Outils mathématiques pour la Physique

TD équations différentielles : corrigé exercices 3 et 4

3. Écoulement d'un liquide.
   Un réservoir cylindrique de surface de base A contient un liquide qui s'échappe par un orifice de surface A_0 percé dans son fond.
   Si $h(t)$ est la hauteur du liquide à l'instant t dans le réservoir, on admettra que la vitesse d'écoulement est égale à $0.6\sqrt{2gh(t)}$, avec $g = 9.8\text{m.s}^{-2}$ (loi de Torricelli ; le coefficient 0.6, déterminé expérimentalement, tient compte des phénomènes de friction sur les bords de l'orifice).

   (a) Ecrire le volume perdu par le réservoir entre l'instant t et l'instant $t + \Delta t$ (Δt petit) de deux façons différentes.
   Indice : On pourra considérer d'une part, une différence de volume, d'autre part, le volume perdu au cours du temps Δt de par la baisse de hauteur due à la vitesse d'écoulement.

   Volume perdu :

   i. Différence de volume : volume à l'instant t − volume à l'instant $t + \Delta t$ = $Ah(t) - Ah(t + \Delta t)$
   $(V(t) > V(t + \Delta t))$

   ii. Baisse de hauteur due à la vitesse d'écoulement = vitesse d'écoulement × durée = $0.6\sqrt{2gh(t)} \times \Delta t$
   Donc volume perdu (au niveau de l'orifice) = $A_0 \times 0.6\sqrt{2gh(t)} \times \Delta t$

   (b) En déduire l'équation différentielle de ce système et la résoudre.

   Les deux expressions de la question précédente sont égales :
   $Ah(t) - Ah(t + \Delta t) = A_0 \times 0.6\sqrt{2gh(t)} \times \Delta t$
   $\Rightarrow -A\dfrac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t} = A_0 \times 0.6\sqrt{2gh(t)}$
   $\Rightarrow -A\dfrac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t} = A_0 \times 0.6\sqrt{2gh(t)}$

   On résout par séparation des variables :
   $-h^{-1/2}\mathrm{d}h = \dfrac{A_0}{A} \times 0.6\sqrt{2g}\,\mathrm{d}t$
   $\Rightarrow -2h(t)^{1/2} = \dfrac{A_0}{A} \times 0.6\sqrt{2g}\,t + c$
   Soit h_0 la hauteur initiale. À $t = 0$, $h = h_0 \Rightarrow c = -2\sqrt{h_0}$
   Donc $\sqrt{h(t)} = \sqrt{h_0} - \dfrac{A_0}{A} \times 0.3\sqrt{2g}\,t$
   ou $h(t) = \left(\sqrt{h_0} - \dfrac{A_0}{A} \times 0.3\sqrt{2g}\,t\right)^2$

(c) A.N. : Soit une base de 1m de diamètre, un orifice de 1cm de diamètre, et une hauteur initiale $h(0)$=1,50m.
Calculer le temps nécessaire pour vider le quart, la moitié et la totalité du réservoir.

$t = \frac{A}{A_0} \frac{\sqrt{h_0} - \sqrt{h(t)}}{0.3\sqrt{2g}} = \left(\frac{d}{d_0}\right)^2 \sqrt{h_0} \frac{1 - \sqrt{h(t)/h_0}}{0.3\sqrt{2g}} = \left(\frac{1}{10^{-2}}\right)^2 \sqrt{\frac{h_0}{2g}} \frac{1 - \sqrt{h(t)/h_0}}{0.3}$

$t = \frac{10^4}{0.3} \sqrt{\frac{h_0}{2g}} \left(1 - \sqrt{h(t)/h_0}\right)$

Pour vider :

— le quart du réservoir : $h(t) = 0.75h_0 \Rightarrow t = 1235\text{s} \simeq 20$ min.

— la moitié du réservoir : $h(t) = 0.5h_0 \Rightarrow t = 2701\text{s} \simeq 45$ min.

— la totalité du réservoir : $h(t) = 0 \Rightarrow t = 9221\text{s} \simeq 2$ h 35 min.

4. Vitesse de libération.
D'après la loi de Newton sur la gravitation, la force gravitationnelle sur un objet de masse m qui est projeté verticalement de la surface de la Terre est :

$$F = \frac{mgR^2}{(x+R)^2}$$

avec $x = x(t)$ la distance de l'objet au-dessus de la surface à l'instant t, R le rayon terrestre, et g la constante d'accélération due à la gravité.

(a) Utiliser la 2nde loi de Newton pour établir l'équation différentielle de ce système.

2nde loi de Newton : somme des forces = masse × accélération.
Force gravitationnelle seulement, opposée à l'accélération, donc

$$\frac{mgR^2}{(x+R)^2} = -ma = -m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

L'équation différentielle du système est donc :

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{gR^2}{(x+R)^2} \tag{1}$$

(b) Supposons qu'une fusée est lancée verticalement avec une vitesse initiale v_0. Soit h la hauteur maximale au-dessus de la surface atteinte par la fusée (c'est-à-dire $v(h) = 0$). En utilisant la formule de composition des dérivées $\left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}f} \times \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\right)$, montrer que :

$$v_0^2 = \frac{2gRh}{R+h}$$

On s'intéresse à v en fonction de x donc on ré-écrit (1) : $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{gR^2}{(x+R)^2}$

Composition des dérivées avec $g = v$, $u = t$ et $f = x$: $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \times \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \times v$

Donc $v\mathrm{d}v = -\frac{gR^2}{(x+R)^2}\mathrm{d}x$

$\Rightarrow \frac{1}{2}v^2(x) = \frac{gR^2}{x+R} + c \Rightarrow v^2(x) = \frac{2gR^2}{x+R} + C$

Condition aux limites : $v(h) = 0 \Rightarrow C = -\frac{2gR^2}{h+R}$

Donc $v^2(x) = 2gR^2\frac{h+R-(x+R)}{(x+R)(h+R)} = 2gR^2\frac{h-x}{(x+R)(h+R)}$

Enfin, $v_0^2 = v^2(x=0) = \frac{2gR^2h}{R(h+R)} = \frac{2gRh}{h+R}$

(c) Déterminer $v_\infty = \lim_{h\to\infty} v_0$ en fonction de R et g. Cette limite est la *vitesse de libération* de la Terre.

$h + R \underset{h\to\infty}{\Rightarrow} \frac{2gRh}{h+R} \underset{h\to\infty}{2} gR$

càd $v_\infty^2 = 2gR$

(d) A.N. : Calculer v_∞ pour $R = 6378$km et $g = 9.8$m.s^{-2}.

$v_\infty = \sqrt{2 \times 6378 \times 10^3 \times 9.8} \simeq 11.2\ \mathrm{km\,s^{-1}}$