z_A + z_C = e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{7\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{6}} - e^{i\frac{\pi}{6}} = 0 \Rightarrow O = A * C$
- $z_B + z_D = e^{i\frac{-\pi}{6}} + e^{i\frac{5\pi}{6}} = 0 \Rightarrow O = B * D$

Le quadrilatère ABCD est alors un parallélogramme.

- $AC = |z_C - z_A| = |z_C + z_C| = 2|z_C| = 2$
- $BD = |z_D - z_B| = |z_D + z_D| = 2|z_D| = 2$

Le parallélogramme ABCD est alors un rectangle.

Remarque : $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}}) \equiv (\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OD}}) - (\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OA}})[2\pi]$

$$(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}}) \equiv \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6}[2\pi]$$

$(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$ Alors ABCD n'est pas un carré.

Exercice N19 : (corrigé) *(4POINTS)* Bac –sciences expér & techniq -2007 (session principale)

I- De quoi s'agit-il?

- Equations complexes.
- Equations trigonométriques.
- Interprétation géométrique des nombres complexes :
  - Alignement de trois points
  - Colinéarité de deux vecteurs

II- Indications et commentaires :

I- $\Delta = -3+4i = (1+2i)^2$ alors $z_1 = \frac{-i\sqrt{3}-(1+2i)}{2} = \frac{-1-i(\sqrt{3}+2)}{2}$, $z_2 = \frac{-i\sqrt{3}+1+2i}{2} = \frac{1+i(2-\sqrt{3})}{2}$

$S_{\mathbb{C}} = \{z_1 \ ; \ z_2\}$

II- 1) a) $(\cos\theta+i)^2 = \cos^2\theta - 1 + 2i\cos\theta = -\sin^2\theta + 2i\cos\theta$

b) $\Delta' = -\sin^2\theta + 2i\cos\theta = (\cos\theta+i)^2$

$z' = -i\sin\theta + \cos\theta + i = \cos\theta + i(1-\sin\theta)$

$z'' = -\cos\theta - i\sin\theta - i = -\cos\theta - i(1+\sin\theta)$

$S_{\mathbb{C}} = \{z' \ ; \ z''\}$

2°a) Les points A ; B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\cos\theta \\ -\sin\theta\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-2\cos\theta \\ -2\end{pmatrix}$

sont colinéaires c'est à dire $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 0$.

$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 0$ équivaut à : $-2\cos\theta - 2\cos\theta\sin\theta = 0$ équivaut à : $-2\cos\theta(1+\sin\theta) = 0$

En remarquant que $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$; on obtient : $\theta = \frac{\pi}{2}$

Autrement : A ; B et C sont alignés si et seulement si $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}}) \equiv 0[\pi]$

$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}}) \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{Z_{\overrightarrow{BC}}}{Z_{\overrightarrow{AB}}}\right) \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow \frac{Z_{\overrightarrow{BC}}}{Z_{\overrightarrow{AB}}} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$(2\sin\theta - 2\cos^2\theta) - 2i\cos\theta(1+\sin\theta) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ (car $\theta \in \left[0 \ ; \ \frac{\pi}{2}\right]$)

b) $OB = OC \Leftrightarrow \cos^2\theta + (1-\sin\theta)^2 = \cos^2\theta + (1+\sin\theta)^2 \Leftrightarrow \sin\theta = 0$

Comme $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ on obtient $\theta = 0$. Le rayon de ce cercle est $OB = \sqrt{2}$