

## LONGUEUR, AIRE ET VOLUME

### I. Les programmes

#### 1. Cycle des apprentissages premiers

L'élève commence à mesurer. Le programme précise :

« Le nombre permet aussi, par son aspect ordinal, de décrire des hiérarchies et des rangements... »

Les activités porteront sur la comparaison de certaines dimensions des objets en utilisant un étalon. »

« Dessiner, écrire, dénombrer, mesurer, décrire l'espace, se repérer dans l'espace et dans le temps constituent des instruments puissants de la connaissance. »

On peut donc attendre des élèves du cycle 1 qu'ils sachent :

- comparer ou ranger des objets selon leur longueur ;
- comparer des objets selon leur masse ;
- comparer deux récipients selon leur contenance.

Le vocabulaire : plus long, court, plus long, plus que, moins que, est progressivement installé à partir de situations variées.

#### 2. Cycle des apprentissages fondamentaux

Les concepts de grandeur et de mesure prennent du sens grâce à des situations vécues par les élèves et aux problèmes auxquels elles donnent lieu. Les problèmes rencontrés dans cette rubrique sont aussi l'occasion d'utiliser, de renforcer et de relier entre elles les connaissances numériques et géométriques.

Au cycle 2, les élèves étudient la notion de longueur et sont sensibilisés à celles de masse et de durée. Ils commencent à appréhender la notion de volume par le biais de la contenance de certains récipients. Ils apprennent à repérer le temps grâce aux calendriers et aux montres.

Les situations qui permettent de construire les concepts de grandeur et de mesure peuvent être traitées par diverses méthodes, compte tenu des contraintes :

- par comparaison directe : juxtaposition, superposition, mise en regard des deux objets, utilisation de la balance Roberval pour les masses ;
- par comparaison indirecte : recours à un objet intermédiaire, à un instrument de report (longueur servant de gabarit, masse fixée) ou

transformation de l'un des objets pour le rendre comparable à l'autre (par exemple, une ligne non rectiligne peut être transformée en ligne rectiligne) ;

- par mesurage, en utilisant un étalon arbitraire ou conventionnel (la grandeur unité) et en associant un nombre à la grandeur (le nombre de reports nécessaires de la grandeur unité).

Les unités utilisées sont, dans un premier temps, choisies arbitrairement par les élèves (par exemple, longueur d'un crayon, masse d'une bille). Outre la nécessité de disposer d'une unité pour mesurer, les élèves prennent également conscience que le choix de l'unité dépend de l'objet à mesurer. Le passage aux unités usuelles (mètre, centimètre, gramme, kilogramme) doit apparaître comme lié à la nécessité de communiquer, avec des références communes à tous. Il est important que l'élève repère la catégorie de grandeur à laquelle fait référence une situation donnée et qu'il soit capable de préciser les unités appropriées (mètre et centimètre pour les longueurs, gramme et kilogramme pour les masses, heure et minute ou mois, semaine et jour pour les durées). Aucune virtuosité sur les conversions d'unités n'est demandée. Il est attendu une maîtrise raisonnée des unités citées, dans les situations où leur usage est pertinent.

- Compétences visées

- Longueurs et masses

- Comparer des objets selon leur longueur, par un procédé direct ou indirect.
- Choisir l'instrument le plus approprié pour comparer les longueurs de plusieurs objets (réels ou représentés).
- Utiliser la règle graduée en cm pour donner une mesure approchée d'un segment (ou d'une ligne brisée).
- Utiliser la règle graduée en cm pour construire un segment (ou une ligne brisée) de longueur donnée.
- Utiliser le mètre ruban ou le mètre de couturière dans une activité de mesurage.
- Utiliser une balance Roberval pour comparer des masses.
- Utiliser une balance Roberval ou une balance à lecture directe pour effectuer des pesées simples faisant intervenir des unités usuelles de masse ou pour réaliser des objets de masses données.
- Choisir l'unité appropriée pour exprimer le résultat d'un mesurage (cm ou m pour une longueur, kg ou g pour une masse).
- Connaître les relations entre m et cm, entre kg et g.

- Volumes (contenances)

- Comparer la contenance de deux récipients en utilisant un récipient étalon.

- Connaître l'unité usuelle litre (L).

- Repérage du temps : calendriers, montres

- Connaître les jours de la semaine et les mois de l'année.

- Lire les informations apportées par un calendrier.

- Connaître la relation entre h et min.

- Utiliser un calendrier, un sablier ou un chronomètre pour comparer ou déterminer des durées.

- Choisir les unités appropriées pour exprimer le résultat d'un mesurage de durée (jour, heure, minute, seconde).

### 3. Cycle des approfondissements

Les grandeurs étudiées au cycle 3 sont les longueurs, les aires, les masses, les volumes (aspect contenance), les durées. Une première approche des angles est envisagée. Les activités proposées aux élèves du cycle 3 se situent dans le prolongement de celles du cycle 2. Il s'agit de résoudre des problèmes, réels ou évoqués, en utilisant des procédés directs, des instruments de mesure, des estimations ou des informations données avec les unités usuelles. Les activités scientifiques et technologiques fournissent un champ d'application privilégié pour ce domaine.

On peut ainsi distinguer trois catégories d'activités :

- celles où il s'agit de comparer des objets selon une grandeur ou d'opérer sur des grandeurs, sans mesurer, en utilisant des procédés de comparaison adaptés : superposition pour les longueurs ou les angles, équilibre des plateaux de la balance Roberval pour les masses, découpage, recollement et superposition pour les aires, transvasement pour les contenances ;
- celles où il s'agit de mettre en relation des objets visibles et la mesure d'une des grandeurs qui peuvent leur être attachées (mesure exacte ou approchée, exprimée à l'aide d'une ou plusieurs unités) ;
- celles dans lesquelles un mesurage effectif n'est pas possible ou n'est pas nécessaire : des informations sont disponibles sur les objets considérés et des calculs permettent d'obtenir la mesure d'une grandeur attachée à ces objets. Par exemple, l'aire d'un rectangle obtenue à partir de ses dimensions, une durée calculée à partir des horaires de début et de fin, ...

- Compétences visées
  - Longueurs, masses, volumes (contenances), repérage du temps, durées
    - Utiliser des instruments pour mesurer des objets physiques ou géométriques.
    - Choisir l'unité appropriée pour exprimer le résultat d'un mesurage.
    - Lire l'heure sur une montre à aiguilles ou une horloge.
    - Estimer une mesure (ordre de grandeur).
    - Exprimer par un nombre ou un encadrement le résultat d'un mesurage, l'unité (ou les unités) étant imposée(s).
    - Construire ou réaliser un objet dont des mesures sont données.
    - Connaître les unités légales du système métrique : de longueur (mètre, ses multiples et ses sous-multiples usités), de masse (gramme, ses multiples et ses sous-multiples usités), de contenance (litre, ses multiples et ses sous-multiples usités).
    - Utiliser les équivalences entre les unités usuelles de longueur, de masse, de contenance.
    - Utiliser le calcul pour obtenir la mesure d'une grandeur.
    - Effectuer des calculs simples sur les mesures, en tenant compte des relations entre les diverses unités correspondant à une même grandeur. En particulier, calculer le périmètre d'un polygone ; calculer une durée à partir de la donnée de l'instant initial et de l'instant final.
  - Aires
    - Classer et ranger des surfaces (figures) selon leur aire, soit par superposition des surfaces, soit par découpage et recollement des surfaces, soit par pavage des surfaces avec une surface de référence.
    - Construire une surface qui a même aire qu'une surface donnée (et qui ne lui est pas superposable).
    - Différencier aire et périmètre d'une surface, en particulier savoir que deux surfaces peuvent avoir la même aire sans avoir nécessairement le même périmètre et qu'elles peuvent avoir le même périmètre sans avoir nécessairement la même aire.
    - Mesurer l'aire d'une surface par un pavage effectif à l'aide d'une surface de référence (d'aire une unité) ou grâce à

l'utilisation d'un réseau quadrillé (le résultat étant une mesure exacte ou un encadrement).

- Calculer l'aire d'un rectangle dont l'un des côtés au moins est de dimension entière.
- Connaître et utiliser les unités usuelles :  $\text{cm}^2$ ,  $\text{dm}^2$ ,  $\text{m}^2$  et  $\text{km}^2$ .
- Connaître et utiliser quelques égalités :

$$1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2$$

$$1 \text{ dm}^2 = 100 \text{ cm}^2$$

$$1 \text{ km}^2 = 1\,000\,000 \text{ m}^2.$$

### - Angles

- Comparer des angles dessinés par superposition ou en utilisant un gabarit.
- Comparer des angles situés dans une figure (angles intérieurs d'un triangle, d'un quadrilatère...).
- Reproduire un angle donné en utilisant un gabarit ou par report d'un étalon.
- Tracer un angle droit, ainsi qu'un angle égal à la moitié, le quart ou le tiers d'un angle droit.

## II. Longueur et périmètre

### 1. Principales compétences et difficultés

Compétences	Principales difficultés ou erreurs
<p>L'élève doit savoir comparer des objets par rapport à leur longueur :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- en les superposant ;</li> <li>- en utilisant un objet intermédiaire (par exemple une ficelle pour comparer deux arêtes de la table) ;</li> <li>- en effectuant des transformations licites : par exemple en reportant les différentes longueurs des segments qui forment une ligne brisée sur une droite ;</li> <li>- en utilisant une unité de grandeur donnée.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Une des difficultés liée à ces compétences est directement due au fait que certains élèves sont « non conservants ». Ils sont donc dans l'incapacité de repérer les transformations licites (déplacement, déformation, ...). D'une certaine manière les transformations licites ne peuvent être repérées que si la notion est constituée chez l'élève.</li> <li>• Des difficultés de manipulation peuvent apparaître par exemple dans le cas d'utilisation de ficelle.</li> </ul>

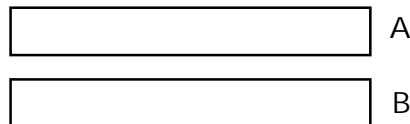
Compétences	Principales difficultés ou erreurs
L'élève doit savoir mesurer un segment avec un double décimètre.	Erreurs liées au positionnement du double décimètre ou à la lecture des millimètres.
L'élève doit savoir calculer le périmètre de figures, soit à partir de mesures qu'il peut effectuer ou qui lui sont indiquées sur la figure, soit en utilisant une ficelle ou un quadrillage.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• L'élève a une représentation du périmètre comme étant le résultat obtenu par un calcul à partir d'une formule.</li> <li>• L'élève pense que, pour calculer un périmètre, il faut ajouter toutes les dimensions qui lui sont données.</li> <li>• Si la figure est représentée sur un quadrillage, l'élève compte les carreaux « intérieurs » ou « extérieurs ».</li> <li>• Si la figure est formée de la réunion de deux figures dont on connaît le périmètre, l'élève aura tendance à ajouter les périmètres de chacune des figures.</li> <li>• Dans le cadre d'activités de comparaison de périmètre, l'élève peut comparer les aires et induire la comparaison des périmètres en appliquant le théorème en acte : « plus l'aire d'une figure est grande, plus son périmètre est grand ».</li> </ul>
L'élève doit savoir estimer la longueur d'un objet.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Par manque d'expériences sociales ou scolaires, l'élève n'a aucune idée des mesures de certaines longueurs : longueur d'un terrain de football, dimension de sa chambre...</li> </ul>
L'élève doit savoir effectuer des conversions d'unités.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ici peuvent intervenir des erreurs liées à l'écriture décimale des nombres (multiplication ou division par 10, 100, ...) ou à la méconnaissance des relations entre les différentes unités.</li> </ul>
L'élève doit savoir résoudre des problèmes faisant intervenir le périmètre et présenter les résultats avec une approximation convenable sous forme décimale ou complexe (7 m 63 cm).	<ul style="list-style-type: none"> <li>• L'élève ne sait pas si la grandeur qui intervient dans le problème est l'aire ou le périmètre.</li> <li>• Si le résultat a été trouvé à l'aide de la calculatrice, l'élève est tenté d'indiquer tous les nombres affichés par la calculatrice.</li> </ul>

## 2. Conservation des longueurs

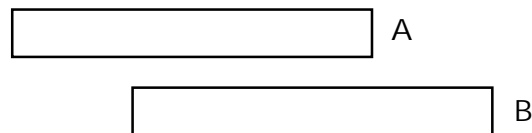
Les études de Piaget ont mis en évidence qu'au stade des opérations concrètes la conservation des longueurs se met en place. Deux types d'expériences mettent en évidence cette conservation.

- Une première expérience consiste à proposer à l'enfant l'exercice suivant :

L'enseignant place devant l'élève deux bandes A et B, exactement l'une sous l'autre :



Puis, il déplace la bande B, vers la droite (sous le regard de l'élève) :



Réponse : Dans le premier cas, l'élève affirme que « B est aussi long que A ».

Dans le second cas, il affirme que « B est plus long que A ».

Les travaux de Piaget permettent de formuler des hypothèses plus précises pour expliquer cette réponse. A ce moment de son développement cognitif, l'enfant de CE2 ne parvient pas à isoler le concept de longueur (comme propriété invariante de certains objets) et d'espace occupé « vers la droite » (si ça se termine plus loin, c'est plus long). Cette difficulté provient en partie du fait l'enfant ne parvient pas, en pensée, à annuler le déplacement opéré sur la bande B par un déplacement imaginaire en sens inverse.

- Une deuxième expérience consiste à proposer par exemple aux enfants une baguette de 16 cm et quatre baguettes de 4 cm. On place tout d'abord devant l'enfant la baguette de 16 cm et en dessous celles de 4 cm pour faire constater l'égalité des longueurs (figure 1) ; puis on propose à l'élève la disposition suivante avec les mêmes baguettes (figure 2) :

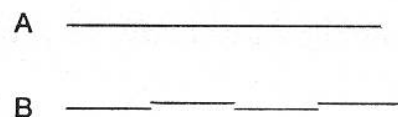


Figure 1



Figure 2

C'est seulement vers 7 ans (mais parfois beaucoup plus tard) que l'enfant perçoit que les chemins de la figure 2 sont de même longueur.

### 3. Les variables didactiques

- Pour les activités de comparaison des longueurs :
  - La nature des objets : objets physiques ou dessins, objets rectilignes ou courbes.
  - La taille de ces objets : ces objets appartiennent-ils au micro-espace ou méso-espace ?
  - Ces objets sont-ils déplaçables ou non ? transformables ou non ?
  - Le matériel dont dispose l'élève : règle graduée ou non, compas, ficelle.
- Pour les activités de recherche de périmètre :
  - La nature de la figure : figure simple, rectangle, carré, losange... pour lesquelles une formule peut être appliquée directement ou figure complexe.
  - La taille de la figure.
  - Le fait que l'élève puisse mesurer ou non certaines dimensions.
  - Le matériel dont dispose l'élève : ficelle, règle graduée...
  - Le fait que des dimensions inutiles figurent ou non sur le dessin.
  - Le fait que certaines diagonales de la figure soient tracées.
  - Le fait que la figure soit tracée sur papier quadrillé ou non.

### III. Aire

Le fait que l'aire et le périmètre soient deux grandeurs d'un même objet (la surface) va être à l'origine de nombreuses erreurs d'élèves renforcées par le fait que :

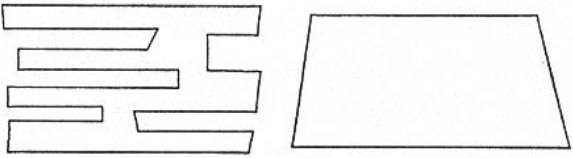
- les unités d'aire :  $\text{cm}^2$ ,  $\text{m}^2$ , ... rappellent celles du périmètre : cm, m, ... ;
- les méthodes de changement d'unités sont souvent très proches ;
- il n'existe pas d'instrument qui permettent de mesurer directement des aires, contrairement à ce qui se passe pour le périmètre : pour calculer des aires on est obligé de déterminer des dimensions de type longueur ;
- une surface est d'abord caractérisée par son contour, ligne qui a une longueur.



L'aire, contrairement au périmètre, doit être abordée sous deux aspects :

- l'aspect unidimensionnel : c'est celui que l'on rencontre quand on demande de comparer des aires par pavage, par recoupage, recollement...
- l'aspect bidimensionnel : c'est celui que l'on rencontre quand on calcule des aires en effectuant des produits de longueurs

### 1. Principales compétences et difficultés

Compétences	Principales difficultés ou erreurs
<p>L'élève doit savoir comparer des aires :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- soit directement par superposition ;</li> <li>- soit par découpage et recollement ;</li> <li>- soit en utilisant une unité de mesure (aspect unidimensionnel de l'aire).</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Des difficultés peuvent être liées au fait que l'élève n'est pas conservant des surfaces.</li> <li>• Suite à une comparaison de périmètres, l'élève peut induire la comparaison des aires en référence au théorème en acte : « plus le périmètre d'une figure est grand, plus son aire est grande ».</li> <li>• L'élève pense que seul le carré peut être une unité acceptable.</li> <li>• L'élève pense qu'on ne peut pas mesurer l'aire d'un triangle avec une unité carrée car celle-ci ne permet pas de recouvrir exactement cette surface.</li> <li>• L'élève pense que des figures qui ne sont pas directement superposables ne peuvent pas avoir la même aire.</li> <li>• L'élève rencontre des difficultés de manipulation pour paver une figure avec une grandeur unité donnée.</li> <li>• L'élève est tenté de « fermer » les figures concaves pour comparer leur aire. Dans ce cas, l'élève dira que la figure (1) a une aire supérieure à la figure (2).</li> </ul> <div style="text-align: center;">  <p>Figure (1)                      Figure (2)</p> </div>

Compétences	Principales difficultés ou erreurs
<p>L'élève doit savoir déterminer l'aire d'une figure à partir de ses dimensions :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- soit en appliquant une formule ;</li> <li>- soit en décomposant la figure en figures simples (celles pour lesquelles on connaît des formules pour calculer les aires) ;</li> <li>- soit en procédant par soustraction.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• L'élève applique une formule erronée.</li> <li>• Cette technique nécessite de réaliser une analyse de la figure.</li> <li>• Souvent cette technique nécessite un repérage de sur-figures.</li> </ul>
<p>L'élève doit savoir exprimer l'aire d'une figure avec une unité convenablement choisie.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Le calcul d'aire passe par l'utilisation d'unités de longueur. L'élève conserve souvent ces unités pour présenter son résultat.</li> </ul>
<p>L'élève doit savoir effectuer des conversions.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• L'élève utilise les techniques de conversion qu'il connaît pour les unités de longueur. Exemple : <math>2,5 \text{ m}^2 = 25 \text{ dm}^2</math>.</li> <li>Ces difficultés peuvent également être liées à celles que l'élève rencontre dans les calculs sur les décimaux.</li> </ul>
<p>L'élève doit savoir estimer la mesure de l'aire d'une surface.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ici les expériences sociales de l'élève sont souvent insuffisantes.</li> </ul>
<p>L'élève doit savoir résoudre des problèmes faisant référence au calcul de mesure d'aire.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• L'élève ne sait pas si la grandeur qui intervient dans le problème est l'aire ou le périmètre.</li> <li>• Si le résultat a été trouvé à l'aide de la calculatrice, l'élève est tenté d'indiquer tous les nombres affichés par la calculatrice.</li> </ul>

## 2. Conservation des aires

C'est seulement vers 7 ans que les enfants reconnaissent la conservation des aires.

### 3. Les variables didactiques

- Pour les activités de comparaison d'aires, les principales variables didactiques sont :
  - La nature des objets dont il faut comparer les longueurs : objets physiques ou objets représentés.
  - La taille de ces objets.
  - La possibilité de superposition directe ou non de ces objets.
  - La présence de quadrillage ou non dans le cas de figures.
  - La possibilité ou non de décomposer un objet pour reconstituer l'autre.
- Pour les activités de calcul de la mesure d'aires de figures, les principales variables didactiques sont :
  - La nature de la figure : figure simple (rectangle, carré, disque...) ou figure composée.
  - La possibilité ou non de décomposer la figure en éléments simples (dans ce dernier cas, on ne peut faire qu'un encadrement de la figure à partir d'un quadrillage).
  - Le fait que les dimensions utiles sont données ou non.
  - La mise à disposition ou pas d'un formulaire.

## IV. Autres grandeurs

### 1. Les volumes

Seule une première approche de cette grandeur est faite à l'école primaire à travers des travaux de comparaison des volumes par transvasement de liquide (on parle souvent de capacité).

Les seules unités étudiées sont le litre, ses multiples et sous-multiples. Les unités « en cube » sont abordées au collège ainsi que l'étude des formules de calcul de volume (approche tridimensionnelle). La conservation des volumes est atteinte assez tardivement, vers 11-12 ans.

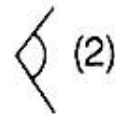
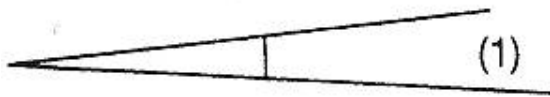
### 2. Les durées

Pour les durées, les principales difficultés sont liées au fait que les unités utilisées ne sont pas en base dix, mais en base soixante.

### 3. Les angles

Seule la comparaison d'angles et la mesure d'angles avec des gabarits donnés est au programme de l'école primaire.

Beaucoup d'élèves pensent que la mesure d'un angle est fonction de « la longueur » de ses côtés. Ainsi pour eux l'angle (1) est plus grand que l'angle (2).



L'usage du rapporteur est abordé au collège.

### 4. Les masses

Le travail sur cette grandeur doit commencer par un travail de comparaison de masses avant d'introduire les unités.