Correction de TD - Théorème du moment

Exercice 01

1. Système considéré : enfant (point G)
   Référentiel : laboratoire supposé galiléen
   Force :
   – poids $\vec{P} = mg\vec{e}_y = mg\left(\sin\theta\vec{e}_r + \cos\theta\vec{e}_\theta\right)$;
   – réaction du support : $\vec{R}_\mathrm{N} = -R_\mathrm{N}\vec{e}_r$ (pas de frottement solide).
   O est fixe dans le référentiel d'étude.
   Théorème du moment cinétique : $\frac{\mathrm{d}\vec{L}_\mathrm{O}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}_\mathrm{O}\left(\vec{P}\right) + \vec{M}_\mathrm{O}\left(\vec{R}_\mathrm{N}\right)$.
   $\vec{L}_\mathrm{O} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge m\vec{v}$, et $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\vec{e}_r \Rightarrow \vec{v} = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$.
   On a donc : $\vec{L}_\mathrm{O} = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{L}_\mathrm{O}}{\mathrm{d}t} = mr^2\ddot{\theta}\vec{e}_z$.
   $\vec{M}_\mathrm{O}\left(\vec{P}\right) = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{P} = mgr\cos\theta\vec{e}_z$ et $\vec{M}_\mathrm{O}\left(\vec{R}_\mathrm{N}\right) = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{R}_\mathrm{N} = \vec{0}$.
   On en déduit alors : $\boxed{\ddot{\theta} = \frac{g}{r}\cos\theta}$. Cette équation est différente de celle du pendule simple car la référence des angles θ est définie différemment.
2. En multipliant l'équation précédente par $\dot{\theta}$, puis en intégrant, on obtient :
   $\dot{\theta}\ddot{\theta} = \frac{g}{r}\dot{\theta}\cos\theta \Rightarrow \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{g}{r}\sin\theta + A_1$.
   A $t = 0$, $\theta = \theta_0$ et $\dot{\theta} = 0$. On en déduit $A_1 = -\frac{g}{r}\sin\theta_0$.
   On obtient alors $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{r}\left(\sin\theta - \sin\theta_0\right)}$.
   Comme $v = r\dot{\theta}$, on a $\boxed{v = \sqrt{2gr\left(\sin\theta - \sin\theta_0\right)}}$.
3. $v_\mathrm{M} = v\left(\theta = 90°\right) \Rightarrow \boxed{v_\mathrm{M} = \sqrt{2gr\left(1 - \sin\theta_0\right)}} \Rightarrow \underline{v_\mathrm{M} = 6,0\ \mathrm{m.s^{-1}}}$.
   La vitesse calculée est assez élevée ($22 km.h^{-1}$) car les frottements ne sont en réalité pas négligeables. Pour que le modèle soit plus réaliste, il faudrait tenir compte des frottements solides entre l'enfant et le toboggan. Lors du glissement de l'enfant, cette force s'oppose au mouvement et a pour norme $R_T = fR_N$, où R_N peut être déterminée avec le PFD, et où f est un coefficient de frottement solide dynamique. Cette force intervient dans le théorème du moment cinétique car elle a un moment non nul par rapport à O. L'équation différentielle serait donc modifiée. Cependant, l'expression obtenue ne s'intègre pas facilement. Nous nous contenterons de dire que la prise en compte de cette force réduirait la vitesse de l'enfant à la fin du glissement.

Exercice 02

1. Le point se déplace dans le plan $(O, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ à distance L fixe de O donc la vitesse est $\overrightarrow{v} = L\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$. Par définition du moment cinétique, on peut écrire :

$$\overrightarrow{\sigma}_0 = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{\sigma}_0 = L\overrightarrow{u_r} \wedge mL\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} = mL^2\dot{\theta}\overrightarrow{u_z}$$

2. **a)** Les trois forces s'exerçant sur le point M sont : le poids, la tension du fil $\overrightarrow{T}$ et la réaction normale au plan incliné $\overrightarrow{R}_N$.
La force $\overrightarrow{T}$ est alignée avec le fil donc $\overrightarrow{T} = -T\overrightarrow{u_r}$ si l'on note T la norme de $\overrightarrow{T}$. La force $\overrightarrow{R}_N$ est perpendiculaire au plan donc selon $\overrightarrow{u_z}$ soit $\overrightarrow{R}_N = R_N\overrightarrow{u_z}$. Le poids est vertical donc dans le plan xOz soit $m\overrightarrow{g} = mg(\sin\alpha\overrightarrow{u_x} - \cos\alpha\overrightarrow{u_z})$. Il faut ensuite projeter la composante dans le plan sur $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ sachant que $\overrightarrow{u_x} = \cos\theta\overrightarrow{u_r} - \sin\theta\overrightarrow{u_\theta}$. Finalement on trouve :

$$m\overrightarrow{g} = mg(\sin\alpha\cos\theta\overrightarrow{u_r} - \sin\alpha\sin\theta\overrightarrow{u_\theta} - \cos\alpha\overrightarrow{u_z})$$

b) Le théorème du moment cinétique en O entraîne : $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma}_0}{\mathrm{d}t} = mL^2\ddot{\theta}\overrightarrow{u_z} = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{R}_N + \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{T}$

Le moment de la force $\overrightarrow{T}$ par rapport à O est nul puisque $\overrightarrow{T}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OM}$. Le moment de $\overrightarrow{R}_N$ est perpendiculaire à Oz. Il reste à calculer les composantes du moment du poids sur Oz : $\overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{g} = mgL(\cos\alpha\overrightarrow{u_\theta} - \sin\alpha\sin\theta)\overrightarrow{u_z}$

Le théorème du moment cinétique s'écrit : $mL^2\ddot{\theta} = -mgL\sin\alpha\sin\theta \;\Rightarrow\; \ddot{\theta} + \dfrac{g\sin\alpha}{L}\sin\theta = 0$

Pour les petites oscillations $\sin\theta \simeq \theta$ et si l'on pose $\omega_0^2 = \frac{g\sin\alpha}{L}$, on trouve l'équation de l'oscillateur harmonique : $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$.

c) La solution à l'équation précédente est $\theta = \theta_0\cos(\omega_0 t + \varphi)$. À $t = 0$, $\theta = 0$ entraîne $\cos\varphi = 0$. On prend par exemple $\varphi = \pi/2$, alors $\theta = -\theta_0 \sin\omega_0 t$. Le calcul de $\dot{\theta}$ donne $\dot{\theta} = -\omega_0\theta_0\cos\omega_0 t$. À $t = 0$, $\dot{\theta} = v_0/L$ d'où $\theta_0 = -v_0/(L\omega_0)$ et

$$\theta(t) = \frac{v_0}{L\omega_0}\sin\omega_0 t$$

L'angle maximal atteint est donc $\dfrac{v_0}{L\omega_0}$.

Exercice 03

1. Les trois forces qui s'exercent sur le point M sont le poids et la réaction normale $\overrightarrow{R}_n$ du plan xOy ainsi que la tension du ressort qui est selon OM. Puisque le mouvement est plan et horizontal, les forces verticales se compensent : $\overrightarrow{R}_n + m\overrightarrow{g} = \overrightarrow{0}$. Le théorème du moment cinétique s'écrit donc :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}_O}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{T} = \overrightarrow{0}$$

puisque $\overrightarrow{T}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont colinéaires. Ainsi $\overrightarrow{L}_O$ est une constante.

2. a) L'expression générale du moment cinétique est $\overrightarrow{L}_O = \overrightarrow{OM}\wedge m\overrightarrow{v}$. À $t = 0$, la vitesse est nulle donc $\overrightarrow{L}_O = \overrightarrow{0}$. Ainsi $\overrightarrow{L}_O$ est nul à tout instant, donc la vitesse est toujours colinéaire à $\overrightarrow{OM}$ et le mouvement est rectiligne suivant l'axe Ox.

b) La projection de la relation fondamentale de la dynamique sur Ox donne $m\ddot{x} = -k(\ell - \ell_0)$. Or $x = \ell$ donc on obtient : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2\ell_0$ avec $\omega_0^2 = k/m$. Les solutions sont sinusoïdales :

$$x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + \ell_0 \text{ et } \dot{x}(t) = -A\omega_0\sin\omega_0 t + B\omega_0\cos\omega_0 t$$

Les conditions initiales $x(0) = 1,2\ell_0$ et $\dot{x}(0) = 0$ entraînent $A = 0,2\ell_0$ et $B = 0$.
L'intervalle de variation de ℓ est donc $[0,8\ell_0,\ 1,2\ell_0]$.

3. a) L'expression générale du moment cinétique en coordonnées polaires est :

$$\overrightarrow{L}_O = \overrightarrow{OM}\wedge m\overrightarrow{v} = mr\overrightarrow{u_r}\wedge(\dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}) = mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{u_z}$$

À $t = 0$, $\overrightarrow{L}_O = \ell_1\overrightarrow{u_x}\wedge m\ell_1\omega\overrightarrow{u_y}$ soit $\overrightarrow{L}_0 = m\ell_1^2\omega\overrightarrow{u_z}$.

b) L'énergie potentielle élastique est $E_p = \dfrac{k}{2}(\ell - \ell_0)^2$.

Dans le cas présent, le poids ne travaille pas donc l'énergie potentielle de poids est constante ; on n'a pas besoin d'en tenir compte. La réaction perpendiculaire au mouvement comme le poids ne travaille pas non plus donc le théorème de l'énergie cinétique donne :

$$\mathrm{d}E_c = \delta W = -\,\mathrm{d}E_p \;\Rightarrow\; \mathrm{d}(E_c + E_p) = 0 \;\Rightarrow\; E_m = cte$$

L'expression de E_m en fonction des conditions initiales est :

$$E_m = \frac{m}{2}\ell_1^2\omega^2 + \frac{k}{2}(\ell_1 - \ell_0)^2$$

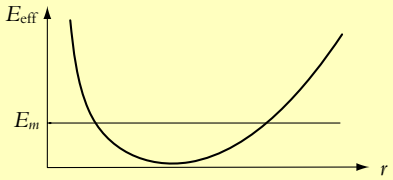
L'expression générale de E_m est :

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + E_p = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}k(r - \ell_0)^2$$

c) Puisque le moment cinétique est constant et égal à $mr^2\dot{\theta}$, la vitesse angulaire est de signe constant ici positif en raison des conditions initiales. Donc le module L est égal à $mr^2\dot{\theta}$ et $\dot{\theta} = L/mr^2$. On remplace $\dot{\theta}$ par cette expression dans l'énergie mécanique et on trouve :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}k(r - \ell_0)^2 \text{ d'où } E_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}k(r - \ell_0)^2$$

On a représenté l'allure de la fonction E_{eff} sur la figure (S25.3).



Le mouvement ne peut avoir lieu que dans les zones où $E_m \geqslant E_{\text{eff}}$ puisque $m\dot{r}^2 \geqslant 0$, donc la zone de mouvement est sous la droite d'équation $E_{\text{eff}} = E_m$.

d) D'après ce que l'on vient d'écrire, il faudrait une énergie mécanique infinie pour s'éloigner à l'infini de O.

e) La vitesse radiale $\dot{r}$ peut s'annuler au cours du mouvement aux deux points extrêmes pour lesquels $E_m = E_{\text{eff}}$. En revanche la vitesse angulaire ne peut s'annuler car avec la constance de L cela entraînerait $r \to \infty$ ce qui est impossible. La vitesse ne peut donc pas s'annuler.

f) Il faudrait aussi une énergie infinie pour atteindre O.

4. a) Si le mouvement est circulaire r est constant donc $\dot{\theta} = L/mr^2$ est aussi constante.

b) La seule possibilité correspond au minimum de la courbe $E_{\text{eff}}(r)$ sinon comme c'est représenté sur la figure (S25.3), le point M oscille entre deux positions. Il faut donc calculer la position du minimum :

$$\frac{\mathrm{d}E_{\text{eff}}}{\mathrm{d}r}(\ell_1) = -\frac{L^2}{m\ell_1^3} + k(\ell_1 - \ell_0) = 0 \;\Rightarrow\; -\frac{m^2\ell_1^4\omega^2}{m\ell_1^3} + k(\ell_1 - \ell_0) = 0$$

On trouve $\ell_1 = \ell_0\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$, avec $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Cette solution est possible si $\omega < \omega_0$.