# Opérations sur les entiers dans le champ addition soustraction

L'enseignement du calcul additif et soustractif s'inscrit dans le cadre de l'apprentissage du calcul et ne peut être séparé de l'apprentissage de la numération décimale.

**Les compétences d'addition et de soustraction sur les nombres entiers naturels sont amorcées dès l'école maternelle.**

## Dans les programmes 2008

### Au cycle 2

**Nombre et calcul :** Les élèves mémorisent et utilisent les tables d'addition (…), apprennent les techniques opératoires de l'addition et de la soustraction (…) et apprennent à résoudre des problèmes faisant intervenir ces opérations

### Cycle 3

**Fractions simples et décimales :** écriture comme somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1, somme de deux fractions décimales ou de même dénominateur

**Calcul mental :** tables d'additions et multiplication, entrainement quotidien au calcul portant sur les 4 opérations permet une appropriation des nombres/leurs propriétés
**Calcul posé :** la maitrise d'une technique opératoire pour chacune des 4 opérations
**Calcul à la calculatrice :** objet d'une utilisation raisonnée en fonction de la complexité des calculs auxquels sont confrontés les élèves

## Compétences de fin de cycle :

### Cycle 2

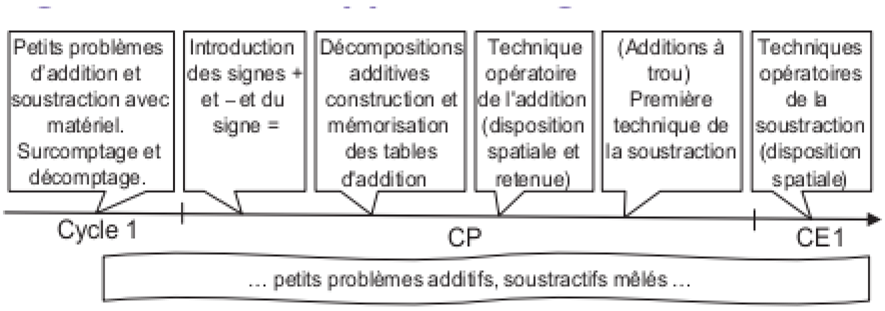
- Calculer : addition, soustraction
- Restituer et utiliser les tables d'addition
- Calculer mentalement en utilisant des additions, des soustractions

### Cycle 3

- Restituer les tables usuelles de l'addition
- Utiliser les techniques opératoires des 4 opérations sur les nombres entiers et décimaux
- Calculer mentalement en utilisant les 4 opérations

- Utiliser une calculatrice
- Estimer l'ordre de grandeur d'un résultat

## Progressions des apprentissages




## Les pistes épistémologies

**<u>L'addition peut être étudiée sous deux aspects :</u>**

- en tant qu'objet (pour elle-même)
- en tant qu'outil (pour résoudre des problèmes).

L'addition est une opération de base de l'arithmétique. Elle est l'action qui consiste à ajouter des éléments. Elle détermine la quantité totale d'objets suite à une mise en commun de deux ou plusieurs collections.

La soustraction peut être définie comme l'addition étendue dans $\mathbb{Z}$ car soustraire équivaut à additionner l'opposé.

## Vocabulaire :

- **Somme ou total :** résultat de l'addition. Une somme est un nombre. Total : plutôt utilisé lorsqu'il y a plus de deux termes à l'addition
- **Terme :** nombre figurant dans l'addition et séparé par un autre nombre par le signe +
- **Partition :** toute décomposition d'un nombre en somme de 2 ou plusieurs termes. On peut toujours trouver une partition d'un nombre. Elle n'est jamais unique.
- **Différence ou reste:** résultat de la soustraction. La différence est un nombre. Le reste est utilisé dans le langage courant.
- **Complément :** le complément d'un nombre est le nombre qu'il faut lui ajouter pour obtenir une unité de l'ordre immédiatement supérieur.

Il existe plusieurs termes pour désigner **une différence :** ce qu'il faut enlever, ce qu'il faut ajouter, ce qu'il reste, ce qu'il manque, ce qu'il y a en moins.

**Attention** : « moins que » et « moins » : moins que = comparaison entre deux collections. Moins = combinaison qui aboutit à un résultat.

## Propriétés de l'addition de deux entiers naturels

- **Associativité :** on peut associer les termes comme on veut, l'ordre n'importe pas : $a + b + c = a + (b + c) = (a + b) + c$
- **Commutativité :** dans une somme on peut changer l'ordre des termes : $a + b = b + a$
- **Zéro** est un élément neutre.

La soustraction n'est pas commutative et le zéro n'est pas neutre.

# Les pistes didactiques

## Classification des problèmes ERMEL selon la classification Vergnaud

### 1) Composition de deux états

- On transforme un état initial en un état final. La transformation peut être positive (gain) ou négative (perte). On recherche soit le composé (j'ai 8 roses et 7 iris, combien de fleurs en tout ?), soit une partie de celui-ci.

### 2) Transformation d'un état

- La transformation peut être positive ou négative.
- **Recherche de l'état final :** j'avais 7 billes et j'en ai gagné 9, combien est-ce que j'en ai en tout ? *Appelé également problème de réunion*
- **Recherche de l'état initial** (combien en avait-elle avant la partie ?)
- **Recherche de la transformation** (Combien en a t-elle gagné ?)

## 3) Comparaison d'états

- La comparaison peut être positive (plus que, plus loin que) ou négative (moins que)
- **Recherche de l'un des états :** Bernard a 54 voitures. Il en a 6 de moins que Charles. Combien Charles a-t-il de voitures ?
- **Recherche de la comparaison :** dans un magasin un jouet vaut 9,45€. Ce même jouet vaut 6.54€ dans un autre magasin. De combien est-il moins cher dans le deuxième magasin ?

## 4) Composition de transformations

- Recherche de la transformation composée : Gérard a joué deux parties de billes : à la première il en a gagné 8 et 6 à la deuxième. Combien en a t-il gagné au total?
- Recherche de l'une des composantes : aujourd'hui j'ai dépensé 30€ et je sais que ce matin j'ai dépensé 16 €. Combien ai-je dépensé dans l'après midi ?

## 5) De repérage sur une droite graduée

L'état initial et l'état final sont des positions avant ou après un déplacement. Ils peuvent consister à chercher la position finale, initiale ou la valeur du déplacement.

**Importance de la place de l'inconnue dans la structure relationnelle :**

Certains problèmes sont plus simples à résoudre car ils sont mobilisés dans leur sens premier avec l'addition comme moyen de chercher le résultat d'une augmentation et la soustraction comme moyen de chercher le résultat d'une diminution.
La reconnaissance de l'opération s'élabore ensuite sur la base de ces significations premières et sur plusieurs années.

*Il est difficile voire dangereux d'imposer aux élèves un type de schématisation ; l'enseignant peut proposer et voir l'utilisation qu'en font les élèves. Il est préférable de laisser les élèves utiliser leurs propres représentations (dessins, schémas).*
*Exemple : Arbres ou diagrammes pour les problèmes de composition de deux états*

*Droites numériques orientée pour les problèmes de transformation d'un état*
*Bâtons pour les problèmes de comparaison d'états*
*Hatier p 254 schémas.*

## Les procédures des élèves :

**Procédures s'appuyant sur une figuration de la réalité et sur un dénombrement** :
les objets évoqués sont représentés par des dessins ou des schémas. L'élève peut alors avoir recours au comptage un a un pour élaborer la réponse. Procédure personnelle.

**Procédures utilisant le comptage en avant ou en arrière** (éventuellement aidé des doigts) :
le calcul peut alors prendre la forme d'une suite de calculs qui rendent compte de l'élaboration progressive de la solution (par saut de 10 en 10 par exemple). Possibilité de laisser des traces écrites ou de tout faire mentalement. Procédure personnelle.

**Procédures utilisant un calcul sur des nombres, après reconnaissance du calcul à effectuer :**
recours à la traduction mathématique de l'énoncé : résolution experte. Il peut traduire l'énoncé en une équation. Il peut encore procéder par essais en faisant une hypothèse sur la réponse.

A partir d'un certain âge l'élève reconnaît directement le calcul à effectuer. Il dispose d'un « schéma de solution » ou « schéma général de procédure » qui lui évite le raisonnement. Cela marque un progrès dans sa conception de l'opération.

Lorsque ce n'est pas le cas, l'élève utilise :

- Un raisonnement sur le contexte où il transforme le problème posé pour se ramener à un type de problème connu.
- Un schéma intermédiaire sur la droite numérique qui lui suggère le calcul à faire
- Traduire l'énoncé par une équation qu'il résout par une addition à trous ou par comptage en avant (surcomptage).
- Des essais en faisant une hypothèse sur la réponse

## Les variables didactiques

- La taille des nombres, la taille des écarts.
- La configuration des nombres avec les nombres ronds qui rendent les calculs plus faciles (favorise le recours à des procédures) ou décimaux rendent les calculs plus difficiles surtout pour la soustraction
- La mise à disposition ou non d'outils de calcul.

## Les difficultés rencontrées par les élèves :

- La structure du problème et la place de l'inconnue : de cette identification dépendent les raisonnements mis en œuvre.
- La difficulté des calculs liée à la taille et à la nature des nombres (naturels ou décimaux en CM)
- L'ordre d'apparition des données dans le texte
- La présence de mots souvent inducteurs d'une opération déterminée : plus, total, augmente sont souvent des inducteurs de l'addition/ moins, différence, reste, perd, sont des inducteurs de la soustraction.

## Compétences nécessaires au calcul de sommes et de différences

Les élèves doivent disposer du **répertoire additif (les tables d'addition)** en mémoire. Cette capacité à donner instantanément des résultats n'est assurée le plus souvent qu'au début du CE2. Cette maîtrise doit permettre de **reconnaître l'équivalence de résultats** (7 + 5 = 12 donc 12-7 = 5, objet d'apprentissage). Les résultats des tables doivent être mis en relation pour être plus facilement mémorisés : la compréhension facilite la mémorisation.

**L'apprentissage repose sur trois points d'appuis :**

- les décompositions faisant intervenir le nombre 5 (8 c'est 3 + 5)
- Les compléments à dix (de 7 à 10 il y a 3)
- La commutativité de l'addition (si 8 + 3 est connu, 3 + 8 l'est aussi)

Le calcul posé de l'addition nécessite la **compréhension de la numération décimale** (notamment l'équivalence 1 d = 10 u, 1c = 10d) notamment pou l'utilisation des retenues. **L'obstacle de**

**l'addition posée** réside dans le principe des retenues en début d'apprentissage. La <u>technique opératoire est simple</u> :

procéder de droite à gauche, commençant aux unités, respectant les colonnes symbolisant la numération décimale.

<u>**Les prérequis :**</u> repérage de la valeur des chiffres, connaissance des résultats des tables d'addition et des décompositions.

**Le calcul posé de soustraction** nécessite la mise en œuvre de propriétés plus complexes.

<u>**Les trois techniques enseignées :**</u>

<u>**Méthode par emprunt ou « par cassage de la dizaine de la centaine » :**</u>

Lorsque l'on ne peut soustraire 6 de 4, on emprunte une dizaine pour en faire 10 unités. *Les connaissances sous jacentes* : repérage de la valeur des chiffres, équivalences de la numération décimale, connaissance des différences entre nombres inférieurs à 20 et ceux inférieurs à 10

<u>**Méthode « par complément » :**</u>

Remplacer la soustraction par une addition à trous

*Connaissances sous jacentes :* repérage de la valeur des chiffres, équivalence entre $a-b=x$ et $b+x=a$, connaissance des compléments des nombres inférieurs à 10 à ceux inférieurs à 20.

**Méthode « traditionnelle » :**

Lorsque l'on ne peut soustraire 6 de 4, on ajoute simultanément 10 unités au 1er terme et 1 dizaine au 2ème terme.

***Connaissances sous jacentes :*** repérage de la valeur des chiffres, propriété de la soustraction (en ajoutant un même nombre aux deux termes d'une différence on obtient une différence égale) et connaissances des différences entre des nombres inférieurs à 20 et ceux inférieurs à 10.

Les difficultés de la soustraction sont donc dans la **gestion des retenues** et dans la **conception du 0 comme « rien »** : l'élève recopie 8, estimant de pas pouvoir soustraire 8 de rien.

En **CM**, lorsque les **nombres décimaux** sont en jeu, les difficultés sont accrues. L'élève peut poser la soustraction (7,24-4,3) sans prendre en compte la virgule et en positionnant vers la droite les nombres (également visible pour l'addition). Lorsque (12,7-5,12) l'élève ne prend pas en compte le 0 non écrit et reproduisent le 2 car il ne peut être soustrait de rien.

**La connaissance en acte (non formalisée) de quelques propriétés des opérations est indispensable à la compréhension des techniques opératoires.**

**Le calcul réfléchi** nécessite la compréhension de la numération décimale (notamment l'équivalence 1 d = 10 u, 1c = 10d) notamment pou l'utilisation des retenues.
Procédures pour calculer 75-67 :

- complément de 65 à 75
- Ajouter 3 simultanément pour arriver à 78-67
- Faire 75-70 + 3

Le calcul est souvent conditionné par les relations connues et mémorisées entre les nombres (comme 2 et 8 qui vont bien ensemble) mais des difficultés peuvent être générées s'il ne sait pas que certains nombres facilitent les calculs dont la somme est un nombre rond ou que pour ajouter 19, il est possible d'ajouter 20-1.
**Ces méthodes doivent cependant être présentées avec prudence.**

Des difficultés récurrentes peuvent également reposées sur des conceptions erronées à propos des nombres :

- **l'interprétation du signe** + comme une addition des chiffres en présence : erreurs dans les additions à trous.
- **L'interprétation de l'écriture à virgule** comme adjonction de deux nombres entiers (3,5 + 1,5 = 4,10, addition séparée des parties entières et décimales)

## Les pistes pédagogiques

### Connaître les doubles et moitiés des nombres d'usage courant

- Au cycle 2, les nombres sont étudiés par la connaissance des règles de la numération décimale et la capacité à les ranger en ordre croissant/décroissant.
- La structuration arithmétique appuyée sur les relations additives ou multiplicatives ne fait l'objet que d'une approche, approfondie dans les compétences calcul du cycle 3.
- La connaissance de certains doubles joue un rôle important en calcul mental.

## Mémoriser et utiliser les tables d'addition

- Capacité à donner très rapidement et à les utiliser (compléments et différences).
- L'apprentissage est très hétérogène : mémorisation totale, partielle, certains se dotent de moyens pour reconstruire très rapidement les autres résultats.
- Au départ, les résultats sont reconstruits par les élèves en s'appuyant sur le sens de l'addition et de la soustraction : la construction par les élèves facile la compréhension et donc la mémorisation. Les points d'appui sont important : utilisation des doubles, commutativité $(3 + 8 = 8 + 3)$, complément à dix.

## Effectuer un calcul posé

- Addition et soustraction recouvrent l'écriture mathématique et les procédés de calcul propres à chacune. L'acquisition de capacités dans le calcul des soustractions est plus lente et s'appuie largement sur celles acquises dans le calcul de l'addition.

**Addition :** la technique opératoire est exigible, qu'elle soit traitée en colonne ou en ligne. La technique doit être justifiée (notamment la retenue) grâce aux connaissances sur la numération.

**Soustraction :** calculs des différences. Traiter en décomposant les nombres par exemple grâce au calcul réfléchi écrit, en décomposant les nombres, en s'aidant d'une droite numérique…

---

**La banque numérique est un outil présent dans les classes dès l'école maternelle, grandissant au fur et à mesure de l'extension de la connaissance des nombres. Elle permet aux élèves de mémoriser progressivement les graphies des nombres, avec des représentations moins abstraites : constellations, illustration de mains.**

---

Au cycle 3, le calcul mental portent par exemple sur l'addition de deux nombres à deux chiffres.

## Calculer mentalement des sommes, des différences

Le calcul réfléchi (mental ou aidé par des traces écrites) occupe la place principale. Les procédures sont explicitées et font l'objet d'échanges entre les élèves.

Objectifs importants dans le calcul réfléchir mental :

- Additionner ou soustraire des dizaines ou des centaines entières
- Additionner ou soustraire un nombre à un chiffre à un nombre donné
- Déterminer les compléments à 100

## Utiliser les fonctions de base de la calculatrice

Première initiation dès le cycle 2. L'enseignant est juge des occasions où son usage est pertinent, attention à ne pas gêner les apprentissages dans le calcul mental par exemple.

L'enseignant profitera de toutes les occasions pour mettre en évidence le fait qu'un calcul mental est souvent plus rapide que le recours à la calculatrice.

Au **cycle** 3, cette compétence est **inséparable de la résolution de problèmes** : l'élève doit acquérir une autonomie grâce à l'outil, en faisant l'objet d'un apprentissage :

- pertinence de son utilisation
- réflexion sur la suite des calculs à effectuer
- réflexion sur la nécessité de noter des résultats intermédiaires et leur signification

## Produire et reconnaitre les décompositions additives

Il est souhaitable que les écritures a + b et a – b soient travaillées simultanément dès le départ pour éviter que l'addition soit utilisée de façon automatique, car étant « seule disponible »

Il ne faut pas confondre les opérations (addition, soustraction) et les écritures additive et soustractives qui utilisent des signes + et – en codant des ajouts, des retraits…