Pascal Serman
9, rue Marc Chagall
17440 Aytré

pascal.serman@wanadoo.fr

Quand la longueur de Planck confirme l'intuition de Newton

Introduction

Dans cet article, nous réfléchissons à l'une des difficultés rencontrée par l'activité mathématique depuis qu'elle s'est séparée de l'activité des sciences expérimentales : alors qu'elle se développe dans le domaine de la pure pensée, comment faire pour qu'une théorie mathématique soit en adéquation avec la réalité ? Nous prenons comme exemple l'infiniment petit, confrontant *l'intuition* de Newton et la *réalité* de la longueur de Planck.

Dans une première partie, nous présentons au lecteur notre conception de la mathématique et de son lien avec la réalité.

Dans une deuxième partie, nous nous intéressons à la première définition du Livre I des *Éléments d'Euclide,* celle du *point*, ainsi qu'au premier paradoxe de Zenon (celui de la *dichotomie*), avant de montrer comment un résultat de la mécanique quantique (l'existence dans la réalité d'un *quantum* de longueur) *résout* ce paradoxe.

Dans une troisième partie, nous constatons que ce même résultat de la mécanique quantique donne un contenu *physique* à l'intuition de Newton (l'existence de *grandeurs évanouissantes*).

Dans une quatrième partie, nous rêvons à une réconciliation entre la mathématique et la physique, basée sur les résultats de la physique.

Dans une cinquième partie, nous nous intéressons à la la révolution de l'analyse non-standard.

En annexe, nous proposons au lecteur des extraits de textes qui ont jalonné notre réflexion.

1. Notre conception de l'activité mathématique[1]

L'activité mathématique se déroule dans le monde réel, plus précisément dans la partie du monde réel qu'est le cerveau humain. Le cerveau humain est cette partie du monde réel que l'évolution a doté de la faculté de penser le monde réel.

Par exemple, s'agissant des nombres entiers, l'homme commence par les utiliser, probablement par l'intermédiaire des dix doigts de ses mains[2] ; les nombres entiers existent, puisque l'homme s'en sert pour des besoins pratiques. Le cerveau élabore les concepts de nombre, d'opérations sur les nombres, etc., qu'il formalise finalement sous forme de définitions et d'axiomes.

En ce sens, l'activité mathématique des *philosophes de la nature* (en particulier des Éléates), comme celle des différents auteurs jusqu'à *Euclide*[3] mérite d'être qualifiée d'*intuitionniste* : les concepts définitions, axiomes) sont le produit de ce que l'intuition

1Cette conception est nourrie notamment par la lecture des pages consacrées à la mathématique par Hegel [6, 7], Marx [9] et Engels [2], ainsi que par un auteur peu connu en France, Havemann [5].
2 Marx qualifiait la main « d'outil du cerveau ».
3 Sur les prédécesseurs d'Euclide, cf. dans [3] l'introduction de Caveing .

sensible suggère à la matière de leurs cerveaux.

A partir de là, le cerveau humain développe la mathématique dans le domaine de la *pure pensée*. Dés lors, l'activité mathématique apparaît coupée du monde réel.

Dès le premier raisonnement mathématique, il s'établit ainsi une dialectique entre l'observation du monde réel, d'où les mathématiques sont issues, et le développement des mathématiques, lequel s'effectue dans une partie du monde réel apparemment coupée du monde réel, le cerveau de l'homme.

L'activité mathématique se développe dans la matière du cerveau humain, lequel fonctionne suivant des lois naturelles[4], ce qui explique, par exemple, que même des résultats de jeux *gratuits* ou *purement logiques* ont parfois des applications concrètes dans le monde réel, parfois de fort surprenante manière.

S'agissant de la question des fondements :

- nous pensons que la preuve d'un objet, c'est qu'on l'appréhende, donc nous sommes résolument constructivistes ;

- nous pensons avec Hartong et Reeb[5] que ce qu'ils appelaient *le dogme* formaliste est une perversion du formalisme des origines, et sommes d'accord avec eux qu'un retour à *l'intuition* est salutaire ; selon nous, cette intuition prend sa source dans l'observation de la réalité : par exemple, l'intuition de l'infiniment petit, ce sont les particules élémentaires, d'où notre intérêt pour la mécanique quantique et son quantum de longueur.

En résumé, l'activité mathématique part du monde réel, se développe dans le domaine de la pure pensée, puis revient dans le monde réel, enrichie de nouveaux développements. Cela, quelle que soit la conscience qu'en ait le mathématicien.

2. Euclide, le point, la dichotomie, Zenon et la longueur de Planck ...

Depuis la rédaction des *Éléments* d'Euclide, sur les fondations que constituent les définitions et axiomes (ou notions communes) qui y sont énoncés, la mathématique s'est développée par le seul moyen du raisonnement logique. L'apport de nouvelles définitions et de nouveaux axiomes n'a en rien changé le principe de la démarche mathématique.

La définition du point selon Euclide est *dichotomique*

Le *Livre I* des *Éléments* s'ouvre sur une première définition, celle du point[6] :

> 1. *Un point[7] est ce dont il n'y a aucune partie.*

Vitrac, le traducteur, commente immédiatement

> La première définition des *Éléments* est négative[8]. *Il était difficile de faire autrement ;*

4 Lesquelles lois naturelles, au niveau des connexions neuroniques, sont de l'ordre de l'infiniment petit – nous pensons que les résultats de la physique quantique permettront d'expliquer bien des aspects encore méconnus du *penser* .

5 [4]

6 [3], p.152 ;

7 (note de Vitrac) Le mot « point » est σημειον (« signe »), terminologie classique des géomètres à partir d'Apollonius et d'Euclide. Auparavant le terme utilisé était στιγμη (« marque du stylet ») avec une connotation évidemment plus « concrète » ; Aristote (…) utilise les deux mots concurremment.

8 Qu'une définition soit négative ne nous paraît pas gênant en soi. Ainsi que l'écrivait Havemann : « L'édifie tout entier de la logique formelle repose en effet sur une seule proposition, la proposition d'identité. Sur la base de cette proposition l'édifice est alors construit à l'aide de quelques règles conventionnelles concernant les ensembles, les éléments et la rédaction des énoncés. Mais que dit cette proposition ? Elle peut se formuler ainsi : A ne peut être

> *définir le point à partir de la ligne aurait été une faute logique car il lui est logiquement antérieur*[9]. Le terme primitif qui sous-tend implicitement ces premières définitions, la grandeur, est habilement évoqué ici : selon Aristote, la quantité est ce qui est divisible, et la grandeur est ce qui est divisible en parties continues ; le point quant à lui est la non-grandeur, le « sans-partie ».

Remarquons que cette définition du point contient clairement le principe de la dichotomie.

Le premier paradoxe de Zenon : la dichotomie

Aristote écrit dans sa *Physique*[10]

> Les arguments de Zenon contre le mouvement sont au nombre de quatre ; ils causent beaucoup de soucis à ceux qui veulent les résoudre. Le premier argument porte sur l'inexistence du « se mouvoir », compte tenu du fait que le mobile doit parvenir à la moitié avant d'atteindre le terme de son trajet, argument que nous avons déjà discuté (…).

Zenon développe ensuite l'idée suivant laquelle, parvenu à la moitié du trajet, le mobile doit parcourir la moitié du chemin qui reste, puis encore la moitié de ce qui reste, et ainsi de suite dans un processus sans fin qui, s'il rapproche constamment le mobile du but, lui interdit de l'atteindre.

Zenon prétend-il nier la possibilité du mouvement ou cherche-t-il à prouver que la vision dichotomique de l'espace ne permet pas d'expliquer le mouvement ? Peu importe au demeurant, car son premier paradoxe indique une difficulté réelle : la *dichotomie.* Procédé mathématique dont la fécondité, aujourd'hui, n'est plus à prouver, la dichotomie tombe en défaut devant la description q'un processus aussi courant que le déplacement d'un point à un autre,

Aristote réfute le paradoxe de la manière suivante[11]

> C'est pourquoi l'argument de Zenon admet une prémisse fausse : qu'il n'est pas possible que les grandeurs illimitées soient chacune parcourue ou touchée une par une par les grandeurs illimitées en un temps limité. En effet, *illimité*, rapporté à la longueur et au temps, se dit en deux sens, de même que rapporté, plus généralement, à tout ce qui est continu : car on peut considérer soit l'infini selon la division, soit l'infini selon les extrémités. Alors qu'il n'est pas possible qu'une chose entre en contact dans un temps limité avec des grandeurs illimitées en quantité, cela est possible si ces grandeurs sont illimitées en division. En effet, du point de vue de la divisibilité, le temps lui-même est illimité. Il en résulte que c'est dans un temps illimité, et non pas dans un temps limité, que s'effectue le parcours de l'illimité et que le contact avec les grandeurs illimitées se fait par des grandeurs illimitées, et non pas par des grandeurs limitées.

Voyons tout de suite comment la mécanique quantique résout ce paradoxe avec élégance.

La mécanique quantique résout le paradoxe de la dichotomie

Au début de ce mois de juillet 2012, mois durant lequel nous rédigeons le présent article, les chercheurs scientifiques du CERN ont mis en évidence de manière expérimentale l'existence du *boson de Higgs*, achevant ainsi la description de ce que les physiciens appellent le *modèle standard* de la physique. La mécanique quantique se trouve ainsi

---

simultanément et dans la même définition A et non-A. Que signifie d'autre cette proposition, sinon qu'un être déterminé n'est pas défini seulement par lui-même, mais bien davantage par sa négation, c'est à-dire par l'être qu'il n'est pas ? » (Lettre à Jean-Paul Sartre, dans [11], traduite par nos soins en collaboration avec Danielle Chmelevsky).

9 (note de Vitrac) La définition pythagoricienne du point : « une unité qui a une position » (…) est criticable si l'on estime que point et unité appartiennent à des registres différents (…) et relèvent de sciences différentes (la géométrie et l'arithmétique Le débat sur la définition du point était assez ancien, puisque, selon Aristote, Platon avait combattu cette notion comme étant « fiction » géométrique (…). Lui-même critique les définitions proposées par les Platoniciens et propose comme définition « ce qui est absolument indivisible, mais avec position » (...).

10 Cité dans [1], p.287

11 *Ibidem*

confirmée[12] comme théorie scientifique rendant compte de tous les faits expérimentaux actuellement connus au sujet des particules élémentaires constituant la matière.

Selon cette théorie, il existe dans la nature une longueur en-deçà de laquelle la notion de longueur mesurable perd toute signification ; cette longueur, dite l*ongueur de Planck*, est une constante de la nature ; ainsi, de même qu'il y a un *quantum* d'énergie, il existe un *quantum* de longueur[13]. Ce quantum de longueur mesure environ 1,616 $252\times10^{-35}m$.

Dit autrement, la réalité de l'univers est quantique et cette réalité est saisissable au niveau des particules ; la longueur infiniment petite de la réalité est la longueur de Planck.

Nous en déduisons une première résolution du paradoxe en quelques mots

> Le mobile poursuit son mouvement aussi longtemps que la distance qu'il lui reste à parcourir excède la distance de Planck ; dès que cette condition n'est plus remplie, le mobile atteint son but.

Une telle explication nous paraît régler cette question élégamment et définitivement[14].

Une autre explication, plus formelle, consiste en l'expérience de pensée qui suit : étant donné un mobile ayant à parcourir une distance de 1*m*, fractionnons par la pensée le déplacement en étapes dichotomiques[15].

La longueur de Planck mesure approximativement 1,616 $252\times10^{-35}m$. Pour simplifier les calculs, nous l'arrondirons à $1{,}6\times10^{-35}\ m$.

Soit donc un mobile parcourant une distance de 1*m,* distance clairement supérieure à la longueur de Planck.

Nous allons répéter *mécaniquement* l'algorithme de la dichotomie, tant que la distance restant à parcourir excèdera la longueur de Planck .

> Le mobile parcourt d'abord $\frac{1}{2}m$ (étape 1) ; il lui reste alors à parcourir $\frac{1}{2}m$;
>
> il parcourt ensuite $\frac{1}{2^2}m$ (étape 2) ; il lui reste encore à parcourir $\frac{1}{2^2}m$;
>
> il parcourt ensuite $\frac{1}{2^3}m$ (étape 3) ; il lui reste encore à parcourir $\frac{1}{2^3}m$;
>
> et ainsi de suite, tant que la distance à parcourir $\frac{1}{2^n}m$ excède $1{,}6\times10^{-35}\ m$;
>
> parvenu à l'étape *n,* il lui reste à parcourir $\frac{1}{2^n}m$;
>
> tant que $\frac{1}{2^n}$ reste au-dessus de $1{,}6\times10^{-35}$, le mobile poursuit son mouvement ;

12 Sous réserve, bien entendu, des indispensables vérifications expérimentales

13 Il existe aussi d'autres *unités de Planck*, notamment un *temps de Planck*, autrement dit un *quantum* de temps, que nous laissons de côté dans cet article

14 Par *définitivement,* nous entendons *aussi longtemps qu'un résultat expérimental n'aura pas remis en cause l'existence du quantum de longueur* ; toute théorie scientifique est sujette à réfutation, une seule expérience suffit pour cela ; cf. en annexe 2 le point de vue de Havemann sur le sujet

15 Fractionner un mouvement en étapes contredit ce qu'est un mouvement ; en effet, par définition, un corps est au repos s'il occupe une portion déterminée de l'espace ; de ce fait, un corps en mouvement n'occupe à aucun moment une portion déterminée de l'espace : on résout ainsi le troisième paradoxe de Zenon – celui de la flèche.

dés que $\frac{1}{2^n}$ passe sous la « barre » *naturelle des* $1{,}6\times10^{-35}$, le mobile a atteint son but.

Cela se produit lorsque $\frac{1}{2^n}\leq 1{,}6\times10^{35}$ c'est-à-dire $2^n \geq \frac{1}{1{,}6\times10^{-35}}$, ou encore $2^n \geq 6{,}25\times10^{34}$.

Il n'est pas nécessaire de recourir aux logarithmes[16] pour résoudre cette inéquation, sa résolution est assez rapide à l'aide d'une calculatrice et de la touche puissance : on trouve

$2^{115}\approx 4{,}15\times10^{34}$ et $2^{116}\approx 8{,}31\times10^{34}$, ce qui permet d'affirmer qu'à l'étape 115, le mobile n'a pas encore atteint son but, et qu'avant l'étape 116 il l'a atteint.[17]

L'expérience de pensée consistant à numéroter chacune de ces étapes est donc *concluante* : un résultat de la physique moderne, la *longueur de Planck*, nous permet de *décrire* le mouvement en le décomposant en étapes …

Ainsi, cette expérience *réfute* l'argument de Zenon (si l'on considère que Zenon entend prouver l'impossibilité du mouvement) ou *donne raison* à Zenon (si l'on considère que Zenon entend prouver que la vision *dichotomique* de l'espace ne permet pas de décrire la *réalité* du mouvement).

En tout état de cause, cette expérience résout le paradoxe de la dichotomie. Par la même occasion, cette expérience de pensée permet de préciser les limites physiques de validité du procédé de dichotomie.

Un résultat de la physique quantique résout donc le premier paradoxe de Zenon.

3. La mécanique quantique et l'intuition de Newton

Newton, les fluxions et les Principia

Dans sa *Méthode des fluxions*[18], Newton s'intéresse à des problèmes de vitesse, de maxima et de minima, de tangentes, de courbure, de quadrature, de longueur … Il considère des accroissements très petits et, dans le cours de ses calculs, tantôt *néglige* ou *rejette* certains termes très, très petits, tantôt signale que ces termes *s'évanouissent*. Le moins qu'on puisse dire est que Newton laisse dans l'obscurité le bien fondé de cette *négligence*, de ce *rejet* ou de cet *évanouissement.*

Dans ses *Principes Mathématiques de la Philosophie naturelle*[19], Newton s'efforce d'être plus précis. Il recourt dans ses raisonnements et dans ses calculs, à une méthode dite « des premières et dernières raisons », clairement exposée.

Cela dit, il conclut une explication (scholie) à propos de l'infiniment petit en comparant celui-ci à l'infiniment grand[20]

> On comprendra ceci plus clairement dans les quantités infiniment grandes. Si deux quantités, dont la différence est donnée, augmentent à l'infini, leur dernière raison sera donnée et sera certainement la raison d'égalité, cependant les dernières, ou les plus grandes quantités auxquelles répond cette raison, ne seront point des quantités données. Donc,

16 A l'aide des logarithmes, la résolution, certes plus rapide, est cependant plus *abstraite*
17 La généralisation à un parcours de longueur quelconque est immédiate.
18 [10]
19 [11]
20 [11], p.33

> lorsque je me servirai dans la suite, pour être plus clair, des mots de *quantités évanouissantes*, de *quantités dernières*, de *quantités très petites*, il ne faut pas entendre par ces expressions des quantités d'une grandeur déterminée, mais toujours de quantités qui diminuent à l'infini.

Remarquons que Newton, ignorant l'existence du *quantum* de longueur (longueur de Planck), raisonne toujours dans le cadre de la dichotomie : diminuer à l'infini, cela signifie diminuer y compris très en deçà de toute longueur mesurable, y compris du quantum.

La longueur de Planck et la grandeur évanouissante de Newton

Pour ne pas alourdir la lecture de ce qui suit, nous ne considérons désormais comme grandeurs que des longueurs, aires ou volumes, ce qui permet de ramener l'infiniment petit à la longueur de Planck.

S'il avait eu connaissance du quantum de longueur (longueur de Planck), Newton aurait pu éviter la référence à l'infiniment grand et conclure la scholie précédente en remplaçant « *à l'infini* » par « *jusqu'à ce que leur grandeur n'excède plus, dans toutes leurs dimensions, la longueur de Planck.* ».

La conclusion aurait alors pu être la suivante (*entre crochets, notre formulation*) :

> Lorsque je me servirai dans la suite, pour être plus clair, des mots de *quantités évanouissantes*, de *quantités dernières*, de *quantités très petites*, il ne faut pas entendre par ces expressions des quantités d'une grandeur déterminée, mais toujours de quantités qui diminuent [*jusqu'à ce que leur grandeur n'excède plus dans toutes leurs dimensions, la longueur de* Planck].

Newton aurait été ainsi en mesure de sortir du cadre de la dichotomie, se contentant de *mesurer l'évanouissement* de la grandeur à l'échelle de la *longueur de Planck.* Dit autrement, la grandeur s'évanouirait *en perdant toute dimension mesurable*. Ce qui est tout autre chose que de s'évanouir en disparaissant dans un néant.

Autrement dit, la connaissance de la mécanique quantique aurait permis à Newton de publier de son vivant sa *« Méthode des fluxions »* sans craindre d'être l'objet de la risée générale...[21].

4. Pour une approche de l'infiniment petit appuyée sur la physique

Une question préliminaire

La physique ayant établi que la réalité de l'univers est quantique, n'est-il pas désormais possible de modifier en conséquence l'approche mathématique de l'infini, en commençant par définir l'infiniment petit *actuel* ?

Pour ce qui nous concerne, nous répondons par l'affirmative.

Une nouvelle définition du point ?

Reprenons la définition *inaugurale* des *Éléments* d'Euclide, celle du *point*[22].

A la définition d'Euclide

> 1. *Un point est ce dont il n'y a aucune partie.*

nous proposons de substituer celle-ci (entre crochets, notre formulation)

---

21 Sur cette question, cf. dans [10] l'introduction de Buffon , page iv

22 cf. plus haut, section 2 du présent article

1*. *Un point est ce dont [chaque dimension est en deçà de la longueur de Planck].*

Cette définition est *positive.* Elle affirme que le point (mathématique) est l'idéalisation d'une *réalité* (physique) : le quantum de longueur (longueur de Planck). Elle exprime le fait que la divisibilité de la longueur cesse lorsqu'est atteint une constante de la nature, le quantum de longueur.

On nous objectera peut-être que cette définition du point n'est pas compatible avec la dichotomie. Nous répondrons en revenant à l'origine de la vision dichotomique de l'espace.

Qu'est-ce que la dichotomie ? Une idéalisation de la réalité, laquelle est, dans son fondement, quantique.

Que cette idéalisation soit à l'origine de grandioses réalisations de la mathématique est incontestable.

Que cette idéalisation ne soit pas pour rien dans ce qui a permis à la mathématique de devenir ce qu'elle est aujourd'hui, nul ne peut en douter.

Est-ce une raison pour faire de la dichotomie un dogme intangible ? Nous ne le pensons pas. Tout au contraire, la dichotomie n'est jamais qu'une hypothèse qui nous semble avoir épuisé toutes ses potentialités. Et nous partageons avec Hartong et Reeb le refus d'une mathématique enfermée dans un *dogme figé*[23].

La réalité de l'espace physique n'est pas dichotomique, mais quantique. Nous proposons simplement d'en tenir compte pour bâtir une théorie de l'infiniment petit qui ne soit pas le moins du monde spéculative, une théorie mathématique fondée sur la réalité telle que les physiciens la perçoivent aujourd'hui.

5. Et l'analyse non-standard ?

On pourra nous faire remarquer qu'il existe déjà une théorie mathématique dans laquelle l'infiniment petit a droit de cité : l'analyse non-standard.

Nous répondrons que nous en sommes conscients, et que nous pensons que tant la théorie de Robinson que celle de Nelson ont déclenché une révolution salutaire en redonnant droit de cité à l'infiniment petit[24] dans les traités de mathématique.

Cependant, ces deux constructions restent marquées par l'affirmation qu'il existe des objets que nul ne pourra jamais percevoir.

Par exemple, Nelson bâtit sa théorie en affirmant l'existence d'un entier non standard[25]. Une fois admis l'existence de cet entier-là, on démontre qu'il est supérieur à tout entier naïf, on le qualifie d'infiniment grand, on l'inverse et l'on a un infiniment petit. L'ennui est que cet entier non standard n'a rien d'*intuitif* : il ne correspond à rien de *perceptible* dans le monde réel, même en s'appuyant sur les résultats de la physique. Dit autrement, l'existence de cet entier non standard est purement *spéculative.* Ce qui n'enlève rien à la fécondité de la théorie de Nelson.

Certains mathématiciens contournent la difficulté en considérant un entier tellement grand qu'il ne représente rien dans le monde réel, par exemple $10^{1\,000}$ (nombre cardinal supérieur au nombre de particules de l'univers, nous disent les physiciens).

23 cf. [4], section 1

24 Ainsi qu'à l'*infiniment grand*, mais, ainsi que nous l'avons indiqué plus haut, nous consacrons le présent article à l'*infiniment petit* .

25 C'est en fait un peu plus compliqué ; cf. Lobry, [8], p. 191 & suivantes.

Cette proposition, appuyée sur un résultat de la physique moderne, à savoir l'estimation du nombre total de particules de l'univers, encourt cependant un questionnement : pourquoi ce choix de $10^{1\,000}$? Pourquoi ne pas choisir $10^{1\,000}+1$ ou $10^{1\,001}$, nombres qui, eux aussi, majorent ce nombre de particules ? Ensuite, $10^{1000}-1$ ou $10^{1\,000}-2$ ou $10^{1\,000}-3$ ... ne sont-ils pas d'autres candidats *plausibles* au statut d'infiniment grand, en tant que *majorants* du nombre de particules de l'univers : jusqu'où pouvons-nous poursuivre cette *décrémentation* avant de *rencontrer* un nombre entier *ordinaire*[26] ?

Pour résumer, cette manière d'aborder la question nous paraît encore quelque peu spéculative.

Enfin, l'analyse non-standard respecte le principe de dichotomie. De ce fait, elle s'interdit de rendre compte en termes les plus simples qu'il soit possible de la réalité physique.

Dit autrement, la révolution de l'analyse non-standard fut une authentique révolution. Elle a habitué les mathématiciens à calculer et à raisonner avec l'infiniment petit, tout comme avec l'infininiment grand.

Conclusion

Parvenu au terme de cet article, au moment d'inviter le lecteur à prendre connaissances des annexes qui ont jalonné notre réflexion, nous formons le souhait d'avoir intéressé le lecteur à une réfexion *matérialiste* et *dialectique* sur le devenir de l'activité mathématique.

Annexes

Annexe 1 : *Hegel, Science de la Logique (1812)*

Extraits de la remarque «*Le concept de l'infini mathématique »*

p.257 La pensée ne peut être déterminée plus justement qu'en la manière où Newton l'a donnée. (…). Ces fluxions, Newton les explique de façon plus précise (…) en ce qu'il entend non pas des *indivisibles* – une forme dont se servaient les mathématiciens antérieurs, Cavalieri et autres, et qui contient le concept d'un quantum *déterminé en soi*, mais *des divisibles évanouissants*. (…). On peut objecter que les grandeurs évanouissantes n'ont pas de relation ultime, parce que cette relation, avant qu'elles n'aient disparu, n'est pas la dernière, et lorsqu'elles ont disparu, n'en est plus une. Mais par la relation des grandeurs évanouissantes il faut entendre la relation non pas avant qu'elles disparaissent et non pas après, mais la relation avec laquelle elles disparaissent (…). De même la première relation des grandeurs en devenir, c'est la relation avec laquelle elles deviennent.

p.274 Que l'on ait accepté des preuves bâties sur cet acte d'égaliser ne peut sans doute avoir d'autre raison que celle-ci : ce qui résultait était toujours connu d'avance, et la preuve qui avait été agencée (…) produisait au moins l'apparence de preuve - une apparence que l'on préférait encore à la simple foi, au savoir tiré de l'expérience sensible. Je n'hésite aucunement à ne voir dans ce procédé qu'une simple prestidigitation et une charlatanerie

p.275 Aussi longtemps que la mathématique de l'infini est privée du concept fondamental de son ob-jet, elle n'est pas en mesure d'indiquer la limite jusqu'où peut aller cet acte d'égaliser ; et même à celles qui, parmi ses opérations, sont correctes s'attache toujours le soupçon qui émane du caractère aléatoire de ce procédé, et, quand il en va de la confusion qui a été avancée, de son absurdité, (…) L'armature vide des preuves newtoniennes de cette sorte fut érigée avant tout pour prouver des lois physiques.

Annexe 2 : *Hegel, Science de la Logique (1831)*

---

26 Par *ordinaire* nous entendons *naïf*, *constructible*, … ; pour une approche de cette question, cf. [8].

Extrait de la remarque« *Le but du calcul différentiel déduit de son application* »[27]

p.305 Il est permis d'avancer cette remarque préalable que la méthode du calcul différentiel n'a pas été établie et inventée pour elle-même ; que non seulement elle n'est pas fondée en soi, comme une autre modalité du procédé analytique, mais la violence avec laquelle elle rejette les membres qui résultent du développement d'une fonction, alors que c'est le *Tout* de ce développement qui importerait (pense-t-on) avant tout à la chose (qui est considérée comme correspondant à la *différence* existant entre la fonction développée d'une grandeur variable, après que celle-ci a reçu la forme d'un binôme, à partir de la fonction primaire) est plutôt contraire à tous les principes mathématiques. »

Annexe 3 : *Robert Havemann, Dialectique sans Dogme ?*

11e conférence : Le matérialisme dialectique et les sciences (10 janvier 1964)[28]

(...)

Prenons le cas des mathématiques : aujourd'hui l'évolution moderne des mathématiques place au tout premier plan les problèmes de la continuité et de la discontinuité. Il ne s'agit pas seulement de l'ancienne opposition entre géométrie et algèbre ; du contexte homogène et topologique de la géométrie, où aucun dénombrement n'entre en jeu, et de l'algèbre, où tout est ramené aux chiffres, aux quantités, aux ensembles et aux discontinuités. Dans les mathématiques modernes, les deux branches fusionnent de multiples manières. Les questions les plus profondes dont traitent les mathématiques modernes, comme celle du fondement théorique du calcul des probabilités, débouchent sur les problèmes de la dialectique de la continuité et de la discontinuité.

Nous pourrions alors être tentés de rechercher une systématique des catégories dialectiques, entièrement séparée des objets particuliers étudiés par chaque science, par la physique, par les mathématiques, par la biologie, par la chimie, etc., une véritable logique dialectique, dans le but de bâtir un édifice aussi imposant que l'est aujourd'hui la logique formelle. Je pense toutefois que cela n'est pas possible. Ce n'est certainement pas par hasard que toutes les tentatives faites jusqu'ici dans ce sens aient complètement échoué.

Entre la logique dialectique et la logique formelle, il existe d'abord une différence essentielle de méthodologie. Il est vrai que la logique formelle analyse déjà une dialectique fondamentale, la dialectique de l'égalité et de la différence, ainsi que ce qui en découle. Mais elle ne mène ainsi à bien qu'une *analyse* purement conceptuelle. Dans cette analyse purement formelle, qui est source de définitions, nous pouvons, et nous devons opérer conceptuellement de façon entièrement non-dialectique. Pour cette raison, Hegel considérait la logique formelle comme un système de platitudes et de pléonasmes. Pour lui, elle était un repoussoir. Pour raisonner, il nous faut pourtant commencer par séparer clairement les concepts les uns des autres, les confronter puis soigneusement analyser et systématiser les conséquences qui s'en déduisent. Cela, c'est la logique formelle. La logique dialectique, par contre, est une logique que nous ne pouvons pas développer dans nos têtes.

(...)

On ne peut en effet saisir la dialectique que dans la réalité concrète. Quand nous séparons la dialectique de la réalité concrète et la transformons en un pur formalisme, elle devient un schéma terne: elle se fige en un système qui de plus a la prétention d'être le plus général, le plus important et le plus profond de tout ce que connaît l'humanité. Mais, coupée de la réalité, la dialectique n'en est plus une. Coupée de la réalité, elle devient controverses incohérentes, prenant la forme de contradictions étonnantes, absurdes, dépourvues de sens. Une telle dialectique n'est même pas matérialiste.

---

27 Cette remarque ne figure pas dans l'édition de 1812 ; dans l'édition de 1831, elle suit la précédente.

28 Traduit par nos soins, en collaboration avec Danielle Chmelevsky

(...)

Dans sa célèbre thèse sur Feuerbach, sur le sens de laquelle les philosophes se méprennent souvent totalement, Marx dit, à propos de toute la philosophie passée, cette philosophie qui n'a fait que reconstruire rétrospectivement le monde en chambre : « *Les philosophes ont seulement interprété le monde de différentes manières. Mais il s'agit de le transformer.* » Pourtant, la philosophie vivante, celle qui, comme Engels le dit, fait ses preuves et est à l'œuvre dans les sciences, n'est pas seulement le résumé de notre façon d'appréhender l'Univers dans ses contradictions et dans sa fantastique beauté. Elle est une philosophie active justement parce qu'elle est, non pas un système de théorèmes généraux, mais une méthode dialectique consciente qui saisit l'univers, malgré sa diversité, comme une unité, elle n'est pas un système universel mais une vision de l'univers. Elle vit en nous tous, elle évolue avec notre connaissance, elle croît avec notre pouvoir de modifier l'univers, elle est active, elle ne se contente pas d'interpréter, mais elle agit et résout les problèmes en les attaquant concrètement. Elle ne part pas du général, mais elle va de l'individuel au particulier et, de là, au général. Elle découvre la dialectique concrète dans les relations réelles et ne pense pas que l'univers s'oriente sur ce qui passe dans la tête d'un être humain - mais bien l'inverse. C'est cela, son matérialisme.

3e séminaire : Existe-t-il un système de la dialectique ? (31 janvier 1964)[29]

(...)

Résumons-nous : les théories des sciences naturelles et, plus généralement, toutes les théories scientifiques, tendent à l'axiomatisation. Quand elles y sont parvenues, il advient habituellement que des contradictions dialectiques internes au système d'axiomes soient mises en évidence. Il s'ensuit avec certitude de nouvelles connaissances scientifiques qui, étant inconciliables avec le système d'axiomes considéré, obligent la science à progresser et, pour finir, à forger un nouveau système d'axiomes.

La même chose vaut d'ailleurs pour le développement des mathématiques. On considère souvent les mathématiques comme une science entièrement indépendante de l'expérience. Une discussion compliquée et difficile se mène entre les mathématiciens sur la question du rapport qu'entretiennent les mathématiques avec l'expérience pratique. Le développement historique montre qu'un grand nombre de propositions mathématiques ont été « découvertes » longtemps avant que n'aient été formulés les axiomes dont elles peuvent être déduites. Les mathématiques se sont donc développées de la même façon que les sciences purement expérimentales. Cela peut surprendre parce que les mathématiques progressent par le moyen de la « pure pensée ». En fait, les idées des mathématiciens leur sont souvent suggérées par des problèmes pratiques. Certains problèmes rencontrés dans les sciences expérimentales se prêtent à la mathématisation, ce qui n'exclut pas que le mathématicien ne doive se libérer totalement de tous les faits expérimentaux : il doit en effet travailler avec de purs produits de la pensée. En séparant le problème de son objet concret, il engage sa raison dans les sphères profondes de l'abstraction. Cheminant pas à pas, il découvre ainsi de nombreuses vérités dont il ne comprend que plus tard la raison profonde qu'il énonce sous forme d'axiomes.

L'étude de la méthode axiomatique a conduit la logique mathématique aux célèbres théorèmes de Gödel. Il s'agit là d'un problème vieux comme la logique qui est qu'il existe des propositions qui, sans contredire en aucune façon les principes de la logique formelle, ne peuvent pourtant pas être établies logiquement comme vraies, et par conséquent ne peuvent pas être intégrés dans un système d'axiomes. Les théorèmes de Gödel affirment qu'il existe dans le domaine de toute science (y compris dans le domaine mathématique) un grand nombre de propositions que l'on ne peut justifier ni par un nombre fini, ni par une infinité d'axiomes. Il est très surprenant d'apprendre avec les outils

29 *Idem*

de la logique mathématique que les axiomes ne peuvent couvrir qu'une partie de la totalité des faits établis concernant un domaine cohérent de connaissances. Axiomatiser est donc un processus qui doit constamment se poursuivre.

(...)

La première partie de l'objection de notre auditeur nous amène ainsi au constat suivant : nous pouvons résumer des phénomènes bien déterminés par des axiomes déterminés, mais sans arrêter jamais pour autant le progrès de la connaissance : il est impensable que l'axiomatisation de notre connaissance ait une fin. Cela se déduit logiquement des théorèmes de Gödel et cela correspond aussi à l'expérience : la connaissance est un processus sans fin. Mais c'est aussi un énoncé de la dialectique : la connaissance est un processus sans fin, et ceci pour deux raisons. D'abord, nous n'en viendrons jamais à bout parce qu'il nous faut reconnaître, avec modestie, que l'action de penser est pour nous ardue, du fait de la faiblesse de notre entendement. Ensuite, la nature, objet de notre connaissance, est elle aussi un processus sans fin. Elle génère sans cesse du nouveau. La science de la nature a confirmé de multiples manières la proposition d'Héraclite selon laquelle nous aurons toujours devant nous un monde différent, et qu'ainsi il ne suffit pas de connaître le passé pour être à même de prédire la totalité du futur. L'avenir se trouve dans l'obscurité et nous cherchons à percer cette obscurité à l'aide d'un projecteur de faible portée. Dit autrement : dans les axiomes que nous énonçons avec nos théories scientifiques, s'expriment des catégories dialectiques dont certaines, reliées entre elles, forment une unité curieuse et contradictoire. Le chercheur scientifique devrait en permanence avoir conscience du caractère contradictoire des connaissances scientifiques récapitulées sous une forme abstraite. C'est la transition vers une dialectique consciente que l'on recherche, que l'on ne découvre pas seulement après coup, mais à laquelle on est dès le début préparé. Pour répondre à l'auditeur qui se demande ce qu'est la dialectique, il faut dire pour commencer que la dialectique est le reflet dans notre conscience de la dialectique objective ou, comme le formule Engels : *« La dialectique dite objective règne dans toute la nature, et la dialectique dite subjective, la pensée dialectique, ne fait que refléter le règne, dans la nature entière, du mouvement par opposition des contraires qui, par leur conflit constant et leur conversion finale l'un en l'autre ou en des formes supérieures, conditionnent précisément la vie de la nature. »*[30] On doit donc chercher à découvrir la dialectique objective dans les processus réels. Elle ne peut sortir de notre tête à partir de la formulation de catégories dialectiques, par une axiomatisation. La dialectique est la conscience et la prise de conscience du caractère dialectique de la réalité.

Bibliographie

[1] Dumont Jean-Paul et autres, *Les Présocratiques*, Bibliothèque de La Pléiade, Editions Gallimard, Paris, 1988

[2] Engels F., *Dialectique de la Nature*, Traduction E. Botigelli, Editions So ciales, Paris, 1975

[3] Euclide, *Les Éléments*, Traduction de B. Vitrac, PUF, paris, 1990

[4] Harthong J. et Reeb G., Intuitionnisme 84, dans Barreau H. et Harthong J., La mathématique nonstandard, Editions du CNRS, Paris, 1984.

[5] Havemann R., *Dialektik ohne Dogma ? (Naturwissenschaft und Weltanschauung),* Rowohlt Verlag, Reinbek, 1968 (1ère édition 1964) (*inédit en français*)

[6] Hegel G. W. F., *Science de la Logique* (édition de 1812), traduction française de P. J. Labarrière et G. Jarczic, Aubier, Paris, 1972

30 [ ], p;213

[7] Hegel G. W. F., *Science de la Logique* (édition de 1831), traduction française de S. Jankelewitch, Aubier-Montaigne, Paris, 1949

[8] Lobry C., *Et pourtant ils ne remplissent pas **N***, Aléas éditeurs, Lyon, 1989

[9] Newton I., L*a méthode des fluxions et des suites infinies*, traduit par M. de Buffon, réédition par Albert Blanchard, Paris, 1994

[10] Newton I., *Principia – Principes mathématiques de la philosophie naturelle,* Traduction de la marquise du Châtelet, réédité par Dunod, Paris, 2006

[11] Theuer W., Florath B., *Robert Havemann - Bibliographie,* Akademie Verlag, Berlin, 2007 (*inédit en français*)

Bibilographie complémentaire

[ ] Engels F., *Anti-Dühring* (*Monsieur Eugène Dühring bouleverse la Science)*, Traduction d'E. Botigelli, Editions Sociales, Paris, 1977

[ ] Hegel G.W.F, *Encyclopédie des Sciences Philosophiques, I. La Science de la Logique*, Traduction de B. Bourgeois, Vrin, Paris, 1994

[ ] Marx K. *Manuscrits Mathématiques*, traduction d'Alain Alcouffe, éditions Economica, Paris, 1985

[ ] Ortoli S. et Pharabod J.P., *Le Cantique des Quantiques*, La Découverte, Paris, 1984