Suites adjacentes

Exercice 1 [02271] [Correction]
Soient $\theta \in]0, \pi/2[$ et

$$u_n = 2^n \sin \frac{\theta}{2^n},\ v_n = 2^n \tan \frac{\theta}{2^n}$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Quelle est leur limite commune ?

Exercice 2 [00325] [Correction]
On pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \text{ et } v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
En déduire un équivalent de

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Exercice 3 [02272] [Correction]
Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \text{ et } S'_n = S_n + \frac{1}{n}$$

Montrer que les suites (S_n) et (S'_n) sont adjacentes.
On peut montrer que leur limite commune est $\pi^2/6$, mais c'est une autre histoire...

Exercice 4 [02273] [Correction]
[Critère spécial des séries alternées ou critère de Leibniz]
Soit (u_n) une suite de réels décroissante et de limite nulle.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$$

Montrer que les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes et en déduire que (S_n) converge.

Exercice 5 [02274] [Correction]
[Irrationalité du nombre de Néper]
Soient

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n.n!} = a_n + \frac{1}{n.n!}$$

a) Montrer que (a_n) et (b_n) sont strictement monotones et adjacentes.
On admet que leur limite commune est e. On désire montrer que $\mathrm{e} \notin \mathbb{Q}$ et pour cela on raisonne par l'absurde en supposant $\mathrm{e} = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^\star$.
b) Montrer que $a_q < \mathrm{e} < b_q$ puis obtenir une absurdité.

Exercice 6 [02275] [Correction]
[Moyenne arithmético-géométrique]
a) Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^{+2}$, établir :

$$2\sqrt{ab} \leqslant a + b$$

b) On considère les suites de réels positifs (u_n) et (v_n) définies par

$$u_0 = a, v_0 = b \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \leqslant v_n$, $u_n \leqslant u_{n+1}$ et $v_{n+1} \leqslant v_n$.
c) Etablir que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite.
Cette limite commune est appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b et est notée $M(a, b)$.
d) Calculer $M(a, a)$ et $M(a, 0)$ pour $a \in \mathbb{R}^+$.
e) Exprimer $M(\lambda a, \lambda b)$ en fonction de $M(a, b)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Exercice 7 [00324] [Correction]
[Irrationalité de e]
On pose pour $n \geqslant 1$,

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$$

a) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
b) En exploitant l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$, montrer que $u_n \to \mathrm{e}$.
c) On suppose que $\mathrm{e} = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N}^\star$. En considérant $q.q!u_q$ et $q.q!v_q$ obtenir une absurdité.