PROBABILITES

1) EXPERIENCES ALEATOIRES

A) EXPERIENCE ALEATOIRE , EVENTUALITE , UNIVERS

Un exemple bien connu : *(On considère cet exemple jusqu'à la fin du chapitre)*

On lance un dé non truqué à six faces numérotées de 1 à 6 et on note le nombre figurant sur la face supérieure du dé.

*Lancer ce dé **et noter** le nombre figurant sur une des faces est une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat (1 , 2 , … , 6 ?).*

*On dit qu'il s'agit d'une **expérience aléatoire** , c'est à dire une expérience liée au hasard pouvant conduire à plusieurs issues, appelées **éventualités**.*

Ex : *les éventualités sont 1 , 2 , 3 , 4 , 5 et 6*

*L'ensemble de toutes les éventualités d'une expérience aléatoire est appelé **univers** . En général, on le note Ω .*

Ex : $\Omega = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 \}$

B) EVENEMENT

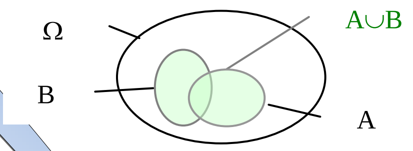
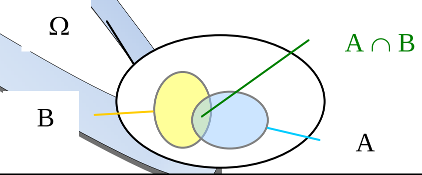
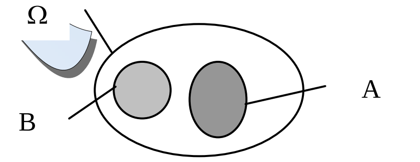
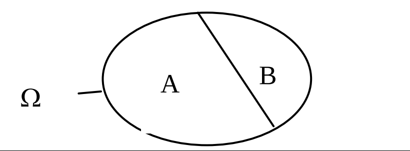
On appelle **événement** toute partie de l'univers .

*Une éventualité ω **appartient** à l'univers Ω (on note $\omega \in \Omega$) . Un événement A est **inclus** dans l'univers Ω (on note $A \subset \Omega$)*

Ex : *Par exemple, on peut considérer l'événement A : « obtenir un nombre pair » . On a A = { 2 ; 4 ; 6 }*

Rem : *Lorsqu'une éventualité ω appartient à un événement A, on dit que ω réalise A.*

Le tableau ci-dessous résume les définitions et notations importantes relatives à la notion d'événement.
A, B et C représentent des événements d'un univers Ω lié à une expérience aléatoire.

VOCABULAIRE ET NOTATION	SIGNIFICATION	EXEMPLE
Cardinal de A : card (A)	*nombre d'éventualités qui composent A*	*L'événement A : « obtenir un nombre pair » est composé de 3 éventualités . card (A) = 3*
Evénement élémentaire	*événement réduit à une seule éventualité*	*L'événement B : « obtenir le nombre 3 » ; B = { 3 }*
Evénement impossible : $A = \varnothing$	*événement qui ne se réalise jamais*	*L'événement C : « obtenir un multiple de 3 inférieur ou égal à 2 »*
Evénement certain : $A = \Omega$	*événement qui se réalise toujours*	*L'événement D : « obtenir un nombre inférieur ou égal à 6 »*
*C est **la réunion** de A et de B :* $C = A \cup B$ *(on dit A ou B)*	*C est l'ensemble des éventualités réalisant A ou B*  	*Soit l'événement E : « obtenir un nombre au moins égal à 4 » ; E = { 4 ; 5 ; 6 }* *Soit l'événement F : « obtenir un nombre impair » ; F = { 1 ; 3 ; 5 }* *L'événement $E \cup F$ est « obtenir un nombre au moins égal à 4 ou un nombre impair »* $E \cup F = \{ 1 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 \}$
*C est **l'intersection** de A et de B :* $C = A \cap B$ *(on dit A et B)*	*C est l'ensemble des éventualités réalisant A et B en même temps.*  	*L'événement $E \cap F$ est « obtenir un nombre au moins égal à 4 et un nombre impair » c'est à dire « obtenir un nombre impair au moins égal à 4 »* $E \cap F = \{ 5 \}$
*A et B sont **disjoints** ou **incompatibles***	*A et B ne peuvent pas se réaliser en même temps ;* $A \cap B = \varnothing$  	*Les événements E et B sont incompatibles .* $E \cap B = \varnothing$
*A et B sont **contraires** ou **complémentaires**.* $B = \overline{A}$	$A \cap B = \varnothing$ *et* $A \cup B = \Omega$ *$\overline{A}$ est l'événement constitué par les éventualités de l'univers qui ne réalisent pas A .*  	*Les événements A et F sont contraires.* $F = \overline{A}$

2) LOI DE PROBABILITE SUR UN ENSEMBLE FINI

A) DEFINITION

On note $\Omega = \{ \omega_1 , \omega_2 \ \dots \ \omega_n \}$ l'ensemble des éventualités d'une expérience aléatoire.
Définir une loi de probabilité sur Ω, c'est associer à chaque résultat ω_i un nombre p_i (appelé probabilité de l'issue ω_i) positif ou nul de telle façon que :

- $\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$
- La probabilité d'un événement A, notée P (A) , est la somme des probabilités p_i des éventualités qui constituent A.

Modéliser une expérience aléatoire, c'est associer à cette expérience une loi de probabilité sur l'ensemble Ω des résultats possibles.
Les conditions de l'expérience conduisent le plus souvent au choix du modèle.

On garde ces notations pour le reste du chapitre.

Rem : Pour toute éventualité w_i on a : $0 \leq p_i \leq 1$.

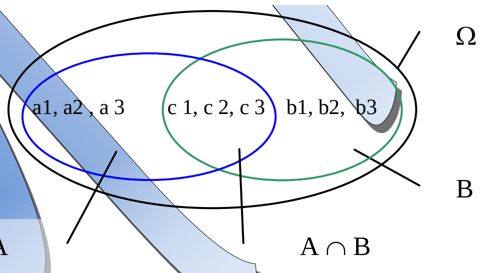
B) PROPRIETES

Soit A et B deux événements de Ω, alors :

- La probabilité de l'événement certain est 1 ; $P(\Omega) = 1$
- La probabilité de l'événement impossible est 0 ; $P(\varnothing) = 0$
- Si $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

  Si A et B sont incompatibles , $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Considérons l'exemple suivant (dans le cas général, la démonstration est la même)



Preuve : (des deux dernières propriétés)

1)
On a : A = {a1 , a2 , a3 , c1, c2 , c3 } et B = { b1 , b2 , b3 , c1 , c2 , c3 }
De plus $A \cap B$ = { c1 , c2 , c3 } et $A \cup B$ = { a1 , a2 , a3 , c1, c2 , c3 , b1 , b2 , b3 }
On a alors :
$P(A \cup B) = P(\{a1\}) + P(\{a2\}) + P(\{a3\}) + P(\{c1\}) + P(\{c2\}) + P(\{c3\}) + P(\{b1\}) + P(\{b2\}) + P(\{b3\})$
$= P(A) + P(\{b1\}) + P(\{b2\}) + P(\{b3\})$
Or :
$P(B) = P(\{c1\}) + P(\{c2\}) + P(\{c3\}) + P(\{b1\}) + P(\{b2\}) + P(\{b3\})$
$= P(A \cap B) + P(\{b1\}) + P(\{b2\}) + P(\{b3\})$
on en déduit que :
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Par abus de langage, on note souvent P (ω) au lieu de P ({ω})

Si A et B sont incompatibles, alors $A \cap B = \varnothing$ et $P(A \cap B) = 0$, d'où $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

2) On a $A \cup \overline{A} = \Omega$ et $A \cap \overline{A} = \varnothing$. Ainsi d'après la propriété précédente, on a : $P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) - P(A \cap \overline{A})$
Or $P(\Omega) = 1$ et $P(A \cap \overline{A}) = 0$ ...

C) CAS PARTICULIER : EQUIPROBABILITE

Lorsque tous les événements élémentaires d'un univers ont la même probabilité, on dit qu'il y a **équiprobabilité** .
Dans ce cas, si l'univers Ω est composé de n éventualités w_i , on a :

$$pi = P(\{w_i\}) = \frac{1}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{n}$$

On a alors, pour tout événement A : $P(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Rem :
Les expressions suivantes « dé parfait ou équilibré » , « boule tirée de l'urne au hasard » , « boules indiscernables » ... indiquent que pour les expériences réalisées, le modèle associé est l'équiprobabilité.

Ex :
Le dé est non truqué : chacune des faces à la même chance d'être obtenue . Il s'agit d'une situation d'équiprobabilité.
Dans ce cas, il est donc aisé de définir la loi de probabilité :

face	1	2	3	4	5	6
probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

On présente souvent les résultats dans un tableau

La probabilité de l'événement A : « obtenir un nombre pair » est : $P(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

PROBABILITES :

EXERCICE N°1 :

On lance au hasard un dé équilibré quatre fois de suite et on considère le nombre formé par les quatre numéros pris dans l'ordre de sortie.
Ω désigne l'ensemble des issues possibles.

Calculer les probabilités des évènements suivants :

A : " Le nombre est 4211 "

B : " Le nombre est formé de quatre chiffres distincts "

C : " Le nombre est formé d'au moins deux chiffres identiques "

P : " Le nombre est pair "

E : " Le nombre est impair et est formé de quatre chiffres distincts "

F : " Le nombre est pair ou est formé d'au moins deux chiffres identiques " (on note I : " Le nombre est impair ")

EXERCICE N°2 :

On place au hasard trois chemises de couleurs bleue, blanche et rouge dans quatre tiroirs a, b, c et d .

1) *Combien y-a-il de répartitions possibles ?*

2) *Calculer les probabilités des évènements suivants :*

A : " toutes les chemises sont dans le tiroir a "

M : " Toutes les chemises sont dans le même tiroir "

V : " Les tiroirs b et c sont vides "

EXERCICE N°3 :

Une urne contient 10 boules indiscernables, 5 rouges, 3 jaunes et 2 vertes.
On tire au hasard et simultanément 3 boules de cette urne.
Les réponses seront données sou forme de fractions irréductibles.

1. *Soit Ω l'univers associé à cette expérience.*
   Montrer que card $\Omega = 120$
2. *Soit les événements suivants :*
   A : « les trois boules sont rouges »
   B : « les trois boules sont de la même couleur »
   C : « les trois boules sont chacune de couleur différente »
   a. *Montrer que $P(A) = \frac{1}{12}$*
   b. *Calculer P(B) et P(C).*

EXERCICE N°4 :

On dispose de cinq boules numérotées de 1 à 5.
On les place au hasard dans six boites nommées A, B, C, D, E et F. Chaque boite peut recevoir jusqu'à 5 boules.
On note ACCBE l'événement : « la 1ere boule est dans la boite A, le 2^e et la 3^e dans la boite C, la 4^e dans la boite B et la 5^e dans la boite E »

1. *Soit Ω l'univers associé à cette expérience aléatoire. Calculer son cardinal.*
2. *Calculer la probabilité que toutes les boules soient dans des boites différentes.*
3. *a. Calculer la probabilité qu'aucune boule soit dans la boite A*
   b. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins une boule dans la boite A
4. *Calculer la probabilité que les boules numérotées 1 et 2 soient dans la même boite.*
5. *Calculer la probabilité que la somme des numéros des boules placées dans la boite A soit égale à 6.*

EXERCICE N°5 :

On donne $P(\overline{A} \cap B) = 0{,}25$, $P(A \cap \overline{B}) = 0{,}42$ et $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0{,}82$.
Calculer $P(A \cap B)$, $P(A)$ et $P(B)$.

Correction :

EXERCICE N°1 :

On lance au hasard un dé équilibré quatre fois de suite et on considère le nombre formé par les quatre numéros pris dans l'ordre de sortie.
Ω désigne l'ensemble des issues possibles.

card $\Omega = 6^4 = 1296$
Les 1296 issues sont équiprobables.

Calculer les probabilités des évènements suivants :
A : " Le nombre est 4211 "

$p(A) = \frac{1}{1296}$

B : " Le nombre est formé de quatre chiffres distincts "
D'après le principe multiplicatif,
card B = $6 \times 5 \times 4 \times 3$ (on peut utiliser un shéma à cases)

$p(B) = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{1296} = \frac{5}{18}$

C : " Le nombre est formé d'au moins deux chiffres identiques "
C =

$p(C) = p(\ ) = 1 - p(B) = \frac{13}{18}$

P : " Le nombre est pair "
D'après le principe multiplicatif,
card P = $6 \times 6 \times 6 \times 3$ et ... $p(P) = \frac{1}{2}$

E : " Le nombre est impair et est formé de quatre chiffres distincts "
D'après le principe multiplicatif,
card E = $3 \times 5 \times 4 \times 3$ et $P(E) = \frac{5}{36}$

F : " Le nombre est pair ou est formé d'au moins deux chiffres identiques " (on note I : " Le nombre est impair ")

$F = D \cup C = \ \cup \ = =$

Ainsi , $p(F) = p(\ ) = 1 - p(E) = \frac{31}{36}$

EXERCICE N°2 :

On place au hasard trois chemises de couleurs bleue, blanche et rouge dans quatre tiroirs a, b, c et d .

***1)** Combien y-a-il de répartitions possibles ?*

chemise 1	chemise 2	chemise 3
↑ 4	↑ 4	↑ 4

L'univers est constitué de 4^3 issues.

***2)** Calculer les probabilités des évènements suivants :*
A : " toutes les chemises sont dans le tiroir a "
M : " Toutes les chemises sont dans le même tiroir "
V : " Les tiroirs b et c sont vides "
V' : " Seuls les tiroirs b et c sont vides "
Les chemises sont placées au hasard, les 64 issues sont donc équipropables.

$p(A) = \frac{1}{64}$

$p(M) = \frac{4}{64} = \frac{1}{16}$

$p(V) = \frac{2^3}{64} = \frac{1}{8}$

$p(V') = \frac{2^3 - 2}{64} = \frac{6}{64} = \frac{3}{32}$

EXERCICE N°3 :

1. On tire 3 boules parmi 10 soit : C_{10}^{3} possibilités.
   On les tire simultanément, Ainsi card $\Omega = 120$
2. Nombre de possibilités de tirer 3 boules rouges : $C_{5}^{3} = 10$
   On a donc $P(A) = \dfrac{10}{120} = \dfrac{1}{12}$
3. a. Un ajoute la possibilité de tirer 3 jaunes
   $P(B) = \dfrac{10}{120} + \dfrac{1}{120} = \dfrac{11}{120}$
   b. On a $C_{5}^{1} \times C_{3}^{1} \times C_{2}^{1} = 5 \times 3 \times 2$ possibilités de tirer 3 boules de couleurs différentes.
   $P(C) = \dfrac{30}{120} = \dfrac{1}{4}$

EXERCICE N°4 :

1. card $\Omega = 6^5$ ou card $\Omega = C_{6}^{1} \times C_{6}^{1} \times C_{6}^{1} \times C_{6}^{1} \times C_{6}^{1} = 6^5$
   En effet, chaque boule peut être placée dans n'importe quelle boîte soit 6 possibilités par boule.
2. On peut placer la 1ère boule dans n'importe quelle boîte soit 6 possibilités.
   Pour chaque boule soit dans une boîte différente il ne reste plus que 5 possibilités pour la 2^e boule puis 4 pour la 3^e boule, etc…
   La probabilité cherchée est donc : $\dfrac{6x5x4x3x2}{6^5} = \dfrac{5}{54}$
3. a. On a 5 possibilités par boule.
   Le probabilité cherchée est donc : $\dfrac{5^5}{6^5}$
   b. « il y a au moins une boule dans la boite A » est l'événement contraire de « in n'y a aucune boule dans la boite A »
   La probabilité cherchée est donc de : $1 - \dfrac{5^5}{6^5}$

REMARQUE :

- ***Chaque fois qu' un événement est défini par « avoir au moins un … ». Vous pouvez utiliser l'événement contraire n'avoir aucun.***

4. Les boules 1 et 2 sont dans la même boite soit : 6 possibilités
   Les 3 autres boules sont dispersés au hasard dans les 6 boites soit : 6^3 possibilités
   La probabilité cherchée est donc : $\dfrac{6x6^3}{6^5} = \dfrac{1}{6}$
5. La somme des numéros des boules placées dans la boite A est égale à 6 si
   - on a placé les boules numérotées 1,2 et 3.
     Il reste alors 2 boules à placer dans 5 boites soit $5^2 = 25$ possibilités.
   - on a placé les boules numérotées 1 et 5
     Il reste 3 boules à placer dans 5 boites soit 5^3 possibilités.
   - on a placé les boules numérotées 2 et 4.
     Il reste 3 boules à placer dans 5 boites soit 5^3 possibilités

   La probabilité cherchée est donc : $\dfrac{2x5^3 + 25}{6^5} = \dfrac{275}{6^5}$

EXERCICE N°5 :

$P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0{,}18$

$P(A) = P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B) = 0{,}6$

$P(B) = P(B \cap \overline{A}) + P(A \cap B) = 0{,}43$

N*MY