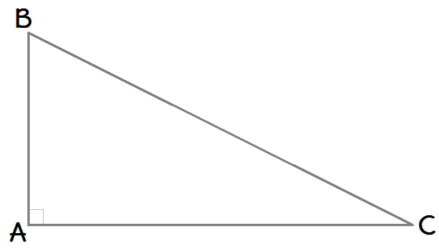
Géométrie - notion : Pythagore, Thalès et trigonométrie

1. Théorème de Pythagore

a) Théorème

Si un triangle est rectangle alors le carré de la longueur de son hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit.



Exemple :

Si ABC est rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$

b) Réciproque

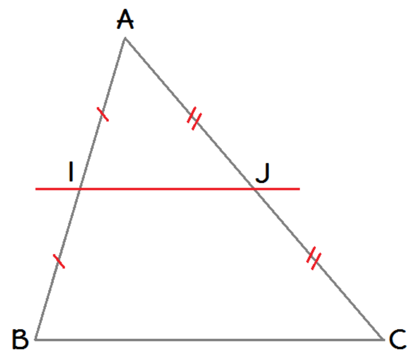
Si dans un triangle, le carré du plus long côté est égale à la somme des carrés des deux autres côtés, alors le triangle est rectangle.

2. Théorème de Thalès

a) Théorème et réciproque des milieux

Théorème :

Dans un triangle, la droite qui passe par les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté.



Exemple :

Soit ABC un triangle, et soient les points I et J ; milieux respectifs des côtés [AB] et de [AC]. Alors (IJ) est parallèle à (BC).

Dans un triangle, le segment qui joint les milieux de deux côtés a pour longueur la moitié de la longueur du troisième côté.

Exemple :

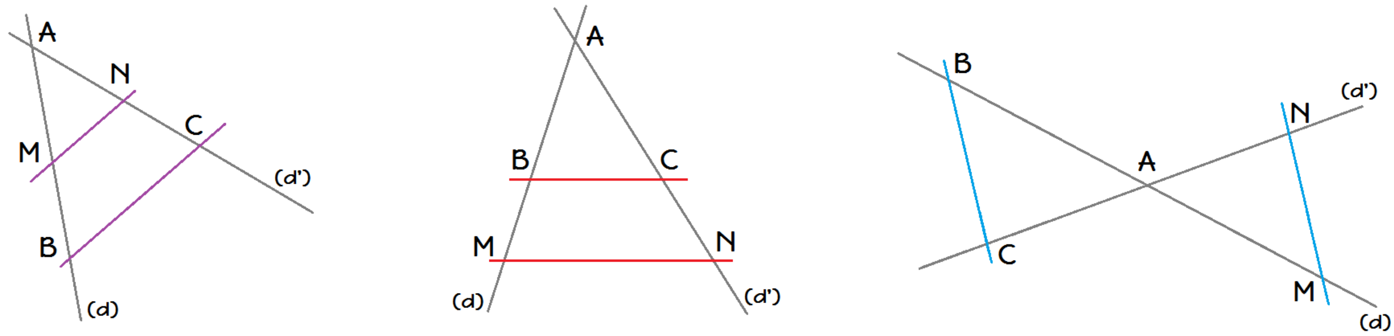
Soit ABC un triangle, et soient les points I et J ; milieux respectifs des côtés [AB] et de [AC]. Alors $IJ = \frac{BC}{2}$

Réciproque :

Dans un triangle, la droite parallèle à un côté qui passe par le milieu d'un deuxième côté coupe le troisième côté en son milieu.

b) Théorème et réciproque de Thalès

Théorème :



Soient deux droites (d) et (d') sécantes en A.

Soient B et M deux point de (d) distincts de A ; et C et N deux points de (d') distincts de A.

Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles de A alors :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

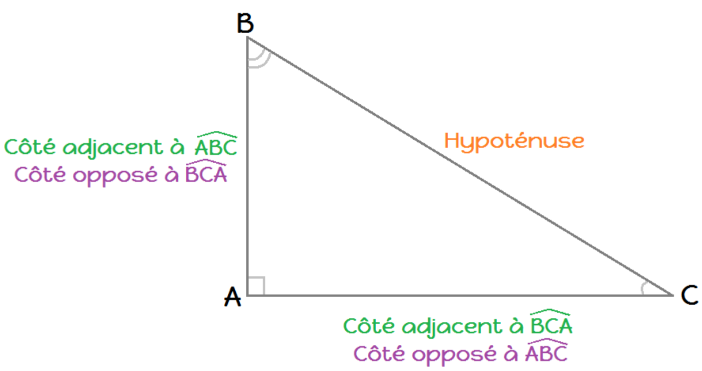
Réciproque :

Soient (d) et (d') deux droites sécantes en A.

Soient B et M deux points de (d), distincts de A. Soient C et N deux points de (d'), distincts de A. Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ et si les points A, B et M ; et les points A, C et N sont dans le même ordre, alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

3. Trigonométrie

a) Définitions



$$\cos \widehat{BCA} = \frac{\text{Côté adjacent à } \widehat{BCA}}{\text{Hypoténuse}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\sin \widehat{BCA} = \frac{\text{Côté opposé à } \widehat{BCA}}{\text{Hypoténuse}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan \widehat{BCA} = \frac{\text{Côté opposé à } \widehat{BCA}}{\text{Côté adjacent à } \widehat{BCA}} = \frac{AB}{AC}$$

b) Propriétés :

Remarques :

Le cosinus et le sinus d'un angle sont toujours compris entre 0 et 1.

La tangente d'un angle aigu est un nombre strictement positif.

Valeurs particulières des sinus, cosinus et tangentes :

Angle	0	30°	45°	60°	90°
Cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Ind.

Autres formules trigonométriques :

Pour tout angle aigu de mesure x (en degré), on peut écrire les égalités suivantes :

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Et $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

Astuce mnémotechnique :

SOHCAHTOA

SOH

$\sin = \dfrac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}}$

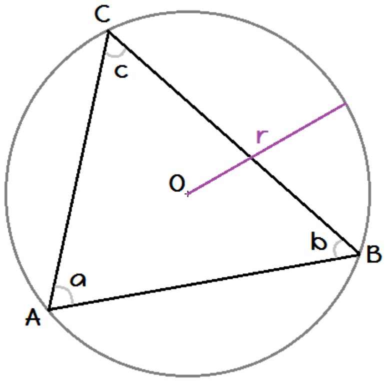
CAH

$\cos = \dfrac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$

TOA

$\tan = \dfrac{\text{opposé}}{\text{adjacent}}$

Théorème du sinus :



$$\frac{BC}{\sin a} = \frac{AC}{\sin b} = \frac{AB}{\sin c} = 2r$$