Langage et conceptualisation du nombre

Conférence de Rémi Brissiaud du 25/03/05

Présentation

Ancien professeur de mathématiques reconverti en psychologue.

Comment les enfants apprennent à calculer ? 2nde édition parue en 2003 et augmentée de 80 pages

Psychologie interculturelle : construction du nombre chez des enfants de deux cultures différentes ⇒ étude comparative entre enfants occidentaux (états-uniens) par rapport aux enfants asiatiques. Etude sur 10 ans : 1990 → 2000. Résultats ⇒ les enfants asiatiques sont bien plus performants que les enfants états-uniens concernant les mathématiques. **Pourquoi ?** La principale raison est le **facteur langagier** : les asiatiques ne disent pas onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize (qui sont irréguliers d'un point de vue du langage) mais ils disent : dix-un, dix-deux, dix-trois, dix-quatre, dix-cinq, dix-six. Il en va de même pour vingt, trente, quarante … etc jusqu'à quatre-vingt dix ; ils disent : deux-dix, trois-dix quatre-dix … etc jusqu'à neuf-dix. Ils ont donc une façon différente de dire les nombres, il n'y a aucune irrégularité. Lorsqu'il s'agit des centaines ont dit comme eux deux cent, trois cent … mais pour les dizaines et les nombres entre 11 et 16 notre langage a des irrégularités qui n'aident nullement les enfants à comprendre le passage à la dizaine supérieure.

Ex : pour le nombre 432 ce n'est pas évident que les enfants aient la conviction que compter :

- ⇒ de 1 en 1 jusqu'à 432,
- ⇒ ou que (43 * 10) + (2*1)
- ⇒ ou que (4*100) + (3 * 10) + (2*1) soient la même chose.

Les enfants sourds-profonds de naissance ont un cheminement à l'asiatique ⇒ ils mettent en correspondance terme à terme les nombres avec les doigts. Ils ont une collection témoin de doigts comme symbole numérique.

I) Comparaison de 2 chemins vers le nombre : chemin états-uniens (occidental) et chemin asiatique

Comment un enfant construit-il la conviction que 6 + 8 = 14 ? La construction du répertoire additif est une affaire de conceptualisation, de compréhension.

1) Le chemin états-unien :

→ 4 jetons + 3 jetons représentés par 4 doigts sur 1 main et 3 doigts sur l'autre ⇒ collections témoins réunies et on compte ou alors comptage du tout en cours de route c'est-à-dire partir de 4 (« on met dans sa tête ») et ajouter 3 ⇒ il s'agit de **sur comptage**. Le sur comptage est enseigné aux Etats-Unis. **ATTENTION : ne pas trop l'utiliser car il peut faire obstacle au progrès chez certains enfants** ⇒ de toutes façons ils vont le découvrir par eux-mêmes si on ne l'enseigne pas. Les points sur les dés sont placés de façon où chaque chiffre soit toujours représenté de la même façon ⇒ favorise le sur comptage, le processus de conceptualisation.

→ Stratégie de décomposition, recomposition ⇒ usage des doubles. Ex : 6 + 7 ⇒ 7 se décompose en 6 et 1 ce qui ramène au double de 6 donc 12 et 1 donc 13. Le problème c'est qu'aux Etats-Unis ce n'est pas enseigné avant le CE1 pour un usage important.

→ Mémorisation du répertoire additif

2) Le chemin asiatique :

Le sur comptage n'est pas enseigné en Asie, les enfants le découvrent par eux-mêmes.

→ Usage précoce de stratégies de décomposition, recomposition : le calcul sur les doigts est différent du comptage sur les doigts !!!!! Il ne faut pas que le comptage sur les doigts dure trop longtemps.

Calcul sur les doigts : 4 + 3 ⇒ 4 doigts sur une main et 3 doigts sur l'autre ⇒ 1 doigt bascule sur l'autre main pour la compléter, on se retrouve avec 5 doigts et 2 doigts donc 7 doigts ⇒ décomposition et recomposition.

6 + 3 ⇒ 6 doigts puis 3 autres donc 9. 6 c'est 5 doigts (une main complète) et un autre doigt auquel on ajoute 3 donc décomposition de 6 en 5 + 1.

9 + 3 ⇒ 9 doigts puis ils imaginent 3 unités à droite : 1 sur le doigt baissé et 2 plus loin ⇒ passage de la dizaine sur les doigts avec le repère 10.

En Corée on baisse les doigts pour compter alors qu'en France on a la main fermée et on l'ouvre. 2 doits levés pour nous représentent 3 doigts baissés pour eux donc pas le même chiffre ! Quand ils ont fermé les deux mains (10) ils les baissent et s'ils veulent compter au-delà de 10 ils lèvent d'abord une main et l'ouvre selon le chiffre désiré et si c'est au dessus de 15 ils ouvrent l'autre main, on arrive à 20 ; et ainsi de suite.
Ex : 7 + 6 ⇒ 7 = on baisse une main et deux doigts
6 = on baisse une main et un doigt
⇒ Comme les deux mains sont baissées c'est qu'on est au delà de 10. De combien mon nombre est-il plus grand que 10 ? Du nombre de doigt baissés c'est à 2 + 1 = 3 donc 7 + 6 = 10 + 3 = 13.

→ La connaissance du répertoire additif vient ensuite.

Il y a donc une étape en moins chez les asiatiques comparés aux états-uniens ⇒ le sur comptage est absent de l'enseignement. Mettre un nombre dans sa tête et l'autre sur ses doigts est un **piège pédagogique** puisque c'est un processus simple à enseigner. Il vaut mieux une suite des nombres bien structurée c'est-à-dire connaître l'ordre numérique et la décomposition.

II) Comment mettre en place ces stratégies en classe ?

1) En petite section :

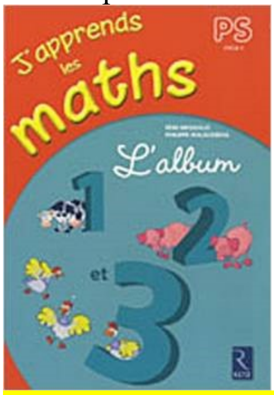
Mettre 3 images devant un enfant : on lui demande combien il y en a
_ soit il dit 3 de suite,
_ soit il compte 1, 2 , 3
_ soit il ne sait pas ⇒ **le comptage verbal n'aide pas les enfants à comprendre le nombre.** Il ne faut pas faire 1, 2, 3 en pointant les images car l'enfant pensera que la dernière image c'est 3 et non le total.

On peut faire 1, 2, 3 **et entourer le total** plusieurs fois.
Si on est un pédagogue calculateur on privilégiera la décomposition. On travaille avec autre chose. On laisse les images et on prend des jetons. On prend 8 jetons et on demande à l'enfant : « donne m'en deux » en montrant 2 doigts ⇒ **représentation analogique du nombre.** S'il ne sait pas on dit : « un et encore un » en montrant nos doigts. Et s'il ne sait toujours pas il faut prendre les jetons en disant : « un et encore un ».

La collection de doigts par correspondance terme à terme est différente du comptage sur les doigts.

On peut également lorsqu'on fait l'appel des présents compter les prénoms des enfants absents jusqu'à 3 en montrant avec les doigts et demander aux enfants combien ça fait.

Livre à paraître chez Retz : J'apprends *les maths PS :1, 2 et 3*



Utilisation d'album à calculer en maternelle fortement conseillée.

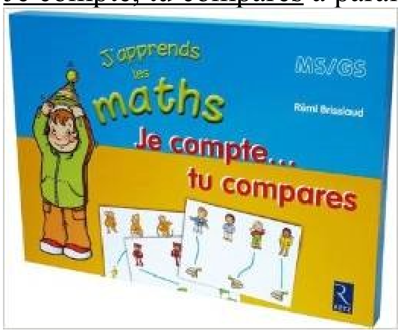
Les reformulations générales aident au transfert : 4 c'est 2 + 2 ou 2 + 1+ 1

2) En grande section :

Si un enfant compte 7 crayons il faut lui demander c'est combien 7. A coup sûr il recomptera les crayons. On peut utiliser des coloriages de doigts sur une feuille représentant des mains.

Quand il s'agit de comptage « donne moi 6 » ou « dessine moi 6 » est plus difficile que la question « combien ? ».

Je compte, tu compares à paraître.



Mais on peut très bien faire soi même le système de cet ouvrage : on utilise des pochettes plastiques et des crayons à velleda. Dans les pochettes on y glisse des cartons avec des dessins sur 2 rangées : par ex des poules sur la rangée supérieure et des poussins sur celle inférieure. On met soit le même nombre soit un nombre différent mais il faut que les deux rangées occupent le même espace sur le carton pour ne pas fausser le jeu. Il faut apparier les 2 collections : chaque maman poule doit avoir un poussin ou deux… ⇒ **correspondance terme à terme.** Un peu plus tard dans l'année le maître compte les poules et les poussins chacun leur tour 2 fois sans montrer les images aux enfants. Question : « Qu'est –ce qu'il y a le plus ? ». Les enfants répondent et le maître valide en retournant le carton.

Ce système basé sur le livre à paraître est à réserver aux enfants qui ont déjà construits les 4 premiers nombres.

3) Au CP :

Comptage sur les doigts ? **NON** ⇒ substitut des doigts : les boîtes de Picbille (J'apprends les maths avec Picbille CP). 1 boite de forme rectangulaire de petite largeur et grande longueur divisée en 2 compartiments de 5 cases. Chaque compartiment a son propre bouchon. Donc quand un des compartiments est fermé c'est qu'on a 5 billes dedans et si les 2 sont fermés c'est qu'on a 10 billes. Les élèves disposent d'autocollants repositionnables de la forme des compartiments et ils doivent les placer sur les boites quand ils comptent selon les exercices.

→ Organisation linéaire pour commencer à construire la file numérique + un repère par rapport à 5 et à 10. Les boîtes de Picbille masquent le nombre 5 pour obliger à se représenter 5 ; sur comptage à partir de 5.

→ Réhabilitation de l'usage des constellations

Il vaut mieux dessiner une collection organisée que de compter sur ses doigts avec un nombre en tête et le reste sur les doigts.

Visualisation mentale de la vision d'autrui ⇒ le maître a devant lui une boîte de 10 avec 8 unités, les enfants ne voient pas ce que le maître voit. Question : « Combien de cases vides ? Imagine ce que je vois. ». Validation : on bascule la boîte.

Plus tard dans l'année on prend une boîte avec 8 jetons et on prend 4 jetons dans la main. Mettre 2 jetons dans la boîte sans que l'enfant puisse voir combien on en a mis et lui demander : « combien font 8 + 4 ? »

<u>Numération décimale</u>

La régularité langagière du Coréen n'aide pas à comprendre que compter jusqu'à 42 c'est pareil que faire (4*10) + 2. Version chemin asiatique de Picbille : <u>J'apprends les maths avec Tchu</u> ⇒ le bilinguisme numérique prévaut.

Il ne faut pas utiliser le mot paquet pour désigner un groupe car dans la vie courante on n'utilise pas le verbe paqueter, on achète un carnet de 10 timbres mais on ne carnète pas 10 timbres ; alors que le mot groupe peut être remplacer par le verbe grouper : faire un paquet de 10 objets ou grouper 10 objets. Groupe est donc un mot meilleur car **la conceptualisation se situe au niveau de l'action.** Pour la numération comme pour la division euclidienne, le mot groupe aide à faire des liens.

Ex : 123 ⇒ 12 groupes de 10 et reste 3

123/10 = 12 et reste 3

III) Catégorisation

Un même problème peut être résolu à 2 niveaux de procédure :

_ <u>Procédure personnelle</u> ⇒ simulation de la situation (même les personnes qui ne vont pas à l'école finissent par arriver à ce niveau)

_ <u>Procédure experte</u> ⇒ résolution arithmétique (s'apprend à l'école car c'est une résolution scolaire, scientifique).

<u>Ex de problème</u> : *un bus roule avec 17 personnes à son bord. Il s'arrête pour prendre des passagers. Quand il redémarre il a 31 passagers à son bord. Combien de personnes sont montées ?*

<u>Niveau 1a de résolution</u> : simulation avec matériel ⇒ l'enfant fera 17 points puis en rajoutera avec une autre couleur pour arriver à 31 points. Si ce n'est pas organisé (par ex en constellation de 5, cela ne marchera pas, l'enfant s'embrouillera).

<u>Niveau 1b de résolution</u> : simulation par comptage ⇒ l'enfant partira de 17 et comptera 18 , 19, 20, … 31 autrement dit combien y-a-t-il de numéros après 17 pour aller jusqu'à 31 ?

<u>Niveau 1c de résolution</u> : écriture arithmétique ⇒ semblant de résolution arithmétique :

17 + 10 = 27

17 + 15 = 32
17 + 14 = 31

Niveau 2 de résolution : En revanche si l'enfant fait directement 31-17 = 14 alors là on a réellement une résolution arithmétique parce que l'énoncé dit qu'il y a des gens **en plus** et l'enfant fait une **soustraction** ⇒ **conceptualisation de la soustraction**

⇒ La division euclidienne : ex : *on a 163 objets et on veut faire des groupes de 17. Combien aura-t-on de groupes de 17 ?*
Niveau 1a de résolution : avec des cubes : 16 * 10 + 3

Niveau 1b de résolution : 17 34 51 68 … 163 ⇒comptages de 17 en 17

Niveau 1c de résolution : 17 + 17 = 34 34 +17 = 51 ⇒ suite d'addition

Niveau 2 de résolution : l'enfant lit l'énoncé et sait qu'il faut diviser par 17. Il fait 163/17= en 163 combien de fois 17 et on trouve le même résultat. **L'enfant est convaincu de cette équivalence** ⇒ résolution arithmétique proprement dite.

Phase stratégique :
Ex : *Quel est le prix de 3 objets à 50 cruzeiros l'un ?*
Quel est le prix de 50 objets à 3 cruzeiros l'un ?
Ces deux problèmes ont été posés à des enfants de 12 ans non scolarisés d'Amérique du Sud et qui vivent du commerce.
Stratégie 1b : 75% de réussite au 1er problème : 50 100 150
Stratégie 1b : 0% de réussite au 2nd problème : 3 6 9 12 …. Ils finissent par perdre le fil de leur compte et n'arrive pas au résultat. Comme ils ne sont pas allés à l'école ils ne peuvent pas conceptualiser et donc ils ne savent pas que 3 * 50 c'est la même chose que 50 * 3. Ils n'ont pas accès au niveau 2 de résolution puisqu'ils ne sont jamais allés à l'école.

Les problèmes nécessitant une procédure de résolution de niveau 2 ne peuvent pas être résolus par tous les enfants en même temps. Les problèmes à énoncés verbaux ne servent à rien (⇒ il faut une situation d'anticipation. Ex : avec 1 fil et une bobine : combien de tour peut-on faire avec le fil avant de le vérifier concrètement en tournant le fil autour de la bobine. Quand un enfant dysfonctionne il faut revenir à ce type de situation.) Mais ces problèmes ne sont pas à bannir s'ils sont bien conceptualisés parce qu'ils sont plus économiques.

Attention : il ne faut pas aller trop vite dans la phase de catégorisation.
A partir du CE1 problèmes avec énoncés verbaux mais 2 progressions :
_ Résolution de problèmes (ateliers de résolutions, dire de quoi ça parle mais pas demander c'est + ou c'est -)
_ Leçon de conceptualisation (équivalence entre procédures qui fondent les concepts arithmétiques)