Ministère de l'Éducation Nationale
Centre National des Examens et Concours de l'Éducation

République du Mali
Un Peuple – Un But – Une Foi

BAC 2015

EXAMEN : ***Baccalauréat malien***
SÉRIE : ***TSEco*** **SESSION :** ***Juin 2015***
ÉPREUVE : ***Mathématiques*** **DURÉE :** ***3heures*** **COEF :** ***3***

Exercice 1 : $(6\ points)$

Une somme de 3 000 000 F est placée pendant 5 ans au taux annuel de 10%.

1. Quelle somme obtient – on à l'issue de ce placement ? **(2 pts)**
2. Si au bout de cette période de placement on souhaite obtenir 7 247 295 F, quelle somme doit – on placer aujourd'hui, aux taux de 10% ? **(1 pt)**
3. La somme d'aujourd'hui, 3 000 000 F aux de 10%, après combien de temps disposera – t – on d'une somme égale à 7 781 227 F **(1 pt)**
4. Si au bout de 3 ans la valeur acquise du placement est de 3 149 280 F à quel taux le placement a été effectué ? **(2 pts)**

Exercice 2 : $(6\ points)$

Dans cet exercice tous les résultats seront donnés sous forme de fractions.

Une urne contient 30 boules numérotées de 1 à 30 indiscernables au toucher.

1. Indique les numéros qui sont multiples de 3 et de 5. **(1 pt)**
2. On tire au hasard une boule de l'urne. Calculer :
   - **a.** La probabilité que le numéro tirée soit multiple de 3 et de 5. **(1,5 pt)**
   - **b.** La probabilité que le numéro tirée soit multiple de 3 ou de 5. **(1,5 pt)**
3. On tire au hasard 3 boules successivement et avec remise.
   Calculer la probabilité d'obtenir au moins une foi un numéro multiple de 3 et de 5. **(2 pts)**

Exercice 3 : $(8\ points)$

A. On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = (2x + 10)e^{-0,5x+1}$

1. On note f' sa fonction dérivée.
   - **a.** Justifier que pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$: $f'(x) = (-x - 3)e^{-0,5x+1}$ **(0,5 pt)**
   - **b.** Étudier le sens de variation de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$. **(1 pt)**
2. Justifier que la fonction F définie sur $[0\ ;+\infty[$ par : $F(x) = (-4x - 28)e^{-0,5x+1}$ est une primitive de f sur le même intervalle. **(0,5 pt)**
3. Calculer l'intégrale $I = \int_4^6 f(x)dx$ **(on donnera la arrondie à 0,01 près) (1 pt)**

B. La demande de produits à base du beurre de karité fabriqués par une association féminine est modélisée par la fonction f étudiée dans la partie **A.).** Le nombre $f(x)$ représente la quantité demandée, exprimée en milliers de produits, lorsque le prix unitaire est égal à x centaines de francs CFA

1. **a.** Calculer le nombre de produits demandés, à l'unité près lorsque le prix unitaire est fixé à 400 f CFA. **(0,5 pt)**
   b. Calculer le nombre de produits demandés, à l'unité près lorsque le prix unitaire est fixé à 600 f CFA. **(0,5 pt)**
2. Déterminer la demande à une unité près, lorsque le prix unitaire est compris entre 400 et 600f CFA. **(1 pt).**

C. L'élasticité de la demande est exprimée par la fonction E définie par : $E(x) = x\ \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ (En économie, l'élasticité de la demande exprime l'effet des variations du prix de vente un produit sur le niveau de demande de ce produit).

1. Vérifier que, pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[; E(x) = -\ \dfrac{x^2+3x}{2x+10}$ **(2 pts)**

2. Calculer le prix pour lequel l'élasticité est égale à -2, c'est – à – dire qu'il s'agit de résoudre $E(x) = -2$ **(1 pt).**

Correction du Bac Session de Juin 2015 Série : TSEco

Exercice 1 :

Méthode en appliquant l'intérêt simple

Une somme de 3 000 000F est placée pendant 5ans au taux annuel de 10%.

1. La somme qu'on obtient à l'issue de ce placement est :
   $v_a = C + I$ avec $I = Ctn$ $I =$ intérêt ; $C =$ capital ; $t =$ taux ;
   $v_a = C + Ctn$ $n =$ durée ; $v_a =$ valeur acquise
   $v_a = 3\,000\,000 + 3\,000\,000 \times \frac{10}{100} \times 5 = 4\,500\,000\text{F}$ **(2 pts)**
2. La somme qu'on doit placer est :
   $v_a = 7\,247\,295\text{F}$; $C = ?$; $t = 10\%$; $n = 5\text{ans}$
   $v_a = C(1 + tn) \Longrightarrow C = \frac{v_a}{1+tn} \Longrightarrow C = \frac{7\,247\,295}{1+0{,}1\times 5} = 4\,831\,530\text{F}$
   Pour obtenir 7 247 295F , il doit placer aujourd'hui, au taux de 10% une somme de 4 831 530F. **(1 pt)**
3. Le temps qu'on doit disposer est :
   $C = 3\,000\,000$; $t = 10\%$; $n = ?$; $v_a = 7\,781\,227\text{F}$
   $v_a = C(1 + tn) \Longrightarrow n = \frac{v_a - C}{Ct} \Longrightarrow n = \frac{7\,781\,227 - 3\,000\,000}{3\,000\,000\times 0{,}1} = 15\text{ans } 11\text{mois } 7\text{jours}$ **(1 pt)**
   Le temps qu'il disposera d'une somme égale à 7 781 227F est de : 15ans 11mois 7jours
4. Le taux de placement qu'on doit effectuer est :
   $n = 3\text{ans}$; $v_a = 3\,149\,280\text{F}$; $C = 3\,000\,000$; $t = ?$
   $v_a = C + Ctn \Longrightarrow t = \frac{v_a - C}{Cn} \Longrightarrow t = \frac{3\,149\,280\text{F} - 3\,000\,000}{3\times 3\,000\,000} \Longrightarrow t = 0{,}016 \Longrightarrow t = 1{,}6\%$. **(2 pts)**

Méthode en appliquant l'intérêt composé

1. La somme obtenue à l'issue de ce placement :
   $C_5 = 3.000.000(1 + 10\%)^5 = 3.000.000(1{,}1)^5 = 4.831.530\ F$ **(2 pts)**
2. La somme que l'on doit placer aujourd'hui :
   $C_0 = C_n(1 + i)^{-n}$
   $C_0 = C_5(1 + i)^{-5} = 7.247.295(1{,}1)^{-5} = 4.500.000\ F$ **(1 pt)**
3. Déterminons cette durée de placement.
   $C_n = C_0(1 + i)^n \Leftrightarrow 7.781.227 = 3.000.000(1{,}1)^n$
   $$\Leftrightarrow \frac{7.781.227}{3.000.000} = (1{,}1)^n \Leftrightarrow ln\left(\frac{7.781.227}{3.000.000}\right) = n \ln(1{,}1)$$ **(0,25 pt)**
   $$\Longrightarrow n = \frac{ln\left(\frac{7.781.227}{3.000.000}\right)}{\ln(1{,}1)} = 9{,}999.999 \cong 10$$ **(0,25 pt)**
   D'où $n = 10\ ans$ **(0,50 pt)**
4. Le taux de placement effectué
   $C_n = C_0(1 + i)^n \Leftrightarrow 3.149.280 = 3.000.000(1 + i)^3$ **(0,50 pt)**
   $$\Leftrightarrow \frac{3.149.280}{3.000.000} = (1 + i)^3$$
   $$\Leftrightarrow (1{,}04976)^{1/3} = 1 + i \Leftrightarrow (1{,}04976)^{1/3} - 1 = i \Longrightarrow 0{,}016318 = i$$ **(0,50 pt)**
   D'où $t = 1{,}63\%$. **(1 pt)**

Exercice 2 :

Une urne contient 30 boules numérotés de 1 à 30

1. Les numéros qui sont multiples de 3 et de 5 sont : $\{15\ ;\ 30\}$ **(1 pt)**

2. Calculons :

a. la probabilité que le numéro de la boule tirée soit multiple de 3 et de 5 est : $P_1 = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$ **(1,50 pt)**

b. la probabilité que le numéro de la boule tirée soit multiple de 3 ou de 5 est :
Les numéros qui sont multiples de 3 ou de 5 sont :

$\{3\,;5\,;6\,;9\,;10\,;12\,;15\,;18\,;20\,;21\,;24\,;25\,;27\,;30\}$ **(0,50 pt)** $P_2 = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$ **(1 pt)**

<u>Autre méthode de réponse b.)</u> :
Soit A l'évènement « le numéro de la boule tirée soit multiple de 3 » **(0,25 pt)**
Soit B l'évènement « le numéro de la boule soit multiple de 5 » **(0,25 pt)**

$P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ **(0,25 pt)** $P(B) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$ **(0,25 pt)**

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ **(0,25 pt)** $= \frac{10}{30} + \frac{6}{30} - \frac{2}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$ **(0,25 pt)**

3. Calculons la probabilité d'obtenir au moins une fois un numéro multiple de 3 et de 5 :

$P_3 = \frac{3(2^1 \times 28^2 + 2^2 \times 28^1) + 2^3 \times 28^0}{30^3} = \frac{5\,048}{27\,000} = \frac{631}{3\,375}$ **(2 pts)**

<u>Autre méthode de réponse 3.)</u>
Soit E l'évènement « obtenir au moins une fois un numéro multiple de 3 et de 5 »
$\bar{E}$ l'évènement « ne pas obtenir un numéro multiple de 3 et de 5 »

$P(\bar{E}) = \frac{28^3}{30^3}$ **(0,50 pt)** $P(E) = 1 - P(\bar{E})$ **(0,50 pt)** $= 1 - \frac{28^3}{30^3} = \frac{30^3 - 28^3}{30^3} = \frac{5\,048}{27\,000} = \frac{631}{3\,375}$ **(1 pt)**

<u>Exercice 3</u> :

A. On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = (2x+10)e^{-0{,}5x+1}$

1. a. Justifions que $\forall\, x \in [0\,;\,+\infty[$ par : $f'(x) = (-x-3)e^{-0{,}5x+1}$

$f'(x) = 2e^{-0{,}5x+1} - 0{,}5(2x+10)e^{-0{,}5x+1} = (2-x-5)e^{-0{,}5x+1} = (-x-3)e^{-0{,}5x+1}$ **(0,50 pt)**

b. Étudions le sens de variation de f sur $[0\,;\,+\infty[$:

$\forall\, x \in [0\,;\,+\infty[\;;\; e^{-0{,}5x+1} > 0$ donc $f'(x)$ a même signe que $-x-3$ **(0,25 pt)**
On sait que pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[, -x-3 \leq 0$ **(0,25 pt)**
Donc $\forall\, x \in [0\,;\,+\infty[\; f'(x) < 0$ d'où f est strictement décroissante. **(0,50 pt)**

2. Justifions que F est une primitive de f sur $[0\,;\,+\infty[$:

$\forall\, x \in [0\,;\,+\infty[\; F'(x) = -4e^{-0{,}5x+1} - 0{,}5(-4x-28)e^{-0{,}5x+1}$
$= (-4+2x+14)e^{-0{,}5x+1} = (2x+10)e^{-0{,}5x+1}$

$\forall\, x \in [0\,;\,+\infty[\; F'(x) = f(x)$ d'où F est une primitive de f sur $[0\,;\,+\infty[$. **(0,50 pt)**

3. Calculons l'intégrale :

$I = \int_4^6 f(x)dx = [F(x)]_4^6$ **(0,50 pt)** $= F(6) - F(4) = -52e^{-2} + 44e^{-1} = 9{,}15$ **(0,50 pt)**

B. 1. a. Calculons le nombre de produits demandés à l'unité près lorsque le prix unitaire est fixé à $400\ F\ CFA$:

$f(4) = (2 \times 4 + 10)e^{-0{,}5\times 4+1} = 18e^{-1} = 6{,}622$

le nombre de produit demandés est $6{,}622 \times 1\,000 = 6\,622$. **(0,50 pt)**

b. Calculons le nombre de produits demandés à l'unité près lorsque le prix unitaire est fixé à $600F\ CFA$:

$f(6) = (2 \times 6 + 10)e^{-0{,}5\times 6+1} = 22e^{-2} = 2{,}977$

le nombre de produit demandés est $2{,}977 \times 1\,000 = 2\,977$ **(0,50 pt)**

2. Déterminons la demande moyenne à une unité près, lorsque le prix unitaire est compris entre 400 et 600$F\ CFA$:

$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ **(0,25 pt)** $\Leftrightarrow \mu = \frac{1}{6-4}\int_4^6 f(x)dx = \frac{1}{2} \times 9{,}15 = 4{,}575$ **(0,25 pt)**

la demande moyenne à une unité près, lorsque le prix unitaire est compris entre 400 et 600$F\ CFA$ est : $4{,}575 \times 1\ 000 = 4\ 575$. **(0,50 pt)**

C. On donne : $E(x) = x\frac{f\prime(x)}{f(x)}$

1. Vérifions que : $\forall\, x \in [0\,;\,+\infty[\quad E(x) = -\frac{x^2+3x}{2x+10}$

$E(x) = x\frac{(-x-3)e^{-0,5x+1}}{(2x+10)e^{-0,5x+1}}$ **(1 pt)** $\Rightarrow E(x) = \frac{-(x^2+3x)}{2x+10}$ **(1 pt)**

2. Calculons le prix pour lequel l'élasticité est égale à -2 :

$E(x) = -2 \Leftrightarrow -(x^2+3x) = -2(2x+10) \Leftrightarrow x^2 - x - 20 = 0$ **(0,25 pt)**

$\Delta = 81$; $x_1 = -4 \notin [0\,;\,+\infty[$; $x_2 = 5 \in [0\,;\,+\infty[$ **(0,50 pt)**

le prix pour lequel l'élasticité est égale à -2 est : 500 $F\ CFA$. **(0,25 pt)**