MATHEMATIQUES CE1 :

« Approcher la division de deux nombres entiers à partir d'un problème de partage ou de groupements »

Expérimentation dans les classes de :
Mesdames BENCERIC, DEGRAVE, DESSE, GAILLEGUE, GOUY, QUINQUIS
Messieurs BOEL, CASIER, VANRECHEM
Circonscription de Marcq-en-Barœul ~ 59

I - Programmations / progressions :

Les tableaux donnant les repères pour organiser les apprentissages sont à la base de la réflexion menée (voir annexe – pour la commodité de la lecture les compétences ont été numérotées).
Ce tableau est souvent considéré comme une liste dont la chronologie est hiérarchisée : on enseigne « (1) connaître (savoir écrire et nommer) les nombres entiers inférieurs à 1000 » puis « (2) repérer et placer ces nombres sur une droite graduée… » puis « (3) écrire et dire des suites de nombres de 10 en 10… » etc…
Cette logique conduit à aborder « (12) Approcher la division de deux nombres entiers à partir d'un problème de partage ou de groupements» en toute fin d'année (au mieux).

Nous préférons une autre conception : la liste décline des connaissances et compétences à acquérir à la fin du CE1. L'ordre de présentation constitue des repères liés et qui retentissent entre eux (voir ci-dessous).
L'enseignant qui connaît les compétences de fin d'année anticipe à chaque étape et construit pour chaque compétence, une approche progressive tout au long de l'année : c'est le sens d'une progression.
Nous avons cherché, dans les différents items, ceux qui pouvaient participer à « approcher la division ».
Le principe général de ce propos fait la part de la notion mathématique et des écritures conventionnelles qui sont souvent très (trop) rapidement investies. Nous faisons une place essentielle à l'ORAL : comment un élève de CE1 parle-t-il du savoir en jeu, comment le dit-il ?

II – L'objectif en fin de CE1 : « (12) Approcher la division de deux nombres entiers à partir d'un problème de partage ou de groupements. »

Le programme ne précise pas s'il s'agit de la division exacte et/ou euclidienne : nous proposons la division euclidienne comme cas général. Voici le niveau de compétence que nous proposons en fin de CE1 :

- Un élève reconnaît un problème de « division ». Ce mot recouvre deux sens. Il peut apparenter le problème de division :
  - à un partage
  - à un groupement (voir tableau en fin de document)
- Il sait dire : « Dans une classe de 22 élèves on peut faire 5 équipes de 4 élèves et il en reste 2 »
- Il sait écrire :
  - Cas de la division exacte
    20 : 5 = 4 (en référence aux tables étudiées : de 2 à 5 au CE1)
  - Cas de la division euclidienne : on peut proposer qu'il sache écrire
    22 = (4 x 5) + 2 (rappel : c'est la seule écriture valide)

III – Quelques mises au point :

1 - Partage / Groupement : pour une seule opération [14 : 2] ou [15 = 2 x 7 + 1] deux types de problèmes
  - PARTAGE - Avec 14 élèves, on fait 2 équipes : la manipulation de référence est une distribution, un partage (l'élève place un élève à droite, un à gauche et recommence… « 2 » n'apparaît pas explicitement dans la manipulation)
  - GROUPEMENT - Avec 14 élèves, on fait des équipes de 2 : la manipulation de référence consiste à faire des « paquets » de 2, des groupements (l'élève prend deux élèves, puis deux autres…)

2 - La situation de partage est plus vite reconnue et assimilée à une situation de « division » que celle de groupement.
Partant de la logique de la multiplication, il faut rappeler que [2 et 2 et 2 et 2 et 2] et [5 et 5] ne laissent en rien présager d'un résultat identique.
Ainsi [5 x 2] et [2 x 5] ne trouvent leur équivalence que lorsqu'on a écrit et calculé la multiplication !
Remarque : La commutativité 5x2 = 2x5 sera reconnue et apprise plus tard, lorsque le calcul aura montré cette égalité (ex. quadrillage). Beaucoup d'écrits débattent de l'écriture multiplicative : nous faisons le choix (lié au langage de l'élève) du rapport oral/écrit, en retenant le lien langagier initial qui associe produit et somme réitérée. Ainsi, dans 5+5 on voit « deux fois cinq » soit 2x5 (c'est un théorème en acte !).
On retrouvera cette difficulté dans [10 : 2]
Spontanément, c'est la division – partage qui est saisie. Pour [10 : 2] on cherche la moitié, on distribue, un à droite, un à gauche, au autre à droite… jusqu'à épuisement du stock. Elle sera plus vite reconnue.
L'apprentissage de la division groupement : « Dans 10 combien de paquets de 2 ?» [10 : 2] requiert un enseignement attentif, régulier et progressif.

- Ø L'objectif est que l'élève puisse reconnaître et différencier situation de partage (partition / manipulation de référence : distribuer) et situation de groupement (quotition / manipulation de référence : faire des paquets) pour une même écriture mathématique (la division).

IV – Programmation :

1 - SUIVI DU CP au CE1 : révision de quelques connaissances antérieures (à reprendre et poursuivre dès le début de l'année de CE1) afin de préparer la future approche de la division.

Compétences CP - Rappel (entretien) des savoirs antérieurs CE1 – nouvelles notions	Partage / groupement	Oral	Ecriture	Difficultés
CP - 1- Connaître (savoir écrire et nommer) les nombres entiers naturels inférieurs à 100	Le dénombrement et la numération se fondent sur les groupements (puis les groupements de groupements). Si on parle d'objets (nombreux) à dénombrer, on conduit, en début de CE1, à des formulations de type « J'ai quatre dizaines et il reste huit unités ». C'est préparatoire à la logique des groupements – par 10	CP : Conclusion de manipulation : « J'ai quatre dizaines et il reste huit unités » Conclusion liée à la numération : « 48 c'est 4 fois 10 et 8 »	L'écriture multiplicative peut s'envisager lorsque le signe (x) a été étudié	Usage du signe (x) étudié au CP
CE1 - 1 - Connaître les nombres entiers naturels inférieurs à 1000			48 = 4 x 10 + 8	Parenthésage
CP - 5- Connaître les doubles des nombres inférieurs à 10 et les moitiés des nombres pairs inférieurs à 20.	Rechercher la moitié, c'est un problème de partage, le double un problème de groupement	Pair / impair On peut partager des nombres impairs, mais il y en a 1 en trop, il en reste 1	Pas d'écriture (sauf la multiplication par 2)	Il faut s'extraire progressivement de la manipulation, du dessin au schéma pour parvenir aux écritures. Seul le calcul permettra d'anticiper.
CE1 - 4 – Connaître les doubles et les moitiés de nombres d'usage courants	Le travail sur 5x2=10 (vu au CP) peut conduire à explorer des formulations de type « en 10 combien de fois 5 ? » (qui n'a pas le même sens que « en 10 combien de fois 2 ? ») ou « 10 divisé par 2 » préparatoire à la division (nouvelle formulation de la moitié)		C'est peut-être une situation privilégiée pour écrire le signe [:] en lien avec la table de 2 Si 2 x7=14 alors 14 : 2=7	Le signe [:] est lié aux tables. Dès que les nombres excèdent ce cadre, de nombreuses difficultés sont apparues.
CP – 6 – Connaître la table de multiplication par 2	Travail sur le lien logique : si 5 x 2 = 10 (groupement) alors 5 est la moitié de 10. Mais il est plus difficile, voire impossible, d'appréhender « En 10 combien de fois 2 ? »		Pas d'écriture de la division	Lien entre connaissance (la table de 2) et la capacité à l'utiliser, à lui donner sens (14 est le double de 7 parce que 2 x 7 = 14)
CE1 – 5 – Mémoriser les tables de multiplication par 2, 3, 4, 5	Le sens « groupement » prévaut (2 paquets de 6 ou 6 paquets de 2 – voir plus haut) n'équivaut pas à partager en 6 ou partager en 2 qu'il faudra enseigner spécifiquement… L'équivalence de 2x6 et 6x2 ne va pas de soi. Cette conclusion ne pourra être retenue qu'après l'apprentissage. On peut encourager des habiletés du type : il y a 4 fois 5 dans 20 (parce que 20 c'est 2 fois 10)			La résolution de « Combien paiera-t-on pour 4 paquets à 10€ / 10 paquets à 4€ » met en œuvre des gestes mentaux ou procédures de mimes, de représentation, de sommes réitérées très différentes : rien ne permet d'anticiper l'équivalence.
CE1 – 9 – Connaître une technique opératoire de la multiplication…	L'étude de la multiplication, conception et technique, ne peut s'envisager sans avoir en perspective la division qu'il faudra approcher ultérieurement.			Avec des nombres plus grands, il a été très difficile de faire « admettre » aux élèves l'équivalence entre 5x15=75 et 75 : 5=15
CP – 10 – Résoudre des problèmes simples à une	Partage et groupement	Les situations sont nombreuses (voir exemples	Il n'y a pas lieu d'attendre une écriture mathématique en début	Autour de l'euro, quelques partages bien choisis peuvent préparer les techniques de la division (42

opération. 19- Connaître et utiliser l'euro. 20- Résoudre des problèmes de vie courante.	Notion de partage équitable (chacun a le même nombre)	joints) où peuvent être abordés partage et groupement.*	d'année.	euros à partager en 3 : on partage d'abord les dizaines – 3 billets de 10 – puis il reste 12…)
CE1 - 23- Résoudre des problèmes de longueur et de masse.	Longueur : le sens de « groupement » est très spécifique (quantité continue/quantité discrète)			<u>Partage</u> : couper tel ruban de 60cm en 4… <u>Groupement</u> : combien de morceau de 15cm dans un ruban de 60cm
CE1 – 13 – Utiliser les fonctions de base de la calculatrice	Cet outil (une calculatrice qui affiche un nombre à virgule) est efficace pour aider aux sommes ou différences réitérées mais nécessitera une méthode pour retrouver le quotient : pour faire des paquets de 5 avec 75 allumettes on peut répéter (+5) ou (-5) mais la calculatrice n'indiquera pas le nombre d'ajouts ou de retraits…			Il est intéressant d'explorer des fonctionnalités de certaines calculatrices : Taper a + b = = = (réitère + b) Idem avec -

* problèmes relevés au CP :
<u>(ex « Cap math – CP »</u>
Zoé a un paquet de 14 images. Elle doit mettre 2 images dans chaque enveloppe (15 images par 3). Combien d'enveloppes…
Tous ces cubes sont pour Arthur et Zoé (1 - dessin une boîte de huit cubes 2 – boîte fermée avec étiquette « 12 cubes » 3 – étiquette « 10 billes »). Ils doivent en avoir le même nombre.
Tous les chocolats de la boîte (étiquette « 15 chocolats ») sont Arthur, Zoé et Gribouille…

2 – Etapes d'approche de la division

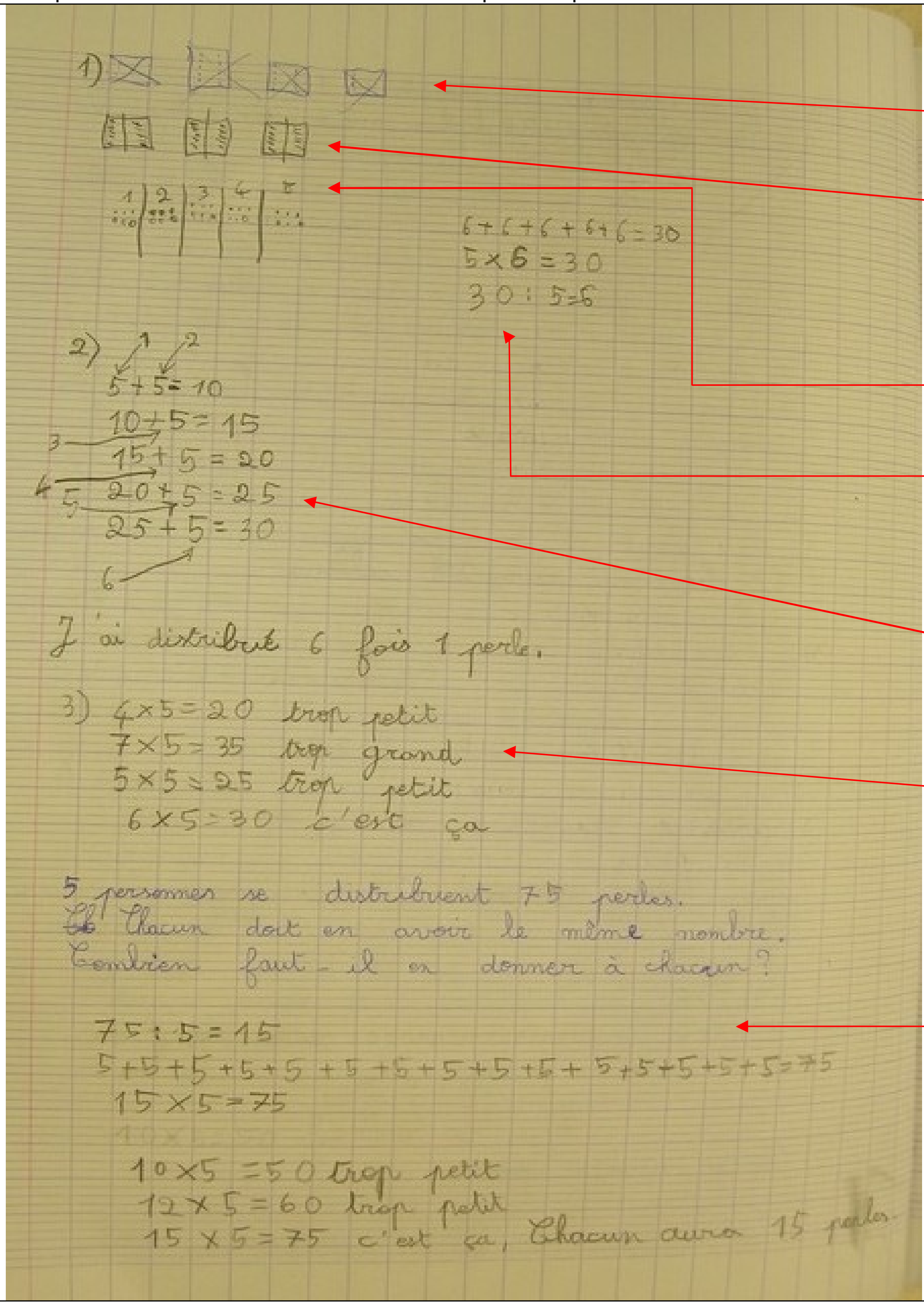
Il est particulièrement souhaitable de rencontrer des problèmes de division partage/groupement sur chaque période et tout au long de l'année pour aboutir en fin d'année au tableau référent construit progressivement.

a) <u>Séance - 1 -</u>

Les classes ayant participé à ce travail présentent des travaux d'élèves réalisés le plus souvent au cours de la période (3).
Dès la première séance spécifique, nous faisons le choix de présenter les deux types de problèmes.
Le travail conduit dans ses classes a privilégié des séances où plusieurs problèmes sont soumis aux élèves.
<u>Problèmes proposés (3 A MINIMA)</u>
Quelques exemples retenus :

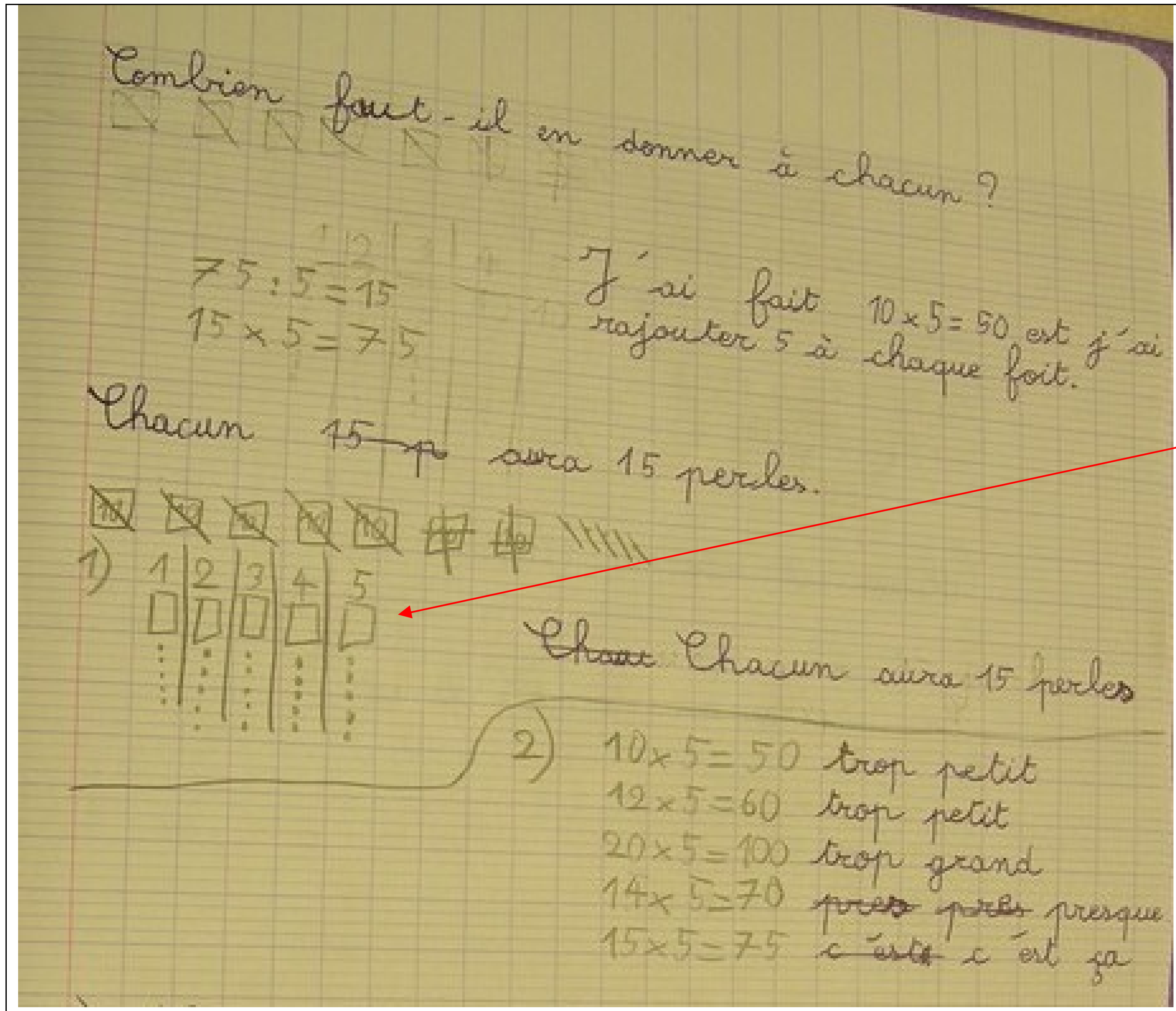
Groupement	Partage
19 élèves se mettent par équipe de 5. Combien d'équipes pourront-ils faire ?	Dans une classe de 20 élèves, on fait 4 ateliers. Il y a autant d'élèves dans chaque atelier. Combien sont-ils dans chaque atelier ?
Pour son anniversaire, Inès prépare des sachets de chocolats pour ses amis. Elle fait des sachets de 6 chocolats. Elle a 32 chocolats en tout. Combien peut-elle faire de sachets ?	Nadia doit partager 30 fraises pour faire 4 parts égales. Combien y aura-til de fraises dans chaque part ?
Pour son anniversaire, Lisa doit acheter 36 gâteaux. Les gâteaux sont vendus par paquets de 2. Combien doit-elle acheter de paquets ?	5 enfants veulent se partager 30 perles. Chacun doit en avoir autant. Combien chacun aura-t-il de perles ?
Dans une cantine 48 élèves mangent par table 6. Combien de tables seront occupées ? Nb. Ce type de problèmes s'accommode mal de la division euclidienne…	J'ai 15 fleurs à colorier en rouge, en jaune ou en rose. Je dois avoir de fleurs de chaque couleur.
Tania range ses 38 balles de tennis par de boîte de 6 balles. Combien de boîtes peut-elle remplir ?	Alex a 24 photos à coller sur 4 pages. Il veut en coller le même nombre sur chaque page. …
… (suite : voir annexe)	- Blanche-Neige distribue 28 pommes à ses nains. Combien chaque nain en mangera-t-il ? - Blanche-Neige et ses nains partagent 28 pommes. Combien chacun en mangera-t-il ?

Il est très impressionnant d'observer l'évolution très rapide des procédures des élèves :



Problème : 30 perles à partager en 5 (partage)

- Une première représentation de 30
- Les dizaines sont d'abord partagées en deux (c'est la représentation initiale – durable - de la division)
- 5 colonnes organisent la figuration de la distribution
- Somme réitérée, produit et division sont récapitulées (en fin de recherche)
- Dans les sommes successives, le quotient est repéré (combien de fois « 5 » répète-t-on ?)
- L'encadrement est une procédure apprise en classe
- Dès le second problème, l'élève a gommé quelques tâtonnements avant d'appliquer les diverses procédures : néanmoins, il travaille directement sur les écritures.



- La distribution ici passe par des paquets de 10, puis des paquets de 5 (on voit plus haut que des essais ont été gommés par l'élève)

- La majorité des procédures observées est rapidement d'ordre numérique.

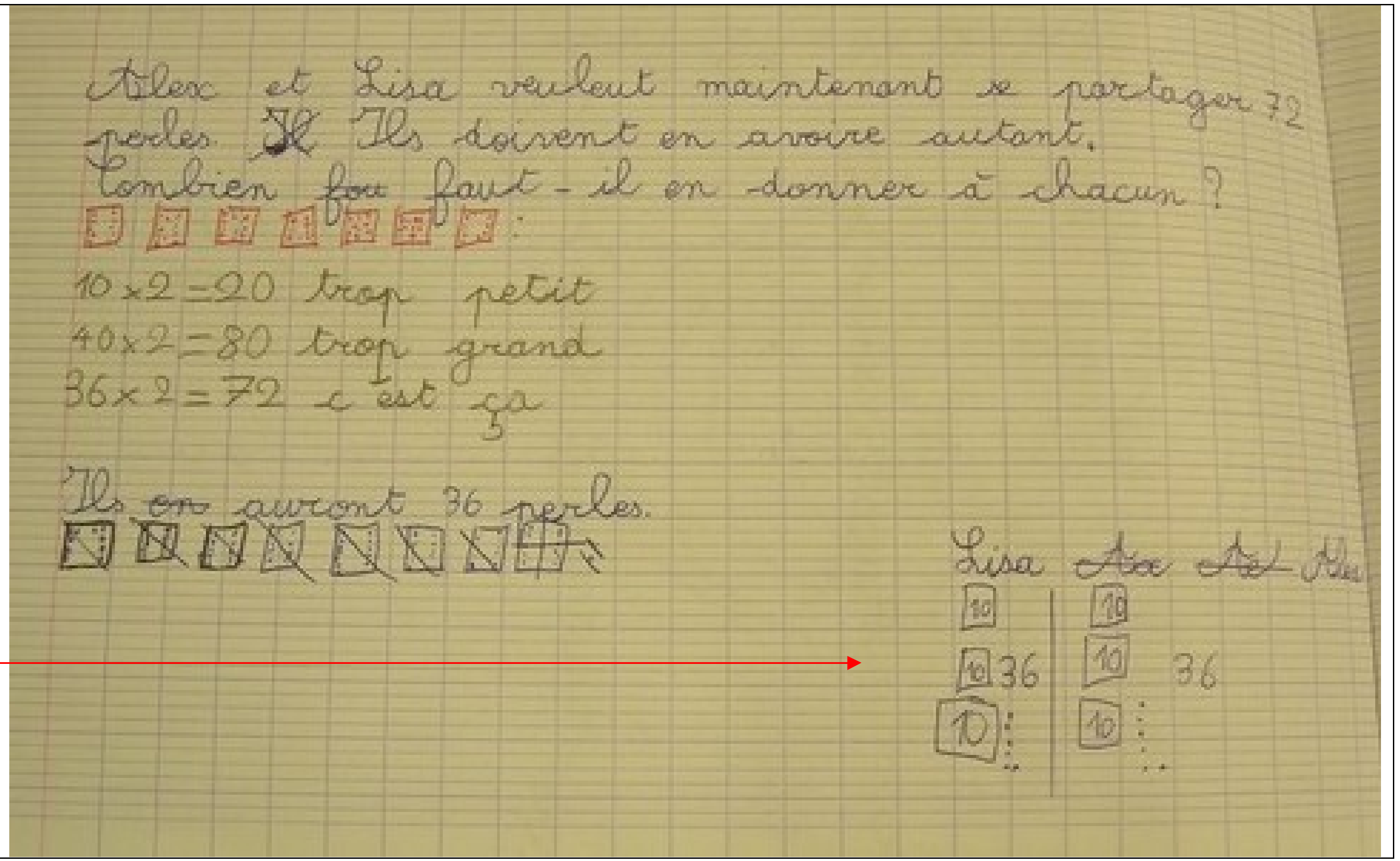
- Schème le plus courant (l'étude du gommage est très intéressant de ce point de vue) :
  1 - du dessin (on dessine des bonhommes) au schéma (des bâtons, des ronds...)
  2 - du schéma à la somme réitérée
  3 - de la somme réitérée à la multiplication

Remarque : un nombre non négligeable d'élèves semble justifier le calcul initial par un schéma

- Ø La distribution (1 à 1) est souvent remplacée par des groupements (5 par 5 ou 10 par 10)

Ex.

(21€ entre 3 élèves)			(48 perles entre 2 enfants)	
5	5	5	10 10	10 10
1	1	1	oooo	oooo
1	1	1		



Ø C'est la somme réitérée qui prévaut (rapidement convertie en multiplication dans le cas d'un quotient exact) :

Ex. (24 photos collées 4 par 4) un élève écrit :

4 + 4 = 8 + 4 = 12 + 4 = 16 + 4 = 20 + 4 = 24
1 2 3 4 5 6
Conclusion : 6 x 4 = 24

L'erreur d'écriture dans les suites d'égalité est fréquente au CE1 : le signe « égal » a une fonction d'opérateur - il précède un résultat. Il n'est pas question de valider cette écriture, ni d'invalider la logique de l'élève : la réécriture par le maître corrigera cette représentation initiale.

Ø Le calcul mental réduit quelquefois les hypothèses sur la réalité de la procédure employée :

Ex. (30 fraises partagées en 4 parts) un élève écrit :

14 + 14 = 28
7 + 7 + 7 + 7 = 28
4 x 7 = 28

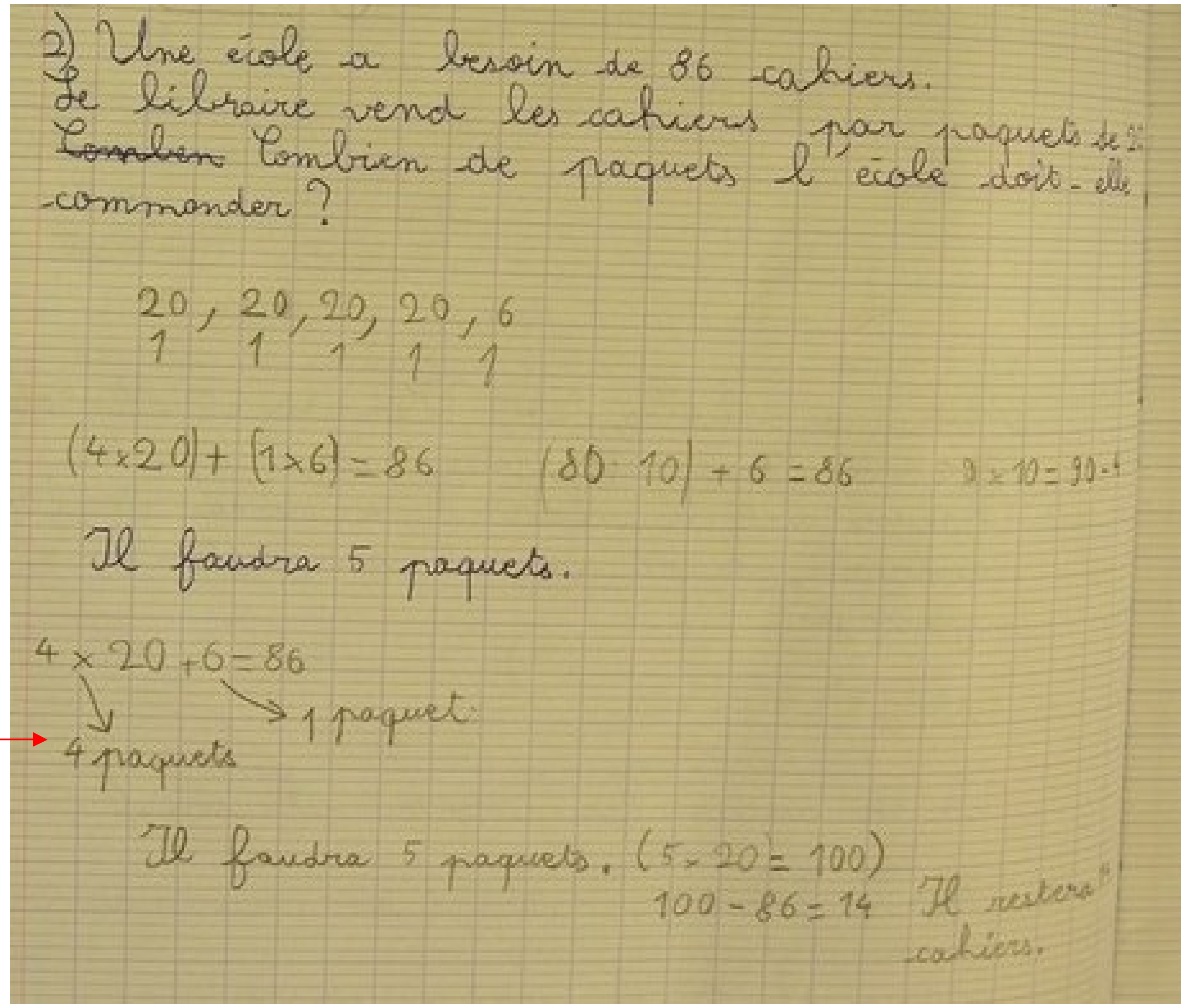
Ø La soustraction est relativement peu présente dans les travaux. Elle apparaît dans les situations de groupement où les quantités sont plus élevées :

Ex. Dans une boîte de 150 perles on fait des colliers de 40 perles.

Ø Des problèmes à éviter :

L’école a besoin de 86 cahiers vendus par paquets de 20.

Ø la réponse n’est pas le quotient…
Ces problèmes ont un statut particulier qu’il convient de bien identifier ; s’il s’agit bien d’un problème de groupement avec une logique ressemblante, la conclusion, la réponse, (le statut du reste) impose une nouvelle logique du calcul.



Quelques erreurs se répètent :
Plusieurs élèves assimilent la division (qu’ils reconnaissent dans la situation) à la recherche de la moitié, systématiquement. On peut recommander de ne pas multiplier les situations de partage en deux en début d’apprentissage.

<u>La mise en commun :</u>
Il est essentiel que la mise en commun permette de présenter la relation entre la somme réitérée et le produit (la manipulation distribuer / faire des paquets permet d’envisager l’analogie entre problèmes de même type).
Deux dimensions sont ensuite à mettre en valeur par le maître :
- Ø distinguer groupement / partage (débuter une affiche)
- Ø mettre en valeur la distinction des cas où a = b x c (« sans reste ») et le cas où a = (b x c) + r (« il reste… »)

<u>Entraînement :</u>
Cette phase doit être immédiatement suivie de nouveaux problèmes à résoudre afin de mettre immédiatement en œuvre les procédures multiplicatives mises en évidence.

b) Eléments de progression :

Vers l'automatisation :

Les progrès les plus spectaculaires ont été observés dans la résolution (au cours d'une séance) d'un problème dont une variable numérique évolue :

- Lisa veut faire des bouquets avec ces 17 tulipes (puis 31) / 15 (puis 30, puis 60). Dans chaque bouquet, il veut mettre 5 tulipes.
- 5 personnes veulent se partager 30 perles (75, 51)
- Lise prépare des paquets de 4 sucettes. Elle a 28 sucettes (56, 82)

  …

Le premier problème rappelle des grandeurs ayant été au travail précédemment (dans les « tables »).
Le travail avec des nombres de plus en plus grands induit l'évolution des procédures de calcul, rapidement transposées et modélisées dans des situations où le calcul mental ne permet plus les anticipations : c'est un mode qui permet de tendre vers une automatisation.

Groupement :

Un travail spécifique doit être engagé pour étayer la construction de cette typologie de problèmes moins accessibles pour la plupart des élèves que celle de partage.

L'écriture (a : b)

Nous l'avons présentée assez rapidement, lorsque les valeurs restent dans le domaine des « tables ».
Il est apparu difficile de transposer cette écriture dans les cas où on élargit la taille des nombres.
Dans le problème des perles à partager entre 5 personnes, les élèves écrivent 30 : 5 = 6 « parce que 5 x 6 = 30 ». Ce n'est plus le cas pour 75 : 5 = … puisque la multiplication n'est pas dans le répertoire mémorisé.

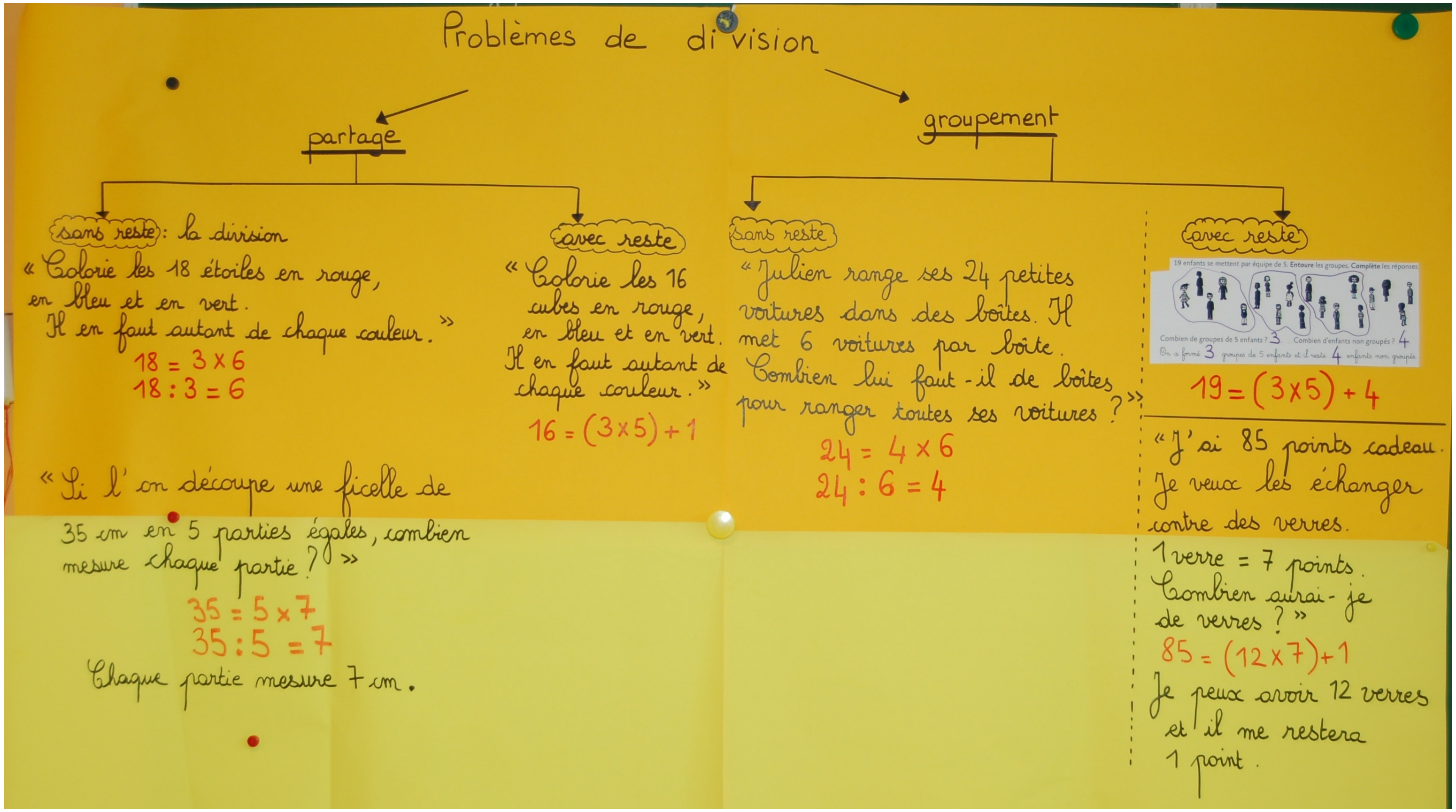
Division exacte / division euclidienne :

Dans un problème de division, on ne peut écrire « l'opération » que lorsque le problème est résolu, c'est-à-dire qu'on sait si c'est exact ou non… Or, on reconnaît a priori (c'est le sens de « reconnaître ») qu'il s'agit d'un cas de division !
Un auteur (Brissiaud) propose, lorsqu'on a reconnu le problème de division, d'écrire [a : b ?] (mais c'est au CM1 !)
On peut raisonnablement recommander au CE1 d'investir systématiquement la multiplication dans tous les cas pour n'écrire la division exacte que dans les cas proches des tables.

Affiche type réalisée tout au long de l'apprentissage

La construction du tableau s'élabore en classant des énoncés puis en nommant	Problèmes de division			
les classes (avec les termes génériques de la classe ou des programmes). Le mot « division » ne couronnera l'ensemble que lorsqu'il apparaîtra…	groupement / faire des paquets		partage / distribution	
	Division exacte	Non exact	Division exacte	Non exact
Problèmes « collectionnés » et collés au fur et à mesure des rencontres…	20 élèves mangent à des tables de 4.	22 élèves mangent à des tables de 4.	20 élèves à installer à 4 tables.	22 élèves à installer à 4 tables.
	30 œufs à ranger dans des boîtes de 6	32 œufs à ranger dans des boîtes de 6	30 œufs à ranger dans 6 boîtes	32 œufs à ranger dans 6 boîtes
	…	…	Blanche Neige a 28 pommes à partager entre les 7 nains.	Blanche Neige a 30 pommes à partager entre les 7 nains.
On peut retenir un problème générique, un problème « type »…	20 élèves en équipes de 4	22 élèves en équipes de 4	20 élèves en 4 équipes	22 élèves en 4 équipes
Trace écrite attendue en fin de CE1	20 : 4 = 5 parce que 5 x 4 = 20	22 = (4x5) + 2	20 : 4 = 5 parce que 5 x 4 = 20	22 = (4x5) + 2

Un exemple :


Problèmes de division
partage
groupement
sans reste : la division
« Colorie les 18 étoiles en rouge, en bleu et en vert.
Il en faut autant de chaque couleur. »
18 = 3 x 6
18 : 3 = 6
avec reste
« Colorie les 16 cubes en rouge, en bleu et en vert.
Il en faut autant de chaque couleur. »
16 = (3 x 5) + 1
sans reste
« Julien range ses 24 petites voitures dans des boîtes. Il met 6 voitures par boîte.
Combien lui faut-il de boîtes pour ranger toutes ses voitures ? »
24 = 4 x 6
24 : 6 = 4
avec reste
19 enfants se mettent par équipe de 5. Entoure les groupes. Complète les réponses.
Combien de groupes de 5 enfants ? 3
Combien d'enfants non groupés ? 4
On a formé 3 groupes de 5 enfants et il reste 4 enfants non groupés
19 = (3 x 5) + 4
« J'ai 85 points cadeau. Je veux les échanger contre des verres.
1 verre = 7 points.
Combien aurai-je de verres ? »
85 = (12 x 7) + 1
Je peux avoir 12 verres et il me restera 1 point.
« Si l'on découpe une ficelle de 35 cm en 5 parties égales, combien mesure chaque partie ? »
35 = 5 x 7
35 : 5 = 7
Chaque partie mesure 7 cm.