Psychogéométrie de Maria Montessori

"Je suis convaincu qu'une des raisons des difficultés rencontrées en géométrie par tant d'enfants, est le manque d'expérience préalable qui, s'ils l'avaient eue, aurait donné aux enfants la connaissance nécessaire pour pouvoir aller plus loin" (Mario Montessori, son fils)

1. Généralités

Le rôle du maître est de faire passer l'esprit de l'enfant à l'abstraction. Mais si on n'arrive pas à intéresser l'enfant, ceci est stérile.
La condition essentielle est que l'élève veuille recevoir les connaissances, qu'il puisse prêter attention, qu'il s'intéresse.
Donc l'objectif doit être de réveiller le joie et l'enthousiasme pour le travail.

Périodes sensibles :

Pendant la période de croissance, il existe des centres successifs de sensibilité psychique où l'intérêt de l'enfant éveillé sur un thème est un aimant intérieur permanent pour les conquêtes suivantes.
L'activité intérieure est l'œuvre maîtresse mais nous pouvons agir que sur la périphérie en mettant en place un monde approprié à ses besoins, ainsi son esprit se construira au mieux.

La période pré-élémentaire (4 à 6 ans) :

La géométrie à la Maison des enfants (école maternelle ???) :

Matériel : formes géométriques en bois régulières qui s'emboîtent parfaitement dans un cadre.
Qu'y a-t-il d'identique entre la forme et le cadre ?
Exercice : les yeux bandés, l'enfant devra suivre tactilement le contour de la forme puis celle du cadre pour faire entrer la forme dans son cadre.
Puis on complexifie la tâche en augmentant le nombre de forme.
But : développer un sens géométrique qui s'identifie avec son organisme physique en chemin pour une création active.
Prolongement : avec des cartes où des figures géométriques sont dessinées soit pleines, soit juste le contour par une bande plus ou moins épaisse. L'enfant devra ici regrouper les cartes représentant les mêmes figures.

Dessins géométriques décoratifs :
Matériel : formes géométriques en fer, cadres correspondants, feuilles de toutes les couleurs aux dimensions du cadre et crayons de couleurs.
Exercice : sur une même feuille reproduire la figure avec le cadre et avec la forme, on obtient une forme à double contour que l'on peut remplir.
Deux buts : le premier est préparatoire à l'écriture et le deuxième est la prise de conscience des relations qui existent entre les formes géométriques (grâce à une productions de milliers de dessins qui donnent lieu à une composition, à une combinaison de formes).
Prolongement : d'autres techniques comme l'aquarelle, les encres, les pastels, ... pour développer la création artistique qui se convertit en maîtresse de géométrie.

Étude différenciées des contours :
Après tous ces exercices, on peut donner la définition exacte des figures planes car la définition doit être postérieure à la connaissance, c'est un pas en avant dans la connaissance car elle précise et ordonne le connu.
C'est là que l'on va fournir aux enfants les outils pour reproduire ces formes géométriques.

L'encadrement du papier - Cadres et décorations :
Faire faire un cadre sur une feuille blanche : tracer les 2 diagonales, à l'aide d'un compas en partant du point d'intersection des diagonales marquer 4 points équidistants sur les diagonales et les relier.
Puis le cadre obtenu peut être décoré.
L'enfant va alors exploiter les outils de construction géométrique en créant des parallèles avec l'équerre par exemple (??? je demande à voir !!!).

Éléments linéaires - Lignes et angles :
Les parallèles ne permettent pas de former d'angle puisqu'elles ne se rencontrent jamais.
Quand 2 lignes se rencontrent elles forment un point et un angle dans leur convergence.
En utilisant l'équerre on peut obtenir des perpendiculaires. Si l'angle obtenu précédemment est plus petit, il est dit aigu, s'il est plus grand, il est dit obtus.

Notions élémentaires, les figures :

Le triangle :
C'est une figure fermée composée de 3 lignes (côtés) et comportant 3 angles.
Si les 3 côtés sont de même longueur, il est équiangle (équilatéral).
S'il n'a que 2 côtés de même longueur, il est isocèle.
S'il n'a aucun côté de même longueur, il est scalène (quelconque).
S'il a un angle droit, il est rectangle avec le côté opposé à l'angle que l'on appelle hypoténuse.
S'il a un angle obtus, il est obtusangle.
S'il a tous ses angles aigus, il est acutangle.
Le contour du triangle est appelé périmètre

De nouveau les formes géométriques :
Matériel : les différents triangles en bois avec les étiquettes correspondantes.
Exercice : devant chaque forme mettre le plus grand nombre d'étiquettes correspondantes.
Exemple : devant la forme du triangle équilatéral, on peut mettre 3 étiquettes : triangle équilatéral, triangle équiangle et triangle acutangle.
But : chaque définition est clarifiée.

Décorations :
L'étude de ces formes de triangle est ancrée par des dessins décoratifs qui font ressortir les caractéristiques de chacun.
Faire faire une collection de constructions géométriques et décoratives où les définitions apparaitront et l'enfant commence ainsi son album de géométrie.

Le carré :
C'est une figure géométrique à 4 côtés égaux et 4 angles droits.

Le rectangle :
C'est une figure géométrique à 4 côtés (quadrilatère) où les côtés opposés sont égaux 2 à 2 et 4 angles droits.

Le losange :
C'est un quadrilatère à 4 côtés égaux et ses angles opposés sont égaux 2 à 2 (2 aigus et 2 obtus)

Le parallélogramme :
C'est un quadrilatère qui a ses côtés opposés égaux 2 à 2 et ses angles aussi.

Les côtés parallèles :
Le carré, le rectangle, le losange et le parallélogramme ont leurs côtés opposés parallèles.

Le trapèze (isocèle) :
C'est un quadrilatère qui n'a que 2 côtés opposés parallèles et les 2 autres ont la même inclinaison sur la base. On a 2 angles consécutifs égaux obtus et 2 angles consécutifs égaux aigus.

Le trapèze (rectangle) :
C'est un trapèze particulier car 1 des angles de sa base est droit.

Le cercle :
C'est une figure limitée par une ligne courbe équidistante (appelée circonférence) d'un point central appelé centre.
La ligne qui représente la distance entre le centre et la circonférence est le rayon, son double est le diamètre.

L'enfant fait maintenant la distinction entre la ligne droite et la ligne courbe.
Chaque figure est décorées pour enrichir l'album de géométrie.

L'hexagone régulier :
C'est une figure régulière fermée par 6 côtés égaux qui a 6 angles égaux obtus.
Il peut se construire à partir d'un cercle.

Les polygones :
5 côtés : pentagone ; 6 : hexagone ; 7 : heptagone ; 8 : octogone ; 9 : ennéagone ; 10 : décagone.
Le périmètre est l'ensemble des lignes constituant le contour d'un polygone.

Les mots :
En parallèle avec l'album, l'enfant tient un livre de géométrie contenant tout le vocabulaire relatif à le géométrie.

2. Introduction à la période élémentaire

Nous avons exposé à la périphérie de l'enfant les moyens qui se prêtent à un exercice spontané de l'esprit : le matériel et le vocabulaire. Il va pouvoir s'exprimer en langage scientifique, le langage préparé est la voie de la libre expression.
Ce que nous avons exposé à l'enfant permet une gymnastique mentale autour de la géométrie ; elle prépare l'esprit pour agir et plus seulement pour recevoir.

Le matériel avancé de géométrie pour les écoles élémentaires :
"La main touche l'évidence et l'esprit découvre le secret."
Matériel : formes en fer des 3 principales figures : carré, triangle équilatéral et cercle (côtés de figures = diamètre du cercle) et leur cadre.
Prolongement : à partir des cadres, faire les formes découpées (le triangle en 2, 3, 4, ... de même pour le cercle et le carré) et des cercles de diamètres plus petit avec leur cadre.
Exercices : 1. déplacer les figures dans les cadres ; 2. reproduction en vue de décorations en utilisant les formes, les cadres et les outils (règles, équerre, compas).

Étude des lignes, définitions, triangle :
Un triangle équilatéral divisé en 2 parties égales donne 2 triangles rectangles, la droite séparant est la hauteur.

La hauteur est la ligne perpendiculaire à la base qui passe par le sommet opposé (dans un obtusangle elle se trouve en dehors du triangle).
Application : sur une frise entre 2 parallèles, les triangles construits ont tous la même hauteur.
Un triangle équilatéral divisé en 3 parties égales donne 3 triangles isocèles et obtusangles, les droites séparant sont les bissectrices (elles se coupent au milieu du triangle, à équidistance des sommets).

Bissectrice :
C'est une ligne qui divise l'angle en 2 parties égales (dans un triangle équilatéral c'est aussi la hauteur).
Un triangle équilatéral divisé en 4 parties égales donne 4 triangles équilatéraux, les lignes séparant sont les médianes.

Manière de trouver le milieu d'un segment de ligne droite au moyen d'un compas :
Tracer 4 arcs de cercles de part et d'autre du segment de même rayon ayant pour centre chaque extrémité du segment.
On obtient 2 points d'intersection que l'on relie pour obtenir la médiane.

Étudions maintenant le carré :
Un carré divisé en 2 triangles par la diagonale ou en 4 par les 2 diagonales, donne des triangles rectangles. Les 2 diagonales se coupent au centre du carré en formant un angle droit.
Un carré peut être divisé en 2 rectangles par la médiane ou en 4 carrés par les 2 médianes. Les 2 médianes se coupent au centre du carré en formant un angle droit.

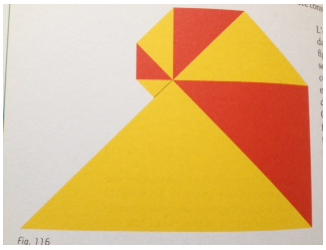
Toutes ses connaissances doivent être fixées au moyen d'exercices variés, incluant les décorations.

3. Le carré

Comparaison entre les figures - le carré :
Les figures occupent un espace : quantité de superficie et elles déterminent une forme de par leurs lignes.
Il faut différencier les figures égales (même forme et même mesure), les figures semblables (même forme et mesures différentes) et les figures équivalentes (même valeur).

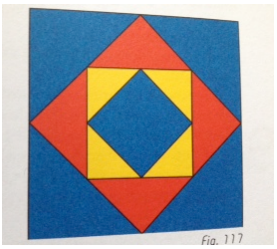
Construction de figures équivalentes :
Un carré peut être découpé en rectangles et carrés ou en triangles.
La moitié d'un carré obtenue par la médiane donne un rectangle équivalent à celle obtenue par la diagonale qui sera un triangle.
Comment obtenir un carré qui est la moitié d'un autre ?

Problèmes et théorèmes :
Pour le faire il faut revenir au matériel.
En prenant 2 triangles obtenus à partir qu carré découpé en 4 et en les joignant par l'hypoténuse, le problème est résolu.
Ce petit carré (figure inscrite) s'inscrit dans le grand (figure circonscrite) si on le tourne de 90°.
Si on laisse le petit carré dans le même sens, il est dit concentrique.
La figure inscrite est unique, alors que les concentrique existe à l'infini.
D'où les théorèmes :
1. si un carré a une diagonale égale au côté d'un autre carré il est équivalent à la moitié de ce dernier :



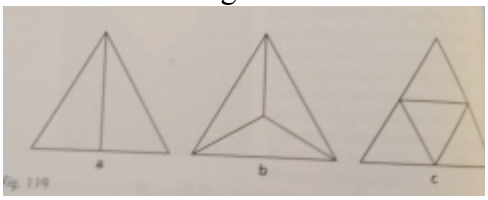
2. dans un triangle isocèle, la somme des carrés construits sur les côtés de l'angle droit est équivalente au carré construit sur l'hypoténuse :

3. un carré qui a son côté égal à la moitié de la diagonale de l'autre carré, est équivalent à la moitié de celui-ci :



4. Le triangle

Le triangle équilatéral :
On considère 3 figures de base avec le triangle (T1) :



En a, en traçant une hauteur, on obtient 2 triangles rectangles (T2).
En b, en traçant les 3 bissectrices, on obtient 3 triangles obtusangles isocèles (T3).
En c, en reliant les milieux des côtés, on obtient 4 triangles équilatéraux (T4).
Si pour c, on ne trace qu'une ligne sur les 3, on obtient 1 triangle équilatéral et un trapèze ; et en traçant 2 lignes sur les 3, on obtient 2 triangles équilatéraux et un losange.

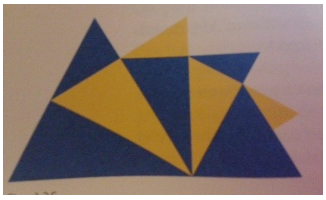
Les opérations :
le trapèze = T1 - T4 = 3 x T4
T1 = 2 x T4 + le losange = 2 x le losange
2 x T3 = T3 + T4

Les triangles dans le cercle :

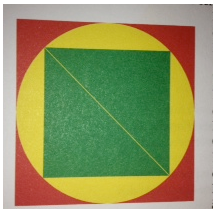
On ajoute le cadre d'un cercle dont le diamètre est égal au côté du triangle T1.
Dans ce cadre rentrent 6 triangles T4, on obtient un petit hexagone inscrit dans le cercle.
Opérations : 6 x T4 = 3 x le losange = 1 hexagone ; donc : T1 + losange = 1 hexagone

Le triangle divisé en 3 parties :
On peut construire un autre hexagone plus grand avec T1 et 3 T3.
Opérations : le grand hexagone - le petit hexagone = 2 x T4 = le losange
Dans le grand hexagone, le cercle (dont le diamètre est égale au triangle T1) est inscrit (dans lequel est inscrit le petit hexagone).
Découverte : dans le petit hexagone s'inscrit un triangle équilatéral aux dimensions inconnues.

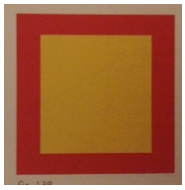
Le nouveau triangle équilatéral :
On sait que le petit hexagone est égal à 6 T4 et que le nouveau triangle est égal à la moitié soit 3 T4.
On sait que T1 = 4 T4.
Théorèmes :
1. le triangle équilatéral inscrit dans un cercle équivaut au 3/4 du triangle équilatéral qui a comme côté le diamètre du cercle.
2. si de 2 triangle équilatéraux, le côté de l'un correspond à la hauteur de l'autre, le 1ier est équivalent aux 3/4 de ce dernier.



3. le carré inscrit dans le cercle est équivalent à le moitié du carré circonscrit.

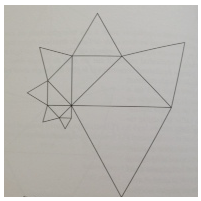


On obtient un cadre harmonieux :



Les cadres :
On peut obtenir le même chose avec des triangles équivalents (de moitié) ; ou bien en superposant des triangles équilatéraux équivalent au 3/4.
Et en superposant toutes les figures étudiées (triangles, hexagones, rectangles, losanges), on obtient des décorations semblables à celles de Giotto, d'une harmonie parfaite.

Le théorèmes analogues :
Le triangle équilatéral construit sur l'hypoténuse est équivalent à la somme des triangles équilatéraux construits sur les côtés de l'angle droit.
Donc dans le cas où le triangle est rectangle isocèle, on obtient deux triangles équilatéraux équivalents de moitié. Et en prolongeant cette construction, on aura :

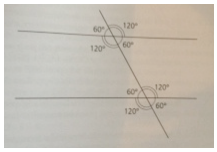


5. Le disque

Il faut distinguer les lignes : cercle ou circonférence et l'espace : disque.
La portion du disque qui part du centre et qui est limitée par 2 rayons est le secteur.
Une ligne qui ne passe pas par le centre est une corde.
Une droite qui traverse le cercle est une sécante, celle qui touche le cercle en un point, une tangente.
2 cercles peuvent être tangents ou sécants.

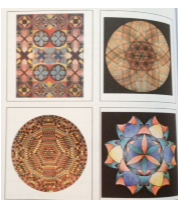
Le matériel :
Un disque de 10 cm de diamètre divisé en parties égales par des rayons avec le cadre.
Le disque peut être divisé en 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ou 10.
En réunissant les extrémités des rayons, on obtient des polygones régulier inscrit dans le cercle.
Plus le nombre de côtés du polygone augmente, plus leur longueur diminue.
On peut pousser le découpage en 360 parties qu'on appelle des degrés : le cercle devient alors un instrument de mesure, le rapporteur.

Les angles des figures :
Un triangle équilatéral a 3 angles égaux égale à 60° (leur somme est égale à 180°).
L'hexagone composé de 6 triangles équilatéraux à 6 angles égaux égale à 120°.
Le carré à 4 angles égaux égale à 90°.
Un triangle rectangle isocèle a un angle égale à 90° et les deux autres égale à 45°.
Le triangle rectangle issu de la moitié d'un triangle équilatéral a un angle égale à 90°, l'autre à 60° et le troisième à 30°.
Donc la somme des angles d'un triangle est toujours égale à 2 angles droits (180°).
En prolongeant, un quadrilatère a la somme de ses angles égale à 360°.
A partir d'un trapèze, on peut étudier les correspondances entre les angles alternes-internes et opposés par le sommet :



Théorème :
La somme des angles d'un polygone régulier est égale à autant de fois 2 angles droits qu'il y a de côtés moins 4 angles droits.

Dessins décoratifs :



Les fractions :

C'est une partie de l'unité.
La moitié = 1/2, le tiers = 1/3, ...
A partir des secteurs du disque, on peut les lier aux degrés : 1/2 = 180°, 1/3 = 120°, ...
Pour additionner des fractions, il faut que le dénominateur soit le même, puis on ajoute les numérateurs : 1/4 +1/4 = 2/4 = 1/2 (là, nous avons réduit 2/4 en 1/2).
En utilisant le matériel, on peut comprendre comment additionner des fractions de dénominateurs différents, ce que l'on appelle : la recherche du dénominateur commun.
Soit 1/2 + 2/5. On sait que 1/5 = 2/10 et 1/2 = 5/10. Donc :
1/2 + 2/5 = 1/2 + 1/5 + 1/5 = 5/10 + 2/10 + 2/10 = 9/10.

Fractions de fractions :
Si on veut prendre la moitié de 1/3, on voit avec les formes des secteurs que c'est égale à 1/6 :
1/3 x 1/2 = 1/6.

Le contrôle de l'erreur :
En passant les fractions en degrés, on peut contrôler son résultat.

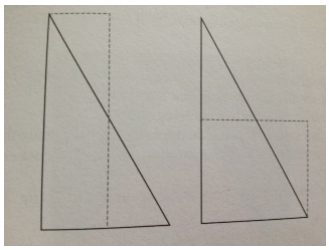
Fractions décimales - nombres décimaux :
Le matériel sera le même que le rapporteur : un cadre mais les subdivisions seront de 100 (et non de 360).
Là, les fractions seront correspondantes à un nombre décimal : 1/2 = 0,5 ; 1/4 = 0,25 ; ...

6. Application des équivalences

C'est la mesure des superficies qui date des Égyptiens qui durent résoudre le problème de la mesure des terres qui se trouvaient autour des berges du Nil. Comme elles étaient immergées chaque année, les limites disparaissaient avec la crue, donc ils ont pensé aux mesures pour établir les limites des terrains.

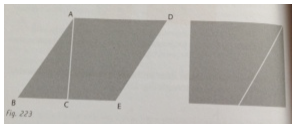
On connaît la mesure de la surface d'un rectangle (l X L) ; il va falloir avec le matériel trouver des rectangles dans les autres figures.

Le triangle :



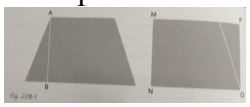
(base x hauteur) : 2

Le losange :



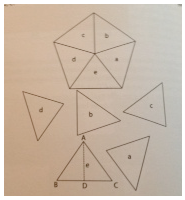
base x hauteur

Le trapèze :



base x hauteur

Le polygone régulier :



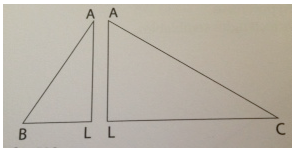
(périmètre x hauteur d'un triangle (apothème)) : 2

Le disque :
Comme pour le polygone : (circonférence x rayon) : 2
Mais comment trouver la circonférence ? En faisant rouler un cercle sur une droite, si le cercle a un diamètre de 10 cm, le segment obtenu sera de 31,4 cm.
Donc la relation entre le diamètre et la circonférence est de 3,14 (Π)
-> Π x R x R

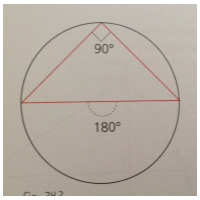
7. Raisonnements

Pythagore (il y a 2500 ans) s'est intéressé à l'angle droit qui est unique.
Il y a 2 directions absolues : l'horizontale et la verticale.

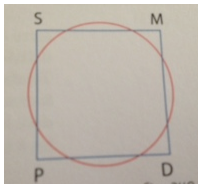
Le triangle rectangle :
Soient r, l'angle droit, a et b, les 2 autres. On a : r = a + b.
Si on trace la hauteur d'un triangle rectangle ABC en A, on a : BL/LA = LA/LC



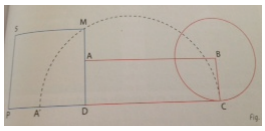
Autres raisonnements sur l'angle droit :
En jouant avec le cercle, on obtient 2 théorèmes :
- un angle inscrit (c'est-à-dire dont le sommet est sur le cercle) est égale à la moitié de l'angle au centre qui intercepte le même arc de cercle entre ses 2 côtés.
- l'angle inscrit dans un demi cercle est un angle droit.



La quadrature du cercle :
Comment trouver un carré équivalent au disque ? (solution apportée par Lubienska en 1929)

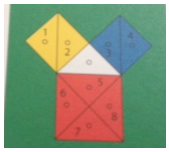


Π = 3,14
Faisons la construction suivante :

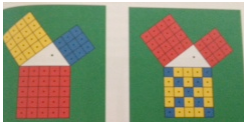


avec AB = 3,14 x BC ; AD = A'D.
On obtient SMPD équivalent au disque.

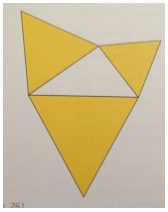
Raisonnement sur les triangles rectangles :
Après la mort de Pythagore, ses disciples ont trouvé : "le carré construit sur l'hypoténuse est équivalent à la somme des carrés construits sur les 2 autres côtés".

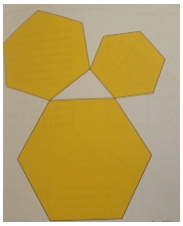


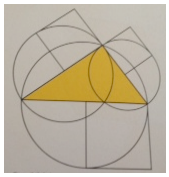
Ceci peut se démontrer facilement avec les matériel, par exemple :



En prolongeant, on obtient les mêmes équivalences avec des triangles équilatéraux, des polygones ou des cercles :







Par SBM06, téléchargé sur le blog
http://melimelune.eklablog.com