M1 SUTS

Introduction aux Techniques Spatiales - Examen de Mécanique Spatiale
Corrigé

22 Février 2023

Exercice n°1 : Questions de cours

cf cours

Exercice n°2 : Retour à la maison

1. Pour un transfert entre notre orbite et la Terre, nous allons nous mettre sur une trajectoire elliptique où le Soleil occupera l'un des foyers de l'ellipse.

2. Notre ellipse aura un périhélie (nom d'un périastre sur une orbite heliocentrique) à 1 UA, et une aphélie (nom d'une apogée sur une orbite héliocentrique) à 32 UA.
   Le demi-grand axe de notre orbite de transfert sera donc de :

   $$a_H = \frac{r_p + r_a}{2} = 16.5\ UA$$

   Exprimons la 3e loi de Kepler dans le système solaire avec les longueurs exprimées en UA, et les durées en années terrestres, il vient pour la Terre :

   $$\frac{a^3}{T^2} = 1\ UA^3.an^{-2}$$

   Où 1 an correspond à une année terrestre.
   Cette constante est valable pour tout objet en orbite autour du Soleil, et donc pour notre orbite de transfert.
   Il vient donc :

   $$T_H = \sqrt{a_H^3} = 67.023\ annees\ terrestres$$

   Le temps de transfert correspond au temps de parcours de la demi-ellipse, d'où :

   $$T_{transfert} = \frac{T_H}{2} = 33.512\ annees\ terrestres$$

3. Pour réduire notre durée de voyage, on peut utiliser une orbite de transfert de type coniques juxtaposées, alternant des arcs d'ellipses heliocentriques et des fly-by (ou assistance gravitationnelle) autour des planètes que l'on croisera sur notre chemin.

Exercice n°3 : Space Baseball

1) Vous lancez une balle horizontalement à 36km/h soit 10m/s. Elle se place en orbite circulaire !
   Calculez la masse M de l'astéroïde
   On utilise la valeur de la vitesse sur une orbite circulaire issue de l'équation de l'énergie à l'altitude $h = 0m$, soit pour un rayon $R = 20km$:

   $$V^2 = \frac{\mu}{R} = \frac{GM}{R}$$

D'où la masse de l'astéroïde :

$$M = \frac{V^2.R}{G} = 2.996\ 568\ 928\ 576\ 7800 \times 10^{16}\ kg \approx 30\ 000\ \textit{milliards de tonnes}$$

On peut également calculer le paramètre gravitationnel μ :

$$\mu = \frac{V^2}{R} = 2 \times 10^6\ m^3.s^{-2} = 2 \times 10^{-3}\ km^3.s^{-2}$$

Données :

- Vitesse du lancer : $V = 36\ km.h^{-1} = 10\ m.s^{-1}$
- Rayon de l'astéroïde : $R = 20\ km = 20000\ m$
- Constante de gravitation universelle : $G = 6.6743 \times 10^{-11}\ m^3.kg^{-1}.s^{-2}$

2) Calculez la période T de l'orbite.
On utilise la 3^{eme} loi de Kepler pour calculer la période de l'orbite :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{\mu}}$$

Soit :

$$T = 4\pi \times 10^3\ s = 12\ 566.371\ s = 3h\ 29m\ 26.471\ s$$

3) La balle est maintenant lancée à $V = 50\ km/h = 13.889\ m/s$.

- Calculez le demi-grand axe a et l'excentricité e de l'orbite.

  Equation de l'énergie au moment du lancer à la distance $r = R$:

$$\frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{R} = -\frac{\mu}{2a} \ \Rightarrow\ a = \left(\frac{2}{R} - \frac{V^2}{\mu}\right)^{-1} \tag{1}$$

  L'excentricité se détermine en notant que le lancer s'effectue au périastre r_p de l'orbite :

$$r_p = R = a(1-e) \ \Rightarrow\ e = 1 - \frac{r_p}{a} \tag{2}$$

  A.N. :

$$a = 281\ 739.130\ m = 281.739\ km$$
$$e = 0.929\ 012$$

- Sur quel type de trajectoire est la balle ?
  Sur une trajectoire elliptique puisque $e < 1$
- Comment s'appelle le point le plus éloigné de l'astéroïde sur cette trajectoire ?
  L'apoastre. Le point le plus proche étant le périastre.
  Attention les mots périgée et apogée ne s'utilisent que pour des orbites autour de la Terre.
- Calculez la période T, le rayon r_a, l'altitude h_a et la vitesse V_a du point de la trajectoire le plus éloigné de l'astéroïde.
  La période se calcule avec la 3^{eme} loi de Kepler :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$

  Le rayon de l'apoastre r_a se calcule via :

$$r_a = a(1+e)\ ou\ r_a = 2a - r_p = 2a - R$$

Pour l'altitude h_a, on retranche simplement le rayon R de l'astéroïde :

$$h_a = r_a - R$$

La vitesse à l'apoastre peut se calculer avec l'équation de l'énergie ou plus simplement en utilisant la conservation du moment cinétique entre l'apoastre et le périastre.
Sachant que la vitesse au périgée V_p correspond à la vitesse du lancer :

$$r_a V_a = r_p V_p \;\Rightarrow\; V_a = \frac{r_p}{r_a} V_p$$

A.N. :

$$\begin{aligned} T &= 664\ 409.2\ s = 7.690\ d \\ r_a &= 543\ 478.261\ m = 543.478\ km \\ h_a &= 523\ 478.261\ m = 523.478\ km \\ V_a &= 0.511\ m/s = 1.840\ km/h \end{aligned}$$

4) La balle est maintenant lancée à la vitesse $V = 51\ km/h = 14.167\ m/s$

- Calculez le demi-grand axe a et l'excentricité e de l'orbite.
  On réutilise les équations (1) et (2)
  A.N. :

$$\begin{aligned} a &= -2\ 880\ 000.000\ m = -2\ 880\ km \\ e &= 1.006\ 944 \end{aligned}$$

- Qu'est devenue la trajectoire ?
  Une hyperbole, puisque $a < 0$ et $e > 1$ (c'est presque une parabole car $e \approx 1$)
- Calculez la vitesse de libération V_{lib_0} à l'altitude h = 0m.
  La vitesse de libération correspond à la vitesse minimale nécessaire pour quitter l'attraction de l'astre. Donc la vitesse pour que la trajectoire soit une parabole, ou encore la vitesse pour laquelle l'énergie mécanique est nulle.
  Donc la vitesse V_{lib_0}pour laquelle :

$$\frac{V_{lib_0}^2}{2} - \frac{\mu}{R} = 0 \;\Rightarrow\; V_{lib_0} = \sqrt{\frac{2\mu}{R}}$$

A.N. :

$$V_{lib_0} = 14.142\ m/s = 50.912\ km/h$$

On retrouve bien le fait que la trajectoire du 3) est une ellipse ($V < V_{lib_0}$) et que celle du 4) est une hyperbole ($V > V_{lib_0}$).

Exercice n°4 : Sauvetage

Votre ami est sur une orbite circulaire à une altitude $H_c = 10\ km$ au-dessus de l'astéroïde.

1) Calculez la période orbitale T_c et la vitesse orbitale V_c de votre ami sur son orbite circulaire.
   On réutilise les équations des questions 3.1 et 3.2 :

$$\begin{aligned} T_c &= 2\pi \sqrt{\frac{(R + H_c)^3}{\mu}} = 23\ 085.897\ s = 6h\ 24m\ 45.897s \\ V_c &= \sqrt{\frac{\mu}{R + H_c}} = 8.164\ 966 m/s = 29.394\ km/h \end{aligned}$$

2) Faites un schéma de la stratégie de sauvetage sur lequel apparaîtront :

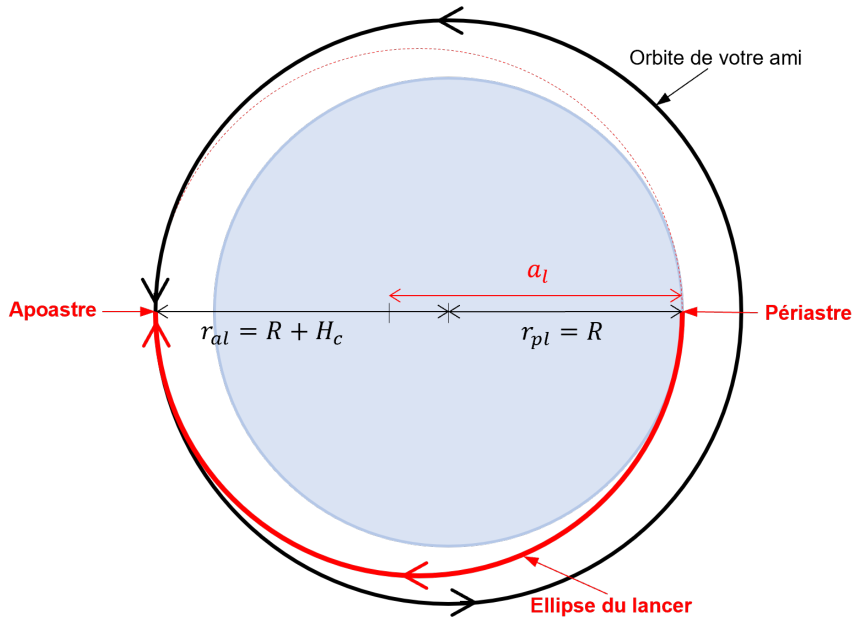

FIGURE 1 – Géométrie de l'ellipse du lancer

- L'astéroïde et son rayon,
- L'orbite de votre ami, son rayon et son sens de parcours,
- L'ellipse de votre lancer, son apoastre, son périastre et son sens de parcours.

Voir la figure 1.

3) Calculez le demi-grand axe a_l, la période T_l et l'excentricité e_l de l'ellipse de votre lancer.
Le périastre r_{pl} de l'ellipse du lancer est là où vous vous trouvez donc $r_{pl} = R = 20\ km$.
L'apoastre r_{al} de l'ellipse du lancer est à l'altitude de votre ami soit $r_{al} = R + H_c = 30\ km$.
Le demi-grand axe vaut alors :
$$a_l = \frac{r_{pl} + r_{al}}{2} = 25\ km$$
La période de l'ellipse du lancer vaut :
$$T_l = 2\pi\sqrt{\frac{a_l^3}{\mu}} = 17\ 562.037\ s$$
L'excentricité s'obtient en écrivant :
$$r_{pl} = R = a_l(1 - e_l) \ \Rightarrow\ e_l = 1 - \frac{R}{a_l} = 0.2$$

4) Votre ami passe au-dessus de votre tête à la date $t_0 = 0s$, à quelle date t devez-vous lancer la balle pour qu'il puisse l'attraper ?
Votre ami va mettre une demi-orbite pour rejoindre l'apoastre de l'ellipse de lancer qui va être son point de rencontre avec la balle.
Cela va lui prendre $T_c/2$ secondes.
Votre balle quant à elle va mettre $T_l/2$ secondes pour rejoindre l'apoastre et donc le point de rencontre avec votre ami.
D'où la date de votre lancer t :
$$t = \frac{T_c - T_l}{2} = 2\ 761.930\ s = 46m\ 1.930s$$

5) A quelle vitesse V_p devez-vous lancer la balle pour la placer sur la bonne trajectoire ?
Pour calculer la vitesse du lancer au périgée V_p, on utilise encore une fois l'équation de l'énergie au périgée ($r_{pl} = R$) :

$$\frac{V_p^2}{2} - \frac{\mu}{R} = -\frac{\mu}{2a_l}$$

D'où :

$$V_p = \sqrt{\mu(\frac{2}{R} - \frac{1}{a_l})}$$

En notant que $R = r_{pl} = a_l(1 - e_l)$ on peut aussi écrire :

$$V_p = \sqrt{\frac{\mu}{a_l}}\sqrt{\frac{1+e_l}{1-e_l}}$$

A.N. :

$$V_p = 10.954\ 451\ m/s = 39.436\ km/h$$

6) Quelle sera la vitesse V_a de la balle à l'apoastre de l'ellipse du lancer ?
On utilise l'équation de l'énergie à l'apogée ($r_{al} = R + H_c$) :

$$V_a = \sqrt{\mu(\frac{2}{r_{al}} - \frac{1}{a_l})}$$

On le fait que $r_{al} = a_l(1 + e_l)$:

$$V_a = \sqrt{\frac{\mu}{a_l}}\sqrt{\frac{1-e_l}{1+e_l}}$$

Ou enfin la conservation du moment cinétique :

$$r_{al}V_a = r_{pl}V_p \ \Rightarrow\ V_a = \frac{r_{pl}}{r_{al}}V_p$$

A.N. :

$$V_a = 7.302\ 967\ m/s = 26.291\ km/h$$

Au passage la vitesse relative de la balle par rapport à votre ami au moment du contact sera $V_c + V_a = 55.7\ km/h$.
Je vous laisse imaginer attraper un projectile de 10 kg à cette vitesse... Cette stratégie de sauvetage n'est peut-être pas la plus safe qui soit.

7) Faites apparaître les vitesses V_c (cf. question 1), V_a et V_p sur le schéma de la question 2.
Voir la figure 2.

Exercice n°5 : Sauvetage → conséquences

1) Sachant que la masse de votre ami est $M_a = 70kg$ et que la masse de la balle est $M_b = 10kg$, calculez la nouvelle vitesse V_{a2} de votre ami une fois la balle attrapée.
Quantité de mouvement avant réception :

$$\vec{P_{avant}} = M_a.\vec{V_c} + M_b.\vec{V_{al}}$$

Algébriquement :

$$P_{avant} = M_a.V_c - M_b.V_{al}$$

Quantité de mouvement après réception :

$$\vec{P_{apres}} = (M_a + M_b).\vec{V_{a2}}$$

Algébriquement :

$$P_{apres} = (M_a + M_b).V_{a2}$$

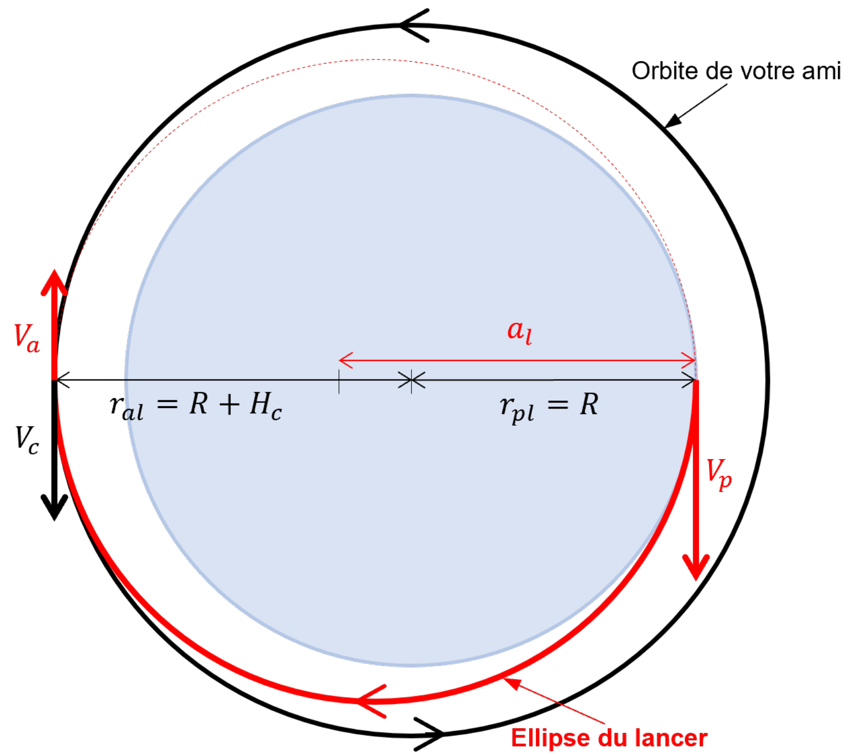

FIGURE 2 – Vitesses de votre ami et de l'ellipse du lancer

On applique la conservation de la quantité de mouvement :

$$P_{avant} = P_{apres} \;\Rightarrow\; V_{a2} = \frac{M_a.V_c - M_b.V_{a_l}}{M_a + M_b}$$

A.N :

- Masse de votre ami : $M_a = 80\ kg$
- Masse de la balle : $M_b = 10\ kg$
- Vitesse de votre ami avant réception (orbite circulaire) : $V_c = 8.165\ m/s$
- Vitesse de la balle à l'apoastre du lancer : $V_{al} = 7.303\ m/s$

D'où :

$$V_{a2} = 6.231\ 474\ m/s = 22.433\ km/h$$

2) On calcule l'incrément de vitesse ΔV de notre ami :

$$\Delta V = V_{a2} - V_c = 6.231474 - 8.164966 = -1.933\ 492\ m/s$$

3) Calculez le demi-grand axe a_2 et le rayon du périastre r_{p2} de sa nouvelle trajectoire.
Votre ami va-t-il pouvoir atteindre le sol après seulement un lancer ?
Notre ami est sur une nouvelle trajectoire dont l'apoastre est toujours $r_{al} = R + H_c = 30\ km$ mais dont la vitesse à l'apoastre est désormais V_{a2}.
En utilisant une nouvelle fois l'équation de conservation de l'énergie mécanique sur cette nouvelle trajectoire, on trouve :

$$a_2 = \left(\frac{2}{R + H_c} - \frac{V_{a_2}^2}{\mu}\right)^{-1}$$

Le rayon du périastre de la nouvelle trajectoire r_{p2} s'obtient en utilisant :

$$a_2 = \frac{r_{al} + r_{p2}}{2} \;\Rightarrow\; r_{p2} = 2a_2 - r_{al}$$

A.N :

$$a_2 = 21\ 163.559\ m$$
$$r_{p2} = 12\ 327.118\ m = 12.327\ km < R = 20\ km$$

Le rayon du périastre de la nouvelle trajectoire est inférieure au rayon de l'astéroïde.
La nouvelle trajectoire va donc bien intercepter l'astéroïde et votre ami va pouvoir atteindre le sol après ce premier lancer.

4) Calculez sa vitesse V_i à l'impact sur le sol.
L'impact a lieu sur la nouvelle trajectoire pour $r = R$.
On utilise encore une fois l'équation de l'énergie pour trouver :

$$V_i = \sqrt{\mu(\frac{2}{R} - \frac{1}{a_2})} = 10.271\ m/s = 36.976\ km/h$$

5) Pensez-vous qu'il va s'en sortir indemne ?
Pour vous aider à répondre à cette question, calculez la hauteur de chute équivalente sur Terre pour avoir la même vitesse V_i au sol.
On prendra pour cela l'accélération de la gravité terrestre constante et égale à $g_0 = 9.81 m.s^{-2}$ et on négligera le frottement de l'atmopshere terrestre.
Pour une chute libre sur Terre d'une hauteur h_0, en supposant une vitesse initiale nulle ($v_0 = 0$), on a :

$$a = -g_0$$
$$v = -g_0.t + v_0\ et\ v_0 = 0 \Rightarrow t = \frac{v}{g_0}$$
$$h = h_0 - \frac{1}{2}g_0.t^2 = h_0 - \frac{v^2}{2g_0}$$

A l'impact au sol pour $h = 0$, on a donc une hauteur de chute h_0 et une vitesse d'impact V_i telles que :

$$h_0 = \frac{V_i^2}{2g_0}$$

En réutilisant la vitesse V_i trouvée précédemment, on trouve une hauteur de chute équivalente sur Terre de 5.377 m.
Votre ami risque donc de ne pas s'en sortir indemne...

Exercice n°5bis : Sauvetage → crash !

1) A quelle distance de vous sur l'astéroïde va-t-il atterrir ?
La figure 3 présente la géométrie du problème et la trajectoire d'impact.
On calcule tout d'abord l'excentricité de la trajectoire d'impact, en notant que l'apogée de cette trajectoire est toujours r_{al} :

$$r_{al} = a_2(1 + e_2)\ \Rightarrow\ e_2 = \frac{r_{al}}{a_2} - 1 = 0.417\ 531$$

Puis on utilise l'équation polaire de l'ellipse, paramétrée par l'anomalie vraie ν :

$$r = \frac{a_2(1 - e_2^2)}{1 + e_2 \cos \nu}$$

D'où l'anomalie vraie à l'impact ν_i pour $r = R$:

$$|\nu_i| = \arccos\left(\frac{1}{e_2}\left(\frac{a_2}{R}(1 - e_2^2) - 1\right)\right)$$

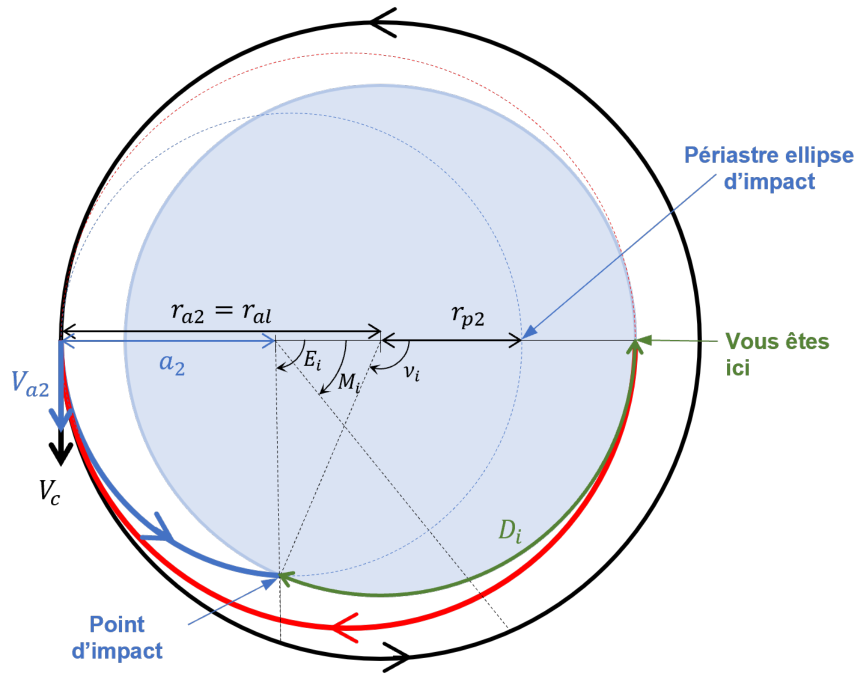

FIGURE 3 – Géométrie de la trajectoire d'impact

Comme votre ami parcourt l'ellipse d'impact de l'apogée au périgée, son anomalie vraie d'impact sera négative (ou entre π et 2π selon comment on décide de compter les angles).
D'où :

$$\nu_i = -1.878\ 093\ rad = -107.607\ deg$$

La distance D_i du point d'impact au périgée de l'ellipse du lancer où vous vous trouvez est alors :

$$D_i = R.|\nu_i| = 37\ 561.879m = 37.562\ km$$

Votre ami va donc se crasher à un peu plus de 37 km de vous, soit un peu moins que la distance d'un marathon (à peu près 42 km).

2) Si l'on suppose qu'il a réceptionné la balle à t0=0s, à quelle date t va-t-il atteindre le sol ?
Ici l'idée est de calculer l'anomalie moyenne de l'impact M_i pour pouvoir calculer la durée écoulée Δt_i entre l'apogée de la trajectoire et le point d'impact.
En effet, sachant qu'à l'apogée l'anomalie moyenne vaut $M_a = \pi$, on trouve la durée Δt_i via la formule :

$$\Delta t_i = \frac{M_i - \pi}{n_2} \tag{3}$$

Avec n_2 le moyen mouvement de l'ellipse d'impact qui vaut :

$$n_2 = \sqrt{\frac{\mu}{a_2^3}}$$

Pour calcule M_i on calcule d'abord l'anomalie excentrique à l'impact E_i.
Pour cela on utilise la relation entre l'anomalie vraie et l'anomalie excentrique :

$$\tan\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\nu}{2}$$

D'où :

$$E_i = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-e_2}{1+e_2}}\tan\frac{\nu_i}{2}\right)$$

Et :

$$E_i = -1.438\ 735\ rad = -82.433\ deg$$

Puis on utilise l'équation de Kepler pour trouver l'anomalie moyenne d'impact M_i :

$$M_i = E_i - e_2 \sin E_i$$

Soit :

$$M_i = -1.024\ 840\ rad = -58.719\ deg$$

Pour pouvoir utiliser (3) en l'état on doit remettre M_i dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ D'où :

$$M_i = 2\pi + M_i = 5.258\ 345\ rad = 301.281\ deg$$

Et :

$$\Delta M_i = M_i - \pi = 2.116\ 752\ rad = 121.281\ deg$$

On calcule enfin :

$$n_2 = \sqrt{\frac{\mu}{a_2^3}} = 4.593\ 375 \times 10^{-4}\ rad/s$$

$$\Delta t_i = \frac{\Delta M_i}{n_2} = 4608.272\ s = 1h\ 16m\ 48.272s$$

Votre ami va donc atteindre la surface de l'astéroïde un peu plus d'une heure et quart après avoir attrapé la balle.

3) En supposant que vous partiez en courant juste après avoir lancé la balle, pensez-vous être capable d'amener un matelas à votre ami au point d'impact pour amortir sa chute ?
Le temps dont vous disposez est la somme du temps de parcours de la demi-ellipse du lancer ($\frac{T_l}{2}$) et du temps de descente de votre ami Δt_i.

$$T_{dispo} = \frac{T_l}{2} + \Delta t_i = 13\ 389.291\ s = 3h\ 43m\ 9.291\ s$$

Pendant ce temps vous devez parcourir la distance $D_i = 37.562\ km$.
Vous devez donc courir à la vitesse moyenne :

$$V = \frac{D_i}{T_{dispo}} = 10.099\ km/h$$

Courir 3h45 à 10 km/h sur Terre est faisable si vous êtes très entraîné.
Il faut prendre en considération néanmoins que vous portez une combinaison spatiale et un matelas sur le dos. D'un autre côté la gravité est très faible, ce qui peut vous aider.

4) A quelle vitesse votre ami doit-il lancer sa balle juste avant l'impact pour que sa vitesse d'impact soit équivalente à une chute de 3m de haut sur Terre ?
On note V_i la vitesse d'impact calculée au (5.4) et V_{i2} la vitesse d'impact après avoir tenté de se freiner en lançant la balle.
On veut que V_{i2} corresponde à une chute de h = 3m sur Terre.
On reprend donc le raisonnement du (5.5) :

$$h = \frac{V_{i2}^2}{2g_0} \ \Rightarrow\ V_{i2} = \sqrt{2g_0.h}$$

Puis on utilise la conservation de la quantité de mouvement comme au (5.1).
Quantité de mouvement du système balle + ami juste avant l'impact :

$$P_{avant} = (M_a + M_b)V_i$$

Quantité de mouvement après le lancer, en supposant que votre ami lance la balle de face avec une vitesse ΔV_b :

$$P_{apres} = M_a.V_{i2} + M_b(V_i + \Delta V_b)$$

Conservation de la quantité de mouvement :

$$P_{avant} = P_{apres} \;\Rightarrow\; \Delta V_b = \frac{M_a}{M_b}(V_i - \sqrt{2g_0.h})$$

D'où :

$$\Delta V_b = 18.194\ m/s = 65.5\ km/h$$

Il risque de ne pas y arriver car lancer une balle de 10kg à cette vitesse est humainement compliqué.
Ce raisonnement s'applique d'ailleurs à tous les lancers de balle effectués jusqu'ici. Même si la gravité est très faible, c'est ici l'energie cinétique ($\frac{1}{2}M_b\Delta V_b^2$) à fournir à la balle qui compte et elle ne varie pas que l'on soit sur Terre ou sur l'astéroïde.