

CHAPITRE II

RAPPELS DE MECANIQUE DU VOL

1 PRESENTATION

1-1 Introduction

1-2 Hypothèses d'étude

2 EQUATIONS GENERALES DE LA MECANIQUE DU VOL

Il s'agit dans ce paragraphe de préciser les notations et les hypothèses nécessaires à l'écriture des équations de la mécanique du vol, puis d'écrire les équations générales.

2-1 Trièdres de référence

2-2 Conventions de signe - Notations

2-3 Définition et choix des variables

2-4 Forces et moments agissant sur l'avion

3 DETERMINATION DU MODELE LONGITUDINAL

3-1 Equations de la mécanique

3-2 Mouvement longitudinal

3-3 Linéarisation des équations

3-4 Modèle longitudinal avion

4 EFFETS DES COMMANDES - MODES PROPRES

Le modèle longitudinal que nous venons d'établir peut être utilisé de trois manières différentes:

- soit pour l'étude de l'effet initial des commandes,
- soit pour l'étude de l'effet final des commandes,
- soit pour l'étude des mouvements transitoires.

4-1 Effet initial des commandes

4-2 Effet final des commandes

4-3 Effets transitoires

4-4 Etude du modèle complet

1-1 Introduction :

Pour réaliser l'étude d'un asservissement sur un système, il est nécessaire de disposer d'un modèle afin de valider les solutions retenues. Installer un dispositif automatique à bord d'un avion, pour en améliorer les performances ou pour réaliser des fonctions automatiques, ne peut donc se faire que si l'on possède un modèle suffisamment représentatif des mouvements de l'avion.

Modéliser un système aussi complexe qu'un avion dans le but de lui associer des asservissements sortirait du cadre de cet enseignement, tant pour des raisons de connaissances acquises en automatique que pour des raisons de temps. Ce cours se fixe donc, a priori, des limites d'étude qui sont principalement:

- l'utilisation des techniques de l'automatique linéaire,
- l'application au mouvement longitudinal des avions.

La mécanique du vol est donc à la base de ce cours, et bien que ce chapitre n'ait pas la prétention de remplacer le cours de mécanique du vol, il doit permettre d'établir et de rappeler les modèles mathématiques des mouvements de l'avion respectant le cadre de cet enseignement. Pour faciliter la compréhension et alléger les écritures, la majorité des calculs intermédiaires est reportée en annexe.

Il est très important de noter que le modèle qui va être établi dans ce chapitre devra être le plus "réaliste" possible, mais, par les hypothèses et les simplifications d'étude que l'on fait, il faut garder présent à l'esprit qu'il sera une "approximation idéalisée" d'un système réel bien plus complexe. La représentation de l'avion obtenue aura donc des limites qu'il faudra a priori ou a posteriori savoir ne pas dépasser.

1-2 Hypothèses d'étude :

Ces hypothèses concernent l'avion et le milieu. Elles ont pour but de simplifier les études ultérieures en négligeant systématiquement certains phénomènes de faible importance.

a - Hypothèses concernant l'avion :

① l'avion est rigide.

, les commandes de vol sont irréversibles.

En conséquence, les écoulements sur les surfaces:

- ne déforment pas la structure,
- ne modifient ni les forces, ni les moments aérodynamiques,
- ne modifient pas la position des gouvernes.

f l'avion est symétrique par rapport au plan passant par le centre de gravité (noté G) et contenant l'axe vertical et l'axe longitudinal.

„ la masse de l'avion est constante.

... la position du centre de gravité est invariante.

† la matrice d'inertie Π_G est constante.

En conséquence:

$$\Pi_G = \begin{bmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{bmatrix} \left(\begin{array}{l} \text{les termes nuls proviennent} \\ \text{de la symétrie de l' avion} \end{array} \right)$$

Les axes "avion" G_x , G_y et G_z sont souvent confondus avec les axes principaux d'inertie. Ceci est toujours vrai pour l'axe G_y et de mieux en mieux vérifié pour les axes G_x et G_z sur les avions modernes. On a alors:

$$\Pi_G = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$$

b - Hypothèses concernant l'atmosphère :

- Elle est immobile ou en "translation uniforme par rapport à la terre".

- C'est un gaz parfait $\Rightarrow \frac{P}{\rho} = r T$

visqueux, compressible, et pesant $\Rightarrow dp = -\rho g dZ$

- La température T_s et la pression P ne dépendent que de l'altitude Z .

c - Hypothèses concernant la terre :

- Les évolutions se font à proximité de la terre.

- On pourra considérer que la terre est plate et immobile.

- g est constant avec l'altitude, la latitude et la longitude: $g = 9.81 \text{ m/s}^2$.

On ne tiendra donc pas compte des accélérations d'entraînement et de Coriolis. Ces hypothèses sont à éviter dans le cas d'avions à très hautes performances et effectuant de longs vols (Concorde, SR 71,.....).

2-1 Trièdres de référence :

Trois trièdres de référence sont utilisés en mécanique du vol. Le centre de gravité de l'avion est noté G; c'est l'origine des trièdres.

a - Trièdre lié à la terre :

G $X_0 Y_0 Z_0$ $\vec{X}_0 \vec{Y}_0$ dans le plan horizontal .

\vec{Z}_0 verticale descendante.

C'est un repère galiléen (compte tenu des hypothèses précédentes).

b - Trièdre lié à l'avion :

G $x y z$ \vec{x} axe longitudinal avion (dirigé vers l'avant).

\vec{y} axe dirigé vers la droite de l'avion.

\vec{z} axe dirigé vers le "ventre" de l'avion .

c - Trièdre aérodynamique :

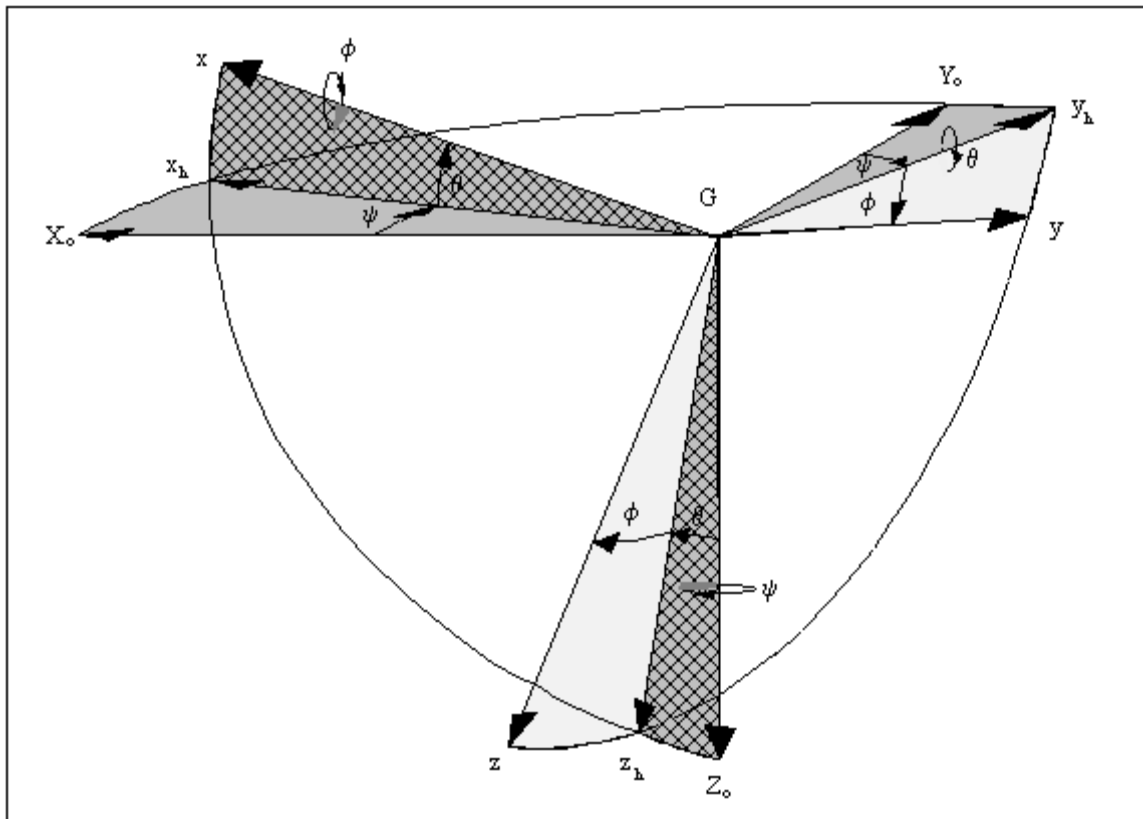
G $x_a y_a z_a$ \vec{x}_a dirigé suivant le vecteur vitesse air .

\vec{z}_a dans le plan de symétrie de l'avion, orienté vers le "ventre" .

\vec{y}_a complète le trièdre pour qu'il soit trirectangle direct .

d - Position des trièdres - Définition des angles :

① Trièdre avion / trièdre terrestre:



\vec{x}_h et \vec{y}_h sont dans le plan horizontal \vec{X}_0 \vec{Y}_0 .

L'ordre des rotations est: ① autour de GZ_0 (angle ψ).

, autour de Gy_h (angle θ).

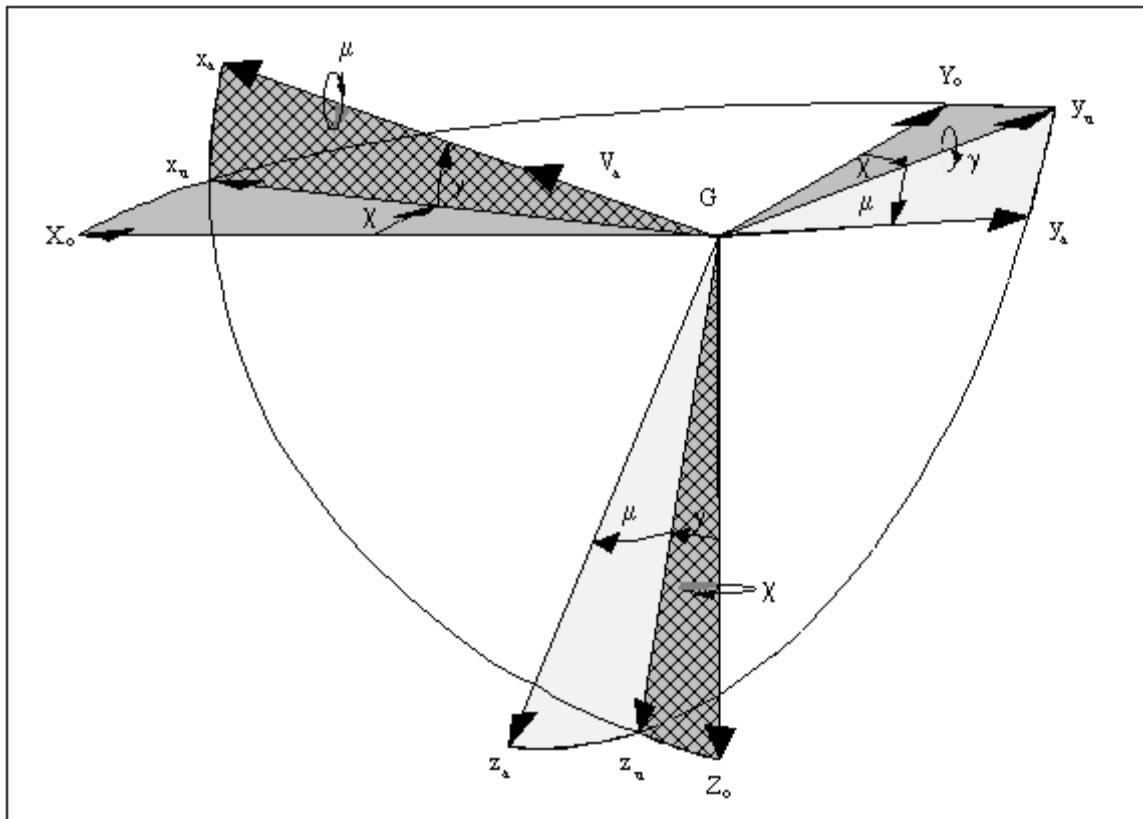
ϕ autour de Gx (angle ϕ).

ψ est l'azimut ou cap de l'avion,

θ l'assiette longitudinale,

ϕ l'angle de gîte.

, Trièdre aérodynamique / trièdre terrestre:



L'ordre des rotations est: ① autour de GZ_0 (angle χ).

, autour de Gy_u (angle γ).

f autour de Gx_a (angle μ).

\vec{x}_a porté par la vitesse air

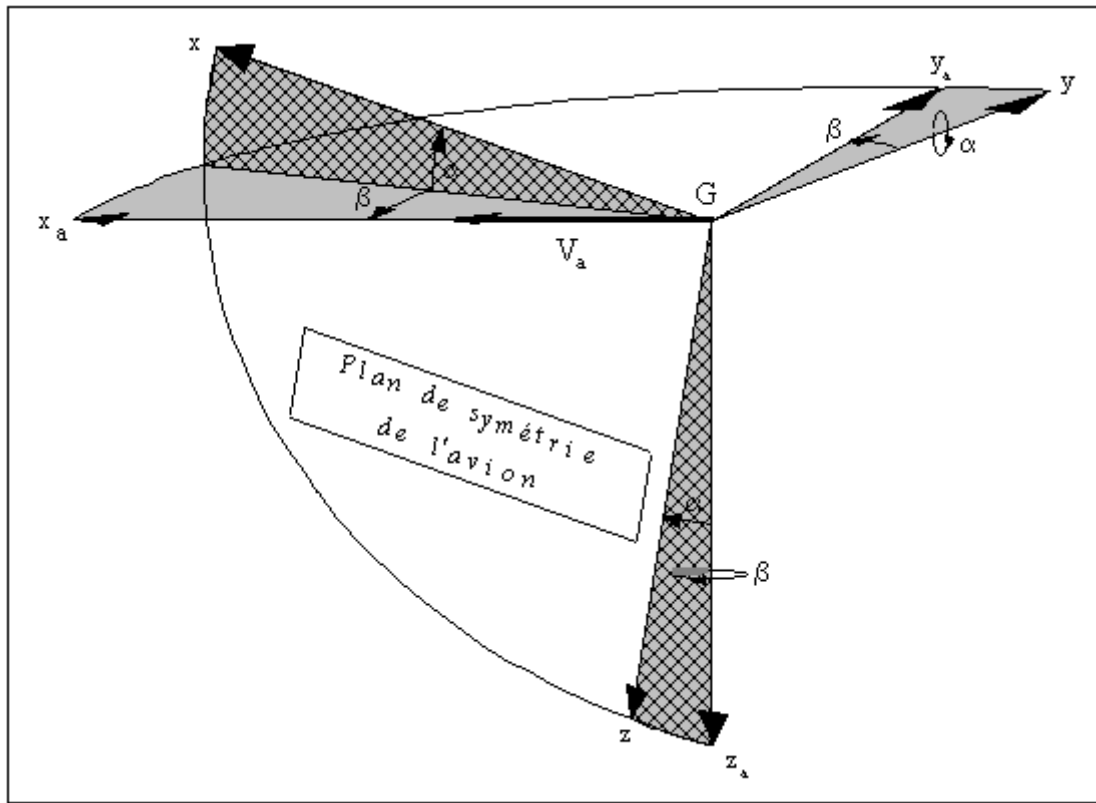
\vec{x}_u projection de \vec{x}_a sur le plan $\vec{X}_0 \vec{Y}_0$

\vec{z}_a dans le plan de symétrie de l'avion.

χ est l'azimut aérodynamique

γ la pente aérodynamique.

f Trièdre aérodynamique / trièdre avion:



L'ordre des rotations est: ① autour de Gz_a (angle β).

, autour de Gy (angle α).

α est l'incidence,

β le dérapage.

2-2 Conventions de signe - Notations :

a - Angles :

α l'incidence: angle entre l'axe longitudinal avion et le plan $\vec{x}_a \vec{y}_a$

$\alpha > 0$ si \vec{x} au-dessus du plan $\vec{x}_a \vec{y}_a$.

β le dérapage: angle entre la projection de \vec{x} sur le plan $\vec{x}_a \vec{y}_a$ et \vec{x}_a

$\beta > 0$ si "l'air arrive sur le coté droit de l'avion".

b - Commandes :

Les conventions de signe, issues de la mécanique du vol, sont dictées par le critère suivant:

Un braquage positif d'une commande entraîne un moment négatif.

(donc une vitesse angulaire correspondante négative)

δ_l braquage de la gouverne de gauchissement:

$\delta_l > 0$, l'avion s'incline à gauche (manche à gauche)

δ_m braquage de la commande de profondeur:

$\delta_m > 0$, l'avion pique du nez (manche vers l'avant)

δ_n braquage de la commande de direction:

$\delta_n > 0$, le nez de l'avion part vers la gauche (palonnier gauche)

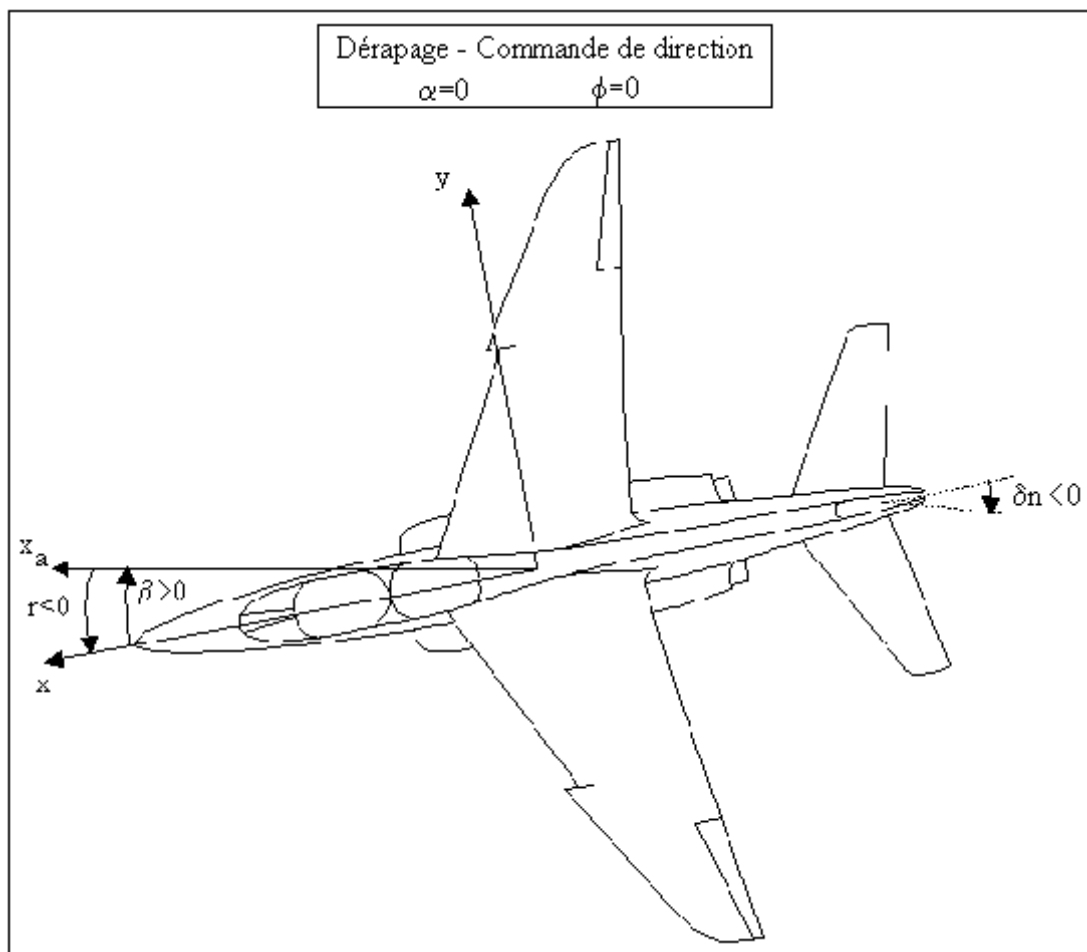
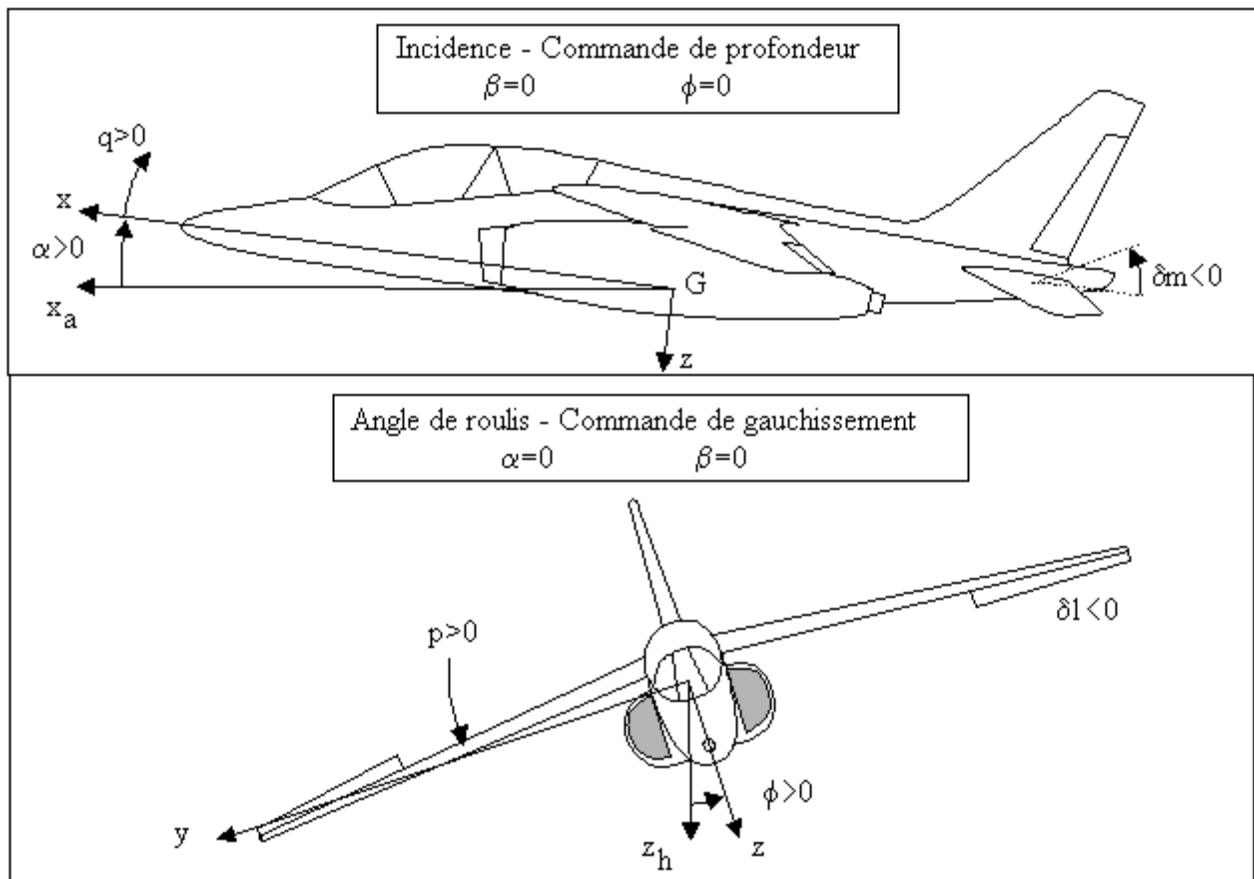
c - Vitesses angulaires (dans le repère avion):

① Vitesse de roulis p: $p > 0$ si portée par G_x

, Vitesse de tangage q: $q > 0$ si portée par G_y

f Vitesse de lacet r: $r > 0$ si portée par G_z

d - Schémas récapitulatifs :



2-3 Définition et choix des variables :

L'étude d'un système peut être menée si l'on a défini complètement sa position dans l'espace, et ses vitesses d'évolution. Il faut donc, pour l'avion, définir les 6 variables "statiques" (coordonnées et positions angulaires) et les 6 variables "dynamiques" (vitesses linéaires et angulaires).

a - Coordonnées :

Positionnement du centre de gravité de l'avion par rapport à la terre.

Ces coordonnées sont notées: X_G, Y_G, Z_G .

b - Positions angulaires :

Angles reliant le repère avion au repère terrestre (angles d'Euler).

Ces angles sont notés: ψ, θ, ϕ .

c - Vitesse linéaire :

Vitesse de l'avion par rapport à la masse d'air environnante.

Le vecteur vitesse est noté \vec{V} . Ses composantes sont notées:

$$\vec{V} \begin{cases} u \\ v \\ w \end{cases} \text{ dans le repère avion}$$

$$\vec{V} \begin{cases} V \\ 0 \\ 0 \end{cases} \text{ dans le repère aérodynamique}$$

d - Vitesse angulaire :

Vecteur vitesse instantanée de rotation de l'avion par rapport aux axes fixes X_0, Y_0, Z_0 .

Il est noté $\vec{\Omega}$. Ses composantes sont notées:

$$\vec{\Omega} \begin{cases} p \\ q \\ r \end{cases} \text{ dans le repère avion}$$

$$\vec{\Omega} \begin{cases} p_a \\ q_a \\ r_a \end{cases} \text{ dans le repère aérodynamique}$$

Le système est entièrement défini par ces douze variables. Il faut alors trouver douze équations si l'on veut obtenir le modèle complet de l'avion afin de caractériser le comportement de ses évolutions.

2-4 Forces et moments agissant sur l'avion :

Il y a trois types de forces agissant sur l'avion:

- les forces aérodynamiques
- les forces de propulsion
- les forces de masse

Toutes ces forces sont caractérisées par une résultante et un moment par rapport au centre de gravité de l'avion.

a - Forces aérodynamiques :

$$\begin{array}{cc}
 \begin{array}{c} \text{Résultante} \\ \vec{R}_a \begin{bmatrix} R_{xa} \\ R_{ya} \\ R_{za} \end{bmatrix} \end{array} & \begin{array}{c} \text{Moment} \\ \vec{M}_a \begin{bmatrix} L_a \\ M_a \\ N_a \end{bmatrix} \end{array} \\
 \text{dans le repère avion} & \text{dans le repère aérodynamique}
 \end{array}$$

b - Forces de propulsion :

$$\begin{array}{cc}
 \begin{array}{c} \text{Résultante} \\ \vec{R}_F \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \end{array} & \begin{array}{c} \text{Moment} \\ \vec{M}_F \begin{bmatrix} L_F \\ M_F \\ N_F \end{bmatrix} \end{array} \\
 \text{dans le repère avion} & \text{dans le repère aérodynamique}
 \end{array}$$

c - Force de pesanteur :

Le poids est la seule force de masse considérée. Elle est verticale, dirigée vers le bas et son moment en G est nul.

Dans le repère avion, ses composantes sont:

$$m \vec{g} \begin{bmatrix} -mg \sin \theta \\ mg \cos \theta \sin \phi \\ mg \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix}$$

3-1 Equations de la mécanique :

Les équations qui régissent le système sont celles de la mécanique classique.

a - Théorème de la quantité de mouvement :

$$\frac{d(m\vec{V})}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \frac{d(\vec{V})}{dt} = m \vec{\Gamma} \quad (m \text{ est constant}).$$

b - Théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \sum \vec{M}_{\text{ext}/G} \quad \text{Moment cinétique de l'avion} \quad \vec{H} = \Pi_G \vec{\Omega}$$

c - Dérivation d'un vecteur dans un repère mobile :

$$\left(\frac{d\vec{u}}{dt} \right)_{X_0 Y_0 Z_0} = \left(\frac{d\vec{u}}{dt} \right)_{xyz} + \underbrace{\vec{\Omega}_{(xyz / X_0 Y_0 Z_0)}}_{\text{Vecteur rotation de } xyz \text{ par rapport à } X_0 Y_0 Z_0} \wedge \vec{u}$$

Les équations de force (au nombre de 3), de moment (3), cinématiques (3) et de trajectoire (3) permettent alors d'obtenir un système de 12 équations à 12 inconnues. Cependant, ce cours se limitant au "modèle longitudinal avion", les équations générales du système complet sont reportées en annexe 2.

3-2 Mouvement longitudinal :

L'étude du mouvement des avions montre qu'il existe un mouvement longitudinal pur (cf annexe 3) caractérisé par:

- Les plans G_{xz} et G_{xaza} sont confondus,
- Les ailes sont horizontales $\phi = 0$,
- Le dérapage est nul $\beta = 0$,
- Les propulseurs ont une configuration symétrique, et les termes gyroscopiques dûs aux parties tournantes sont négligeables,
- Le plan G_{xz} glisse sur lui même, le mouvement de G est plan dans le plan vertical ($v=0$).

Dans ces conditions, l'équilibre et le mouvement s'étudient à l'aide de 5 équations:

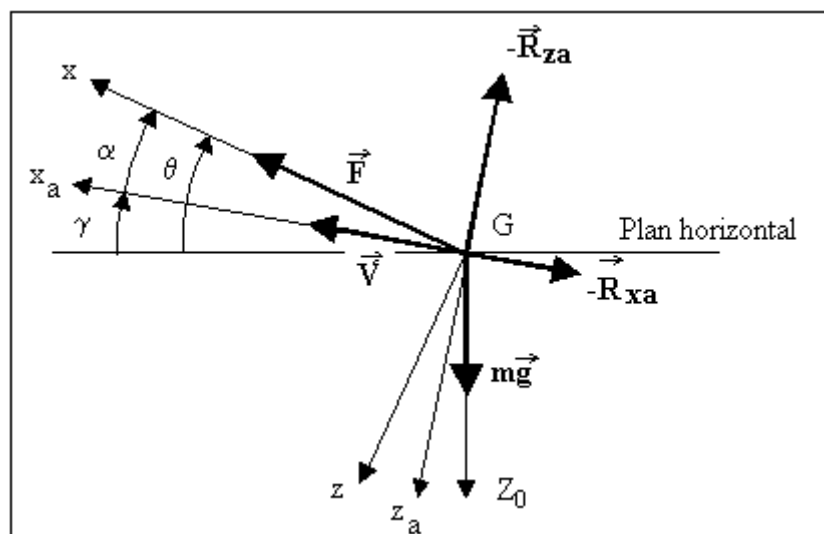
- Equilibre des forces autour de G_x , G_z , (ou G_{xa} , G_{za}) [2 équations]
- Equilibre des moments autour de G_y (ou G_{ya}) [1 équation]
- Equations cinématiques: [2 équations]

Nous considérerons de plus que:

- l'axe transversal avion est confondu avec l'axe principal d'inertie, donc $\underline{E} = \underline{0}$ dans la matrice d'inertie,
- la poussée du ou des moteurs est portée par l'axe longitudinal avion et passe par G centre de gravité.

Enfin, pour faire cette étude, on se placera dans le repère aérodynamique car la représentation des actions aérodynamiques y est plus simple.

a - Equations du mouvement longitudinal dans le repère aérodynamique :

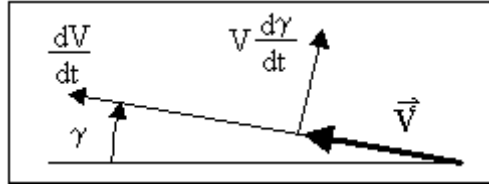


Equations de la mécanique classique:

$$\vec{R}_a + \vec{F} + m \vec{g} = m \frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \frac{d(\Pi_G \vec{\Omega})}{dt} = \frac{d(Bq\vec{y}_a)}{dt} = \vec{M}_a$$

Rappels: - dérivation de \vec{V}



- forces et moment aérodynamiques (S surface de référence, corde de référence)

$$\left. \begin{aligned} \vec{R}_m &= R_m \vec{x}_a = -\frac{1}{2} \rho S V^2 C_{xa} \vec{x}_a \\ \vec{R}_z &= R_z \vec{z}_a = -\frac{1}{2} \rho S V^2 C_{za} \vec{z}_a \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} R_m \text{ et } R_z \text{ sont les grandeurs algébriques} \\ \text{des forces de traînée et de portance} \end{array}$$

$$\vec{M}_a = M_a \vec{y}_a = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_m$$

- équation de la polaire

$$C_{xa} = C_{x0} + k C_{za}^2 \quad (C_{x0} \text{ coefficient de traînée à portance nulle})$$

- relation des angles

$$\theta = \alpha + \gamma$$

En effectuant les dérivations dans le repère aérodynamique (repère mobile), il vient après projection sur G_{xa} , G_{ya} , G_{za} :

Force sur G_{xa} - Equation de propulsion	$m \frac{dV}{dt} = F \cos \alpha + R_m - mg \sin \gamma$	(P)
Force sur G_{za} - Equation de sustentation	$-mV \frac{d\gamma}{dt} = -F \sin \alpha + R_z + mg \cos \gamma$	(S)
Moment autour de G_{ya} - Equation de moment	$B \frac{dq}{dt} = M_a$	(M)
Equations cinématiques	$\frac{d\theta}{dt} = q$ $\frac{dZ}{dt} = V \sin \gamma$	(C _θ) (C _Z)

Les équations s'écrivent donc:

$$\left(\begin{array}{l} \text{(P)} \\ \text{(S)} \end{array} \right) \begin{array}{l} m \frac{dV}{dt} = F \cos \alpha - \frac{1}{2} \rho S V^2 C_{xa} - mg \sin \gamma \\ mV \frac{d\gamma}{dt} = F \sin \alpha + \frac{1}{2} \rho S V^2 C_{za} - mg \cos \gamma \end{array}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{M} \quad B \quad \frac{dq}{dt} &= \frac{1}{2} \rho S V^2 C_m \\ \textcircled{C_\theta} \quad \frac{d\theta}{dt} &= q = \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\gamma}{dt} \\ \textcircled{C_z} \quad \frac{dZ}{dt} &= V \sin \gamma \end{aligned}$$

b - Paramètres de vol équilibré :

Un point de vol équilibré est un point de vol pour lequel:

- La portance équilibre le poids,
- La poussée équilibre la traînée.

Toutes les dérivées apparaissant dans les équations sont donc nulles, et si l'on note avec un indice e les paramètres en ce point de vol, on obtient les relations suivantes:

$$\textcircled{P} \quad F_e \cos \alpha_e - \frac{1}{2} \rho_e S V_e^2 C_{x_{a_e}} - mg \sin \gamma_e = 0$$

$$\textcircled{S} \quad F_e \sin \alpha_e + \frac{1}{2} \rho_e S V_e^2 C_{z_{a_e}} - mg \cos \gamma_e = 0$$

$$\textcircled{M} \quad \frac{1}{2} \rho_e S V_e^2 C_{m_e} = 0 \Rightarrow C_{m_e} = 0$$

$$\textcircled{C_\theta} \quad \frac{d\theta_e}{dt} = q_e = 0$$

$$\textcircled{C_z} \quad V_e \sin \gamma_e = 0 \Rightarrow \gamma_e = 0$$

Remarque:

$\gamma_e = 0$ est donc une des caractéristiques du point de vol équilibré. En fait, le point de vol équilibré "normal" est le vol en palier (donc à pente nulle). Cependant, on peut mener l'étude pour un vol à pente constante non nulle dit pseudo-équilibré. Dans ce cas, le braquage d'équilibre de la gouverne de profondeur varie au cours du vol. C'est pourquoi, dans la détermination du modèle qui suit, on conservera dans un premier temps le terme γ_e dans les différentes expressions.

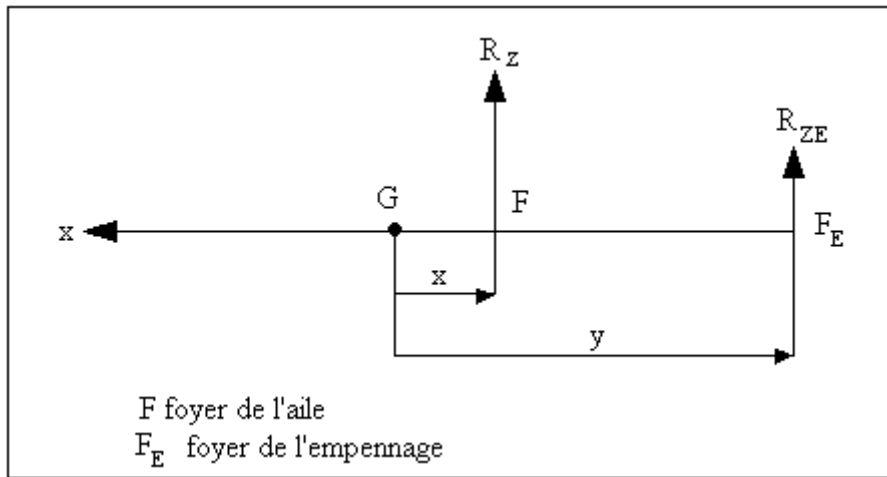
Braquage d'équilibre δm_e :

On montre que:

$$\delta m_e = \delta m_0^* - \frac{C_{z_e}}{C_{z_{\delta m}}} \frac{x}{x - y} \quad (C_{z_{\delta m}} = \frac{\partial C_z}{\partial (\delta m)})$$

avec δm_0^* braquage d'équilibre à portance nulle ($C_z = 0$)

$$\delta m_0^* = - \frac{C_{m_0}}{C_{z_{\delta m}}} \frac{y - x}{y - x}$$



Remarque: Il faut noter que dans le repère avion, x et y sont négatifs

Incidence d'équilibre α_e

$$\alpha_e = \alpha_0^{**} + \frac{C_{z_e}}{C_{z_\alpha}} - \frac{C_{z_{\delta m}}}{C_{z_\alpha}} \delta m_e \quad (C_{z_\alpha} = \frac{\partial C_z}{\partial \alpha})$$

avec α_0^{**} incidence de portance nulle à braquage nul .

Les calculs des paramètres de vol équilibré se font de façon itérative, à partir d'un point de vol arbitraire qui semble raisonnable. Ils conduisent rapidement à la solution.

3-3 Linéarisation des équations :

Afin de pouvoir étudier plus facilement les caractéristiques du modèle longitudinal de l'avion, il faut travailler sur un modèle mathématique simple. La linéarisation des équations du mouvement autour d'un point de vol équilibré en régime permanent (le palier stabilisé en général) permet de l'obtenir.

a - Principe de linéarisation :

Chaque équation du modèle peut s'écrire sous la forme:

$$f(V, \alpha, \gamma, q, \delta m, \delta \tau) = 0$$

δm braquage de la gouverne de profondeur

$\delta \tau$ commande des propulseurs

Cette relation est vraie en chaque point de vol, et pour chacune des équations, on effectue un développement en série de Taylor que l'on arrête au premier ordre:

$$f(V, \alpha, \dots) = f(V_e, \alpha_e, \dots) + \left(\frac{\partial f}{\partial V} \right)_e + \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \right)_e + \dots = 0$$

$$\text{avec } V = V_e + \delta V, \alpha = \alpha_e + \delta \alpha, \dots$$

$$\text{or } f(V_e, \alpha_e, \dots) = 0 \text{ donc } \left(\frac{\partial f}{\partial V} \right)_e + \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \right)_e + \dots = 0$$

Ce qui revient à écrire que la différentielle totale de f est nulle. La notation $\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_e$ signifie qu'après calcul de la dérivée partielle de f par rapport à x , on donne à tous les paramètres leur valeur d'équilibre.

Le domaine de validité des équations linéarisées est relativement restreint; on considérera donc que, dans ce domaine, l'atmosphère est isotrope, c'est à dire que:

$$\rho(Z) = \rho_e = \text{cste} \quad \text{et} \quad T(Z) = \text{cste}$$

Pour soulager les écritures, on notera enfin: $\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_e = f_{x_e}$

b - Linéarisation des coefficients aérodynamiques :

Coefficient de portance:

Le coefficient de portance peut se linéariser de la façon suivante (on suppose C_z indépendant de $\dot{\alpha}$ et q):

$$C_z = C_{z_0} + C_{z_\alpha} \alpha + C_{z_{\delta m}} \delta m + C_{z_{\delta \tau}} \delta \tau$$

soit

$$C_z = C_{z_\alpha} (\alpha - \alpha_0^{**}) + C_{z_{\delta m}} \delta m + C_{z_{\delta \tau}} \delta \tau$$

$$\text{avec } C_{z_0} = -C_{z_\alpha} \alpha_0^{**}$$

Coefficient de traînée:

Le coefficient de traînée peut se linéariser de la façon suivante (on suppose C_x indépendant de $\dot{\alpha}$ et q):

$$C_x = C_{x_0} + C_{x_\alpha} \alpha + C_{x_{\delta m}} \delta m + C_{x_{\delta \tau}} \delta \tau$$

or $C_x = C_{x_0} + k C_z^2$

d'où $\frac{\partial C_x}{\partial \alpha} = C_{x_\alpha} = 2k C_{z_\alpha} C_{z_e}$

Coefficient de moment de tangage:

$$C_m = C_{m_0} + C_{m_\alpha} \alpha + C_{m_{\delta m}} \delta m + C_{m_{\delta \tau}} \delta \tau + C_{m_q} \frac{q}{V}$$

avec $C_{m_\alpha} = \frac{x}{V_e} C_{z_\alpha}$

$$C_{m_{\delta m}} = \frac{\partial C_m}{\partial (\delta m)} = \frac{y}{V_e} C_{z_{\delta m}}$$

c - Linéarisation de la poussée :

En supposant que la poussée F ne dépend que de la position de la manette des gaz ($\delta\tau$) et de la vitesse (donc indépendante de α , α_e et q), on obtient la relation:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial V} dV + \frac{\partial F}{\partial (\delta\tau)} \delta\tau = F_V V + F_{\delta\tau} \delta\tau$$

d - Linéarisation des équations du modèle :

La linéarisation des équations demande un développement mathématique long et fastidieux. Les calculs ont donc été repoussés en annexe 4. Cependant, il convient de s'y reporter pour comprendre le changement de notation qui permet de soulager les écritures. Dans les équations linéarisées suivantes, les changements de notations sont:

$\frac{\Delta \dot{V}}{V_e} = \frac{\dot{V} - \dot{V}_e}{V_e} \rightarrow \dot{V}$	$\frac{\Delta V}{V_e} = \frac{V - V_e}{V_e} \rightarrow V$	
$\Delta \gamma = \gamma - \gamma_e \rightarrow \gamma$	$\Delta q = q - q_e \rightarrow q$	$\Delta \alpha = \alpha - \alpha_e \rightarrow \alpha$
$\Delta(\delta\tau) = \delta\tau - \delta\tau_e \rightarrow \delta\tau$	$\Delta(\delta m) = \delta m - \delta m_e \rightarrow \delta m$	

Les nouvelles notations représentent les petites variations autour de la valeur d'équilibre.

ATTENTION : La même notation représentera soit la grandeur réelle, soit les petites variations par rapport à la valeur d'équilibre. Il convient donc, lorsqu'on écrit ou qu'on utilise une équation, de bien savoir à quelles grandeurs on a affaire.

Pour alléger encore les notations, on remplace δm par m et $\delta \tau$ par τ quand ils sont en indice. De plus, on note

$$\bar{q}_e = \frac{1}{2} \rho_e V_e^2$$

. On a alors:

- Equation de propulsion linéarisée:

$$\dot{V} = - x_V V - x_\gamma \gamma - x_\alpha \alpha - x_m \delta m - x_\tau \delta \tau$$

avec:

$$x_v = \frac{2 \bar{q}_e S C_{x_e}}{m V_e} - \frac{F_{v_e} \cos \alpha_e}{m} + \frac{\bar{q}_e S C_{x_{v_e}}}{m}$$

$$x_\gamma = \frac{g \cos \gamma_e}{V_e}$$

$$x_\alpha = \frac{\bar{q}_e S C_{x_{\alpha_e}}}{m V_e} + \frac{F_e \sin \alpha_e}{m V_e}$$

$$x_m = \frac{\bar{q}_e S C_{x_{m_e}}}{m V_e}$$

$$x_\tau = - \frac{F_\tau \cos \alpha_e}{m V_e}$$

- Equation de sustentation linéarisée:

$$\dot{\gamma} = z_v V + z_\gamma \gamma + z_\alpha \alpha + z_m \delta m + z_\tau \delta \tau$$

avec:

$$z_v = \frac{2 \bar{q}_e S C_{z_e}}{m V_e} + \frac{F_{v_e} \sin \alpha_e}{m} + \frac{\bar{q}_e S C_{z_{v_e}}}{m}$$

$$z_\gamma = \frac{g \sin \gamma_e}{V_e}$$

$$z_\alpha = \frac{\bar{q}_e S C_{z_{\alpha_e}}}{m V_e} + \frac{F_e \cos \alpha_e}{m V_e}$$

$$z_m = \frac{\bar{q}_e S C_{z_{m_e}}}{m V_e}$$

$$z_\tau = \frac{F_\tau \sin \alpha_e}{m V_e}$$

- Equation de moment linéarisée:

$$\dot{q} = m_v V + m_\alpha \alpha + m_q q + m_m \delta m + m_\tau \delta \tau$$

avec:

$$m_v = \bar{q}_e V_e \frac{S}{B} C_{m_{v_e}}$$

$$m_\alpha = \bar{q}_e \frac{S}{B} C_{m_{\alpha_e}}$$

$$m_q = \bar{q}_e \frac{S^2}{B V_e} C_{m_{q_e}}$$

$$m_m = \bar{q}_e \frac{S}{B V_e} C_{m_{m_\tau}}$$

$$m_\tau = 0 \quad (\text{car } C_{m_\tau} = 0 \text{ puisqu'on a considéré } \vec{F} \text{ porté par } \vec{Gx})$$

Sur certains avions, m_τ peut ne pas être nul (réacteurs sous pylône).

- Equations cinématiques linéarisées:

Dans le modèle avion que l'on cherche, θ n'est pas retenu comme variable. On la remplace par α en utilisant la relation:

$$\theta = \alpha + \gamma \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \dot{\alpha} + \dot{\gamma} = \dot{q}$$

d'où

$$\dot{\alpha} = \dot{q} - \dot{\gamma} \quad \Rightarrow$$

$$\dot{\alpha} = -z_V V - z_\gamma \dot{\gamma} - z_\alpha \alpha + q - z_m \delta m - z_\tau \delta \tau$$

Pour la dernière équation du modèle on a:

$$\dot{Z} = V \sin \gamma \quad \Rightarrow$$

$$d\dot{Z} = d(V \sin \gamma) = V_e \cos \gamma_e d\gamma + \sin \gamma_e dV$$

Donc, en tenant compte du changement de notation:

$$\dot{Z} = V_e \cos \gamma_e \dot{\gamma} + V_e \sin \gamma_e \dot{V}$$

3-4 Modèle longitudinal avion :

a - Récapitulatif du modèle avion :

Les cinq équations ainsi obtenues peuvent s'écrire sous la forme:

$$\begin{bmatrix} \dot{V} \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{q} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_v & -x_\gamma & -x_\alpha & 0 & 0 \\ z_v & z_\gamma & z_\alpha & 0 & 0 \\ -z_v & -z_\gamma & -z_\alpha & 1 & 0 \\ m_v & 0 & m_\alpha & m_q & 0 \\ V_e \sin \gamma_e & V_e \cos \gamma_e & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ \gamma \\ \alpha \\ q \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x_m & -x_\tau \\ z_m & z_\tau \\ -z_m & -z_\tau \\ m_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta m \\ \delta \tau \end{bmatrix}$$

On obtient donc une représentation d'état dont l'équation générale est:

$$\dot{X} = A X + B u$$

où

- A est la matrice d'état ou matrice d'évolution ou matrice dynamique
- B la matrice de commande
- u le vecteur de commande
- X le vecteur d'état.

b - Simplification du modèle :

Le modèle obtenu peut encore se simplifier si l'on considère que:

- $\gamma_e = 0$ le vol est en palier
- l'incidence de l'avion reste généralement petite donc $\cos \alpha_e \cong 1$ et $\sin \alpha_e \cong 0$
- C_{m_v} , C_{x_v} , C_{z_v} , F_v sont nuls .

Les coefficients des matrices se simplifient donc et s'écrivent:

$x_v = \frac{2 \bar{q}_e S C_{x_e}}{m V_e} = \frac{2 g}{f_e V_e}$	$z_v = \frac{2 g}{V_e}$	$m_v = 0$
$x_\gamma = \frac{g}{V_e}$	$z_\gamma = 0$	$m_\alpha = \bar{q}_e \frac{S}{B} C_{m_\alpha}$
$x_\alpha = \frac{\bar{q}_e S C_{x_\alpha}}{m V_e}$	$z_\alpha = \frac{\bar{q}_e S C_{z_\alpha}}{m V_e} + \frac{F_e}{m V_e}$	$m_q = \bar{q}_e \frac{S^2}{B V_e} C_{m_q}$
$x_m \cong 0$	$z_m = \frac{\bar{q}_e S C_{z_{m_e}}}{m V_e}$	$m_m = \bar{q}_e \frac{S}{B V_e} C_{m_{m_e}}$
$x_\tau = - \frac{F_\tau}{m V_e}$	$z_\tau = 0$	$m_\tau = 0$

avec:	$\bar{q}_e = \frac{1}{2} \rho_e V_e^2$	$f_e = \frac{C_{z_e}}{C_{x_e}} \left\{ \begin{array}{l} \text{ finesse} \\ \text{ d'équilibre} \end{array} \right.$	$C_{x_\alpha} = 2 k C_{z_\alpha} C_z$
-------	--	---	---------------------------------------

Les signes habituels des coefficients sont:

Indice Coefficient	V	γ	α	q	m	τ
x	+	+	+	0	+	-
z	+	0	+	0	+	0
m	0	0	-	-	-	0

Le modèle sur lequel nous travaillerons est donc:

$\begin{bmatrix} \dot{V} \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{q} \\ \dot{Z} \end{bmatrix}$	=	$\begin{bmatrix} -x_v & -x_\gamma & -x_\alpha & 0 & 0 \\ z_v & 0 & z_\alpha & 0 & 0 \\ -z_v & 0 & -z_\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m_\alpha & m_q & 0 \\ 0 & V_e & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	+	$\begin{bmatrix} 0 & -x_\tau \\ z_m & 0 \\ -z_m & 0 \\ m_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \delta m \\ \delta \tau \end{bmatrix}$
---	---	---	---	--	---

4-1 Effet initial des commandes :

L'avion est dans un état d'équilibre, les commandes ont des positions bien définies. On les déplace de $\Delta(\delta m) \leftrightarrow \delta m$ et de $\Delta(\delta \tau) \leftrightarrow \delta \tau$.

Tout au début du mouvement, les écarts des variables d'état par rapport aux valeurs d'équilibre sont nuls. On a donc:

$$\begin{bmatrix} \dot{V} \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{q} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ z_m \\ -z_m \\ m_m \\ 0 \end{bmatrix} [\delta m] + \begin{bmatrix} -x_\tau \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [\delta \tau]$$

① $\delta m \neq 0$ et $\delta \tau = 0$: $m_m \delta m$ est prépondérant devant $z_m \delta m$: l'effet principal de δm est de donner une accélération de tangage

, $\delta m = 0$ et $\delta \tau \neq 0$: l'effet principal de $\delta \tau$ est de donner une accélération ($\delta \tau > 0$) ou une décélération ($\delta \tau < 0$).

4-2 Effet final des commandes :

Après un mouvement transitoire que nous étudierons plus loin, l'avion va se retrouver dans un nouveau cas de vol stabilisé, défini par les écarts V , α , γ , avec les valeurs V_{e_1} , α_{e_1} , γ_{e_1} .

Puisqu'on se trouve en un point de vol équilibré, toutes les dérivées sont nulles, en particulier $q = 0$ ($q = \dot{\alpha} + \dot{\gamma}$).

Le système se simplifie donc et comme les équations en α et γ sont identiques, il reste:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_v & -x_\gamma & -x_\alpha \\ z_v & 0 & z_\alpha \\ 0 & 0 & m_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ \gamma \\ \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -x_\tau \\ 0 & 0 \\ m_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta m \\ \delta \tau \end{bmatrix}$$

Cela permet de calculer les écarts V , γ , α .

4-3 Effets transitoires :

L'étude du mouvement longitudinal des avions montre que, à la suite d'une perturbation, ils répondent par deux mouvements généralement bien séparés: l'oscillation d'incidence et l'oscillation phugoïde (dans les cas de centrage généralement rencontrés). De plus, on constate que l'oscillation d'incidence est un phénomène bien plus rapide que l'oscillation phugoïde, ce qui va nous permettre d'étudier successivement ces deux mouvements.

a - Oscillation d'incidence :

Ce phénomène se déroule comme suit:

Un écart d'incidence $\Delta\alpha$ (provoqué par exemple par une variation de $\Delta\delta_m$), en un point de vol équilibré, entraîne l'apparition d'un écart de portance appliqué au foyer F:

$$\Delta R_m = - \frac{1}{2} \rho S V^2 C_{z_\alpha} \Delta\alpha$$

Ceci provoque:

- une rotation de l'avion autour de G, due au moment $\Delta R_m \cdot \overline{GF}$ (à court terme)
- un mouvement vertical du centre de gravité (à long terme),

Cette rotation dépend du signe de \overline{GF} :

- G en avant de F : $\overline{GF} < 0$, la rotation tend à diminuer $\Delta\alpha$; il y a rappel en incidence.
- G en arrière de F: $\overline{GF} > 0$, la rotation tend à augmenter $\Delta\alpha$; il y a divergence en incidence.

Dans le premier cas, on a un mode oscillatoire amorti et les écarts en vitesse et en altitude (donc en pente) sont suffisamment faibles pour qu'ils n'affectent pas les forces extérieures. Dans ce mouvement relativement rapide (0,5 à 2 sec), la vitesse et la pente restent pratiquement constantes.

Cependant, ce type de mouvement se caractérise par une pulsation assez élevée et un amortissement relativement faible. Cette combinaison peut présenter un danger pour le pilote; en effet, celui-ci désirant corriger les variations d'incidence le fera avec du retard. L'ensemble avion-pilote peut alors entrer en résonance (phénomène du pompage piloté). Pour éviter ce danger, il convient d'augmenter l'amortissement de ce mode, soit aérodynamiquement (C_{m_q}), soit artificiellement et de façon automatique (stabilisateur ou amortisseur de tangage).

Puisqu'on peut considérer que la pente et la vitesse sont constantes dans ce mouvement, on peut écrire:

$$\dot{V} = V = 0 \text{ et } \dot{\gamma} = \gamma = 0 \text{ puisqu'il s'agit d'écarts par rapport à l'équilibre.}$$

Le modèle complet se réduit donc à:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -z_\alpha \alpha + q - z_m \delta m - z_\tau \delta \tau \\ \dot{q} = m_\alpha \alpha + m_q q + m_m \delta m \end{cases}$$

En prenant la transformée de Laplace de ces équations, il vient:

$$\begin{cases} (s + z_\alpha) \alpha - q = -z_m \delta m - z_\tau \delta \tau \\ -m_\alpha \alpha + (s - m_q) q = m_m \delta m \end{cases}$$

d'où l'équation caractéristique du mode:

$$\varphi(s) = \det \begin{vmatrix} s + z_{\alpha} & -1 \\ -m_{\alpha} & s - m_q \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\varphi(s) = s^2 + (z_{\alpha} - m_q) s - m_{\alpha} - m_q z_{\alpha}$$

Les racines de l'équation caractéristique sont complexes conjuguées à partie réelle négative. En identifiant cette équation à celle d'un second ordre on en déduit les caractéristiques du mode oscillation d'incidence (indicées OI):

$$\varphi(s) = s^2 + 2 \xi_{OI} \omega_{OI} s + \omega_{OI}^2$$

$$\omega_{OI} = \sqrt{-(m_{\alpha} + m_q z_{\alpha})}$$

$$\xi_{OI} = \frac{z_{\alpha} - m_q}{2 \omega_{OI}}$$

Le temps de réponse T_R dépend de ξ .

On remarque que ξ est fonction de z_{α} et de m_q et comme:

$$z_{\alpha} = \frac{\bar{q}_e S C_{z_{\alpha e}}}{m V_e} + \frac{F_e}{m V_e} \quad \text{et} \quad m_q = \bar{q}_e \frac{S^2}{B V_e} C_{m_q}$$

pour améliorer l'amortissement, il faut modifier $C_{z_{\alpha}}$ (qui dépend de la forme de l'aile) et C_{m_q} (qui dépend de la surface de l'empennage). En travaillant uniquement sur ces deux coefficients, il est donc très difficile de modifier l'amortissement ξ_{OI} car il faudrait modifier la structure de l'avion.

b - Oscillation phugoïde :

En reprenant la description faite précédemment, on a vu qu'une variation de $\Delta\alpha$ entraînait un mouvement rapide en rotation autour du centre de gravité de l'avion. La variation en incidence s'amortit pour atteindre une nouvelle position d'équilibre α_{e1} . Cette nouvelle incidence provoque une variation de portance ΔR_m (que l'on suppose >0) appliquée au centre de gravité de l'avion. La modification de l'équilibre des forces entraîne donc les trois phénomènes suivants:

- L'avion va s'élever ($\Delta\gamma > 0$),
- La traînée de l'avion va augmenter (car augmentation de la portance),
- La composante du poids sur x_a ($-mg \sin\gamma$), appelée poids-pente, augmente.

En conséquence, la vitesse de l'avion va diminuer, provoquant une diminution de la portance. ΔR_m devient nul, puis négatif, l'avion redescend, donc V augmente...

Ce mouvement est un échange entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de l'avion à incidence quasiment constante. La variation de V , Z et γ est pseudo-sinusoidale avec le temps. Ce mouvement, l'oscillation phugoïde, est un mouvement pseudo-périodique, très lent, généralement amorti, qui ne présente aucun danger pour le pilote (la lenteur de l'évolution du phénomène fait que le pilote n'a aucun problème pour le contrer).

L'oscillation phugoïde peut aussi être déclenchée par une variation de vitesse $\Delta V > 0$ (dûe par exemple à $\Delta\delta\tau > 0$). Si la poussée, comme nous en avons fait l'hypothèse, a un moment nul en G, un écart ΔV crée des forces

toutes appliquées en G. Dans ce cas, aucun moment de tangage, ni vitesse de tangage n'apparaissent (en réalité, α et q subissent de très légères variations dont nous ne tiendrons pas compte).

Si on suppose donc que l'avion subit une variation de vitesse $\Delta V > 0$, ceci provoque une variation de portance appliquée au centre de gravité de l'avion $\Delta R_m > 0$. L'équilibre des forces est rompu, et l'avion va s'élever puisque $R_m + \Delta R_m > mg$. Simultanément, la pente devient positive, la traînée ($\Delta R_{xa} > 0$) et le poids pente ($-mg \sin \gamma$) augmentent; ceci entraîne une décélération, donc une diminution de la vitesse.

ΔR_m devient nulle puis négative. L'avion redescend et l'on retrouve le phénomène d'échange d'énergie cinétique et d'énergie potentielle décrit précédemment.

Puisqu'on peut considérer que l'incidence est constante dans ce mouvement, on peut écrire:

$\dot{\alpha} = \alpha = 0$ donc $\dot{\gamma} = q$ puisqu'il s'agit d'écart par rapport à l'équilibre.

Le modèle complet se réduit donc à:

$$\begin{cases} \dot{V} = -x_V V - x_\gamma \gamma & - x_t \delta\tau \\ \dot{\gamma} = z_V V & + z_m \delta m \end{cases}$$

En prenant la transformée de Laplace de ces équations, il vient:

$$\begin{cases} (s + x_V) V + x_\gamma \gamma = & - x_t \delta\tau \\ - z_V V + s \gamma = & z_m \delta m \end{cases}$$

d'où l'équation caractéristique du mode:

$$\varphi(s) = \det \begin{vmatrix} s + x_V & x_\gamma \\ - z_V & s \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\boxed{\varphi(s) = s^2 + x_V s + x_\gamma z_V}$$

Les racines de l'équation caractéristique sont complexes conjuguées à partie réelle négative. En identifiant cette équation à celle d'un second ordre on en déduit les caractéristiques du mode oscillation phugoïde (indiquées OP):

$$\varphi(s) = s^2 + 2 \xi_{OP} \omega_{OP} s + \omega_{OP}^2$$

$$\omega_{OP} = \sqrt{x_\gamma z_V}$$

$$\xi_{OP} = \frac{x_V}{2 \omega_{OP}}$$

Le temps de réponse T_R dépend de ξ .

4-4 Etude du modèle complet :

Si l'on excepte la dernière équation du modèle ($\dot{Z} = V_e \gamma$) qui est une intégration pure et ne modifie pas la dynamique des autres variables, il reste:

$$\begin{bmatrix} \dot{V} \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_v & -x_y & -x_\alpha & 0 \\ z_v & 0 & z_\alpha & 0 \\ -z_v & 0 & -z_\alpha & 1 \\ 0 & 0 & m_\alpha & m_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ \gamma \\ \alpha \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -x_\tau \\ z_m & 0 \\ -z_m & 0 \\ m_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta m \\ \delta \tau \end{bmatrix}$$

$$= \quad A \quad X \quad + \quad B \quad U$$

L'équation caractéristique du système ainsi défini est:

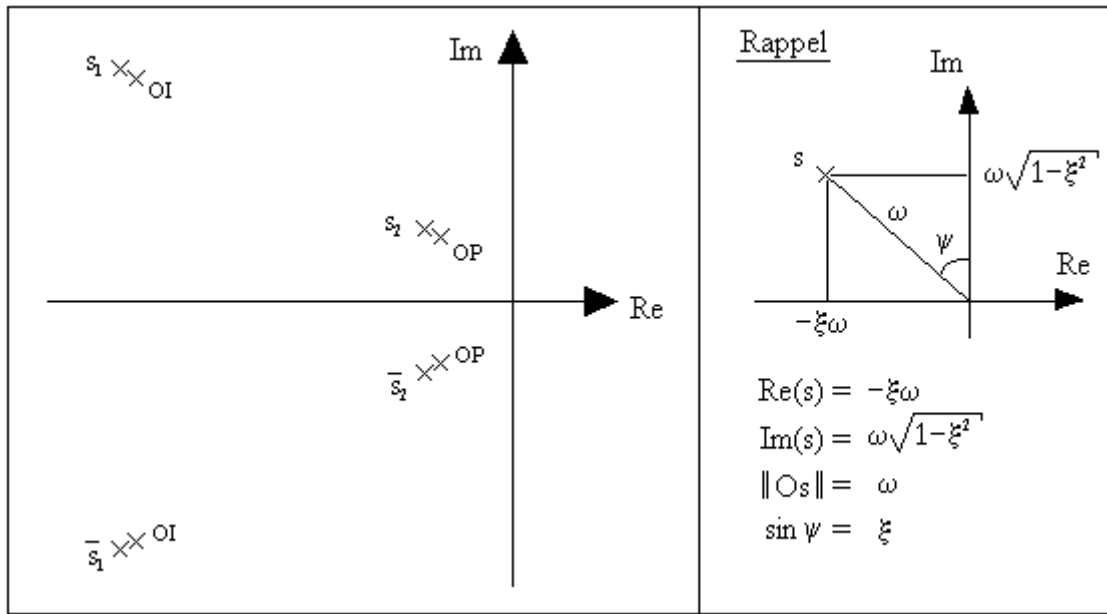
$$\begin{aligned} \varphi(s) = \det(sI - A) &= \begin{vmatrix} s + x_v & x_y & x_\alpha & 0 \\ -z_v & s & -z_\alpha & 0 \\ z_v & 0 & s + z_\alpha & -1 \\ 0 & 0 & -m_\alpha & s - m_q \end{vmatrix} \\ &= (s^2 + x_v s + z_v x_y) (s^2 + s(z_\alpha - m_q) - m_q z_\alpha - m_\alpha) \\ &\quad - z_v [x_\alpha s^2 + s(z_\alpha x_y - m_q x_\alpha) - m_q z_\alpha x_y] \\ &= (s^2 + 2\xi_{OP} \omega_{OP} s + \omega_{OP}^2) (s^2 + 2\xi_{OI} \omega_{OI} s + \omega_{OI}^2) \\ &\quad - z_v [x_\alpha s^2 + s(z_\alpha x_y - m_q x_\alpha) - m_q z_\alpha x_y] \\ &= (s - s_1) (s - \bar{s}_1) (s - s_2) (s - \bar{s}_2) \end{aligned}$$

Si on compare les pôles de l'oscillation d'incidence, les pôles de l'oscillation phugoid et les pôles de l'équation caractéristique, on remarque que:

s_1 et \bar{s}_1 sont proches des pôles de l'OI

s_2 et \bar{s}_2 sont proches des pôles de l'OP

La mise en place dans le plan complexe de ces pôles donne:



On peut donc dire que le mouvement complet de l'avion, qui est la superposition des deux modes, peut être considéré comme la succession de ces deux modes.

On a donc **découplage** des modes longitudinaux. Le calcul des caractéristiques effectué en utilisant les systèmes réduits d'équations, comme fait aux paragraphes 4-3-a et 4-3-b est donc valide.

On peut considérer ainsi que de l'instant $t=0$, instant initial du mouvement, à $t=T_{R_m}$ (temps de réponse de l'oscillation d'incidence) V et γ n'ont pas encore évolué donc:

$$\left. \begin{aligned} V = \text{cste} &\Rightarrow \Delta V = 0 \Rightarrow V = 0 \\ \gamma = \text{cste} &\Rightarrow \Delta \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0 \end{aligned} \right\} \text{ dans le modèle}$$

Et au-delà de l'instant $t=T_{R_m}$, on peut considérer que l'incidence n'évolue plus et que seules V et γ varient:

$$\alpha = \text{cste} \Rightarrow \Delta \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \text{ dans le modèle}$$

donc $\dot{\gamma} = q$

Sur le modèle complet de l'avion, cela revient à négliger les termes de couplage du système ($-x_\alpha \alpha$, $z_\alpha \alpha$ et $z_V V$) entre les deux groupes d'équations. Dans ce cas, si on calcule l'équation caractéristique du système, on obtient:

$$\varphi(s) = (s^2 + 2 \xi_{OP} \omega_{OP} s + \omega_{OP}^2) (s^2 + 2 \xi_{OI} \omega_{OI} s + \omega_{OI}^2)$$

Sur la modélisation de l'avion, en représentation d'état, ces termes de couplage apparaissent dans la matrice A :



$$\begin{bmatrix} \dot{V} \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_v & -x_\gamma & -x_\alpha & 0 \\ z_v & 0 & z_\alpha & 0 \\ -z_v & 0 & -z_\alpha & 1 \\ 0 & 0 & m_\alpha & m_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ \gamma \\ \alpha \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -x_\tau \\ z_m & 0 \\ -z_m & 0 \\ m_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta m \\ \delta \tau \end{bmatrix}$$

Les négliger revient à écrire:

$$\begin{bmatrix} \dot{V} \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{OP} & 0 \\ 0 & A_{OI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ \gamma \\ \alpha \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -x_\tau \\ z_m & 0 \\ -z_m & 0 \\ m_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta m \\ \delta \tau \end{bmatrix}$$

avec: $A_{OP} = \begin{bmatrix} -x_v & -x_\gamma \\ z_v & 0 \end{bmatrix}$ et $A_{OI} = \begin{bmatrix} -z_\alpha & 1 \\ m_\alpha & m_q \end{bmatrix}$

Exemple numérique:

On considère un avion dont les coefficients du modèle sont:

Indice Coefficient	V	γ	α	q	m	τ
x	0,016	0,037	0,044	0	0	x_τ
z	0,075	0	1,27	0	0,527	0
m	0	0	-17,7	-1,26	-43,4	0

Calcul de l'équation caractéristique:

En reprenant l'expression de l'équation caractéristique trouvée plus haut on obtient:

$$\det(sI - A) = s^4 + 2,546 s^3 + 19,31 s^2 + 0,28 s + 0,05$$

Les racines de cette équation, et les caractéristiques correspondant sont regroupées dans le tableau ci-dessous:

	Mode rapide	Mode lent
Racines	$s = - 1,266 \pm 4,2 j$	$s = - 0,007 \pm 0,05 j$
Caractéristiques	$\omega = 4,39 \text{ rad / s}$ $\xi = 0,29$ $T_R = \frac{0,8 \pi}{\xi \omega} \approx 2 \text{ s}$	$\omega = 0,05 \text{ rad / s}$ $\xi = 0,14$ $T_R = \frac{0,8 \pi}{\xi \omega} \approx 359 \text{ s}$

Si on suppose que les modes sont découplés, on peut calculer, à partir des relations établies précédemment sous ces hypothèses, les équations caractéristiques des deux oscillations:

Oscillation d'incidence: $\varphi(s) = s^2 + (z_\alpha - m_q) s - m_\alpha - m_q z_\alpha$
 $= s^2 + 2,53 s + 19,3$

Oscillation phugoïde: $\varphi(s) = s^2 + x_v s + x_y z_v$
 $= s^2 + 0,016 s + 0,0028$

Les caractéristiques calculées sont alors:

	Oscillation d'incidence	Oscillation phugoïde
Racines	$s = -1,27 \pm 4,21 j$	$s = -0,008 \pm 0,052 j$
Caractéristiques	$\omega_{OI} = 4,39 \text{ rad/s}$ $\xi_{OI} = 0,29$ $T_{R_{OI}} = \frac{0,8 \pi}{\xi \omega} \approx 2 \text{ s}$	$\omega_{OP} = 0,05 \text{ rad/s}$ $\xi_{OP} = 0,15$ $T_{R_{OP}} = \frac{0,8 \pi}{\xi \omega} \approx 359 \text{ s}$

Ces deux tableaux montrent que les résultats sont respectivement très proches les uns des autres.

De plus, $T_{R_{OI}} \ll T_{R_{OP}}$, ce qui permet d'affirmer que le découplage est justifié.

Conclusion :

Le découplage est une approximation permettant le calcul des caractéristiques des modes propres de l'avion de manière simple.

Cependant, vues les hypothèses émises a priori, il faut, dans chaque cas, en vérifier la validité, en particulier grâce à la simulation.

Le modèle linéaire obtenu a une validité relativement large (ne pas oublier qu'il s'agit d'un modèle développé autour d'un point de vol équilibré), et il permet de retrouver les caractéristiques du mouvement de l'avion rigide comme on pourrait les avoir à partir des équations générales.

Si l'on veut tenir compte des modes dus à la souplesse de la structure de l'avion, il faut augmenter l'ordre du système.

Si l'on enregistre la réponse de la vitesse de tangage à un échelon de profondeur à cabrer, on obtient la courbe ci-après qui montre bien que $T_{R_{OI}} \ll T_{R_{OP}}$, ce qui confirme encore la validité des hypothèses de découplage émises.

