# CALCUL

| Programmes cycle 2 | |
|---|---|
| **Connaissances** | **Capacités** |
| **Calcul mental**<br>- Connaître ou reconstruire très rapidement les résultats des tables d'addition de 1 à 9 ;<br>- Connaître et savoir utiliser les tables de multiplication par 2 et 5. Savoir multiplier par 10. | - Utiliser les tables d'addition pour calculer une somme, une différence, un complément, ou décomposer un nombre sous forme ;<br>- Trouver rapidement le complément d'un nombre à la dizaine immédiatement supérieure ;<br>- Résoudre mentalement des problèmes à données numériques simples. |
| **Calcul en ligne ou posé** | - Calculer des sommes en ligne ou par addition posée en colonne ;<br>- Calculer des différences en ligne ou *par soustraction posée en colonne ;*<br>- Calculer, en posant une multiplication, des produits par 2 ou par 5 ;<br>- Organiser et traiter des calculs additifs, soustractifs et multiplicatifs sur les nombres entiers. |
| **Calcul instrumenté** | - Utiliser à bon escient une calculatrice (en particulier pour vérifier un calcul mené à la main, ou pour effectuer des calculs lourds ou longs nécessités par une résolution de problème). |

| Programmes cycle 3 | |
|---|---|
| **Connaissances** | **Capacités** |
| **Calcul mental : résultats mémorisés, procédures automatisées, calcul réfléchi**<br>- Connaître les tables d'addition (1 à 9) et de multiplication (2 à 9) ;<br>- Connaître le complément à la dizaine supérieure pour tout nombre inférieur à 100 ou le complément à entier immédiatement supérieur pour tout décimal ayant un chiffre après la virgule. | - Additionner ou soustraire mentalement des dizaines entières (nombres inférieurs à 100) ou des centaines entières (nombres inférieurs à 1000) ;<br>- Multiplier ou diviser un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1000 ;<br>- Organiser et effectuer des calculs du type 1,5 + 0,5 ; 2,8 + 0,2 ; 1,5 x 2 ; 0,5 x 3, en s'appuyant sur les résultats mémorisés et en utilisant de façon implicite les propriétés des nombres et des opérations ;<br>- évaluer un ordre de grandeur d'un résultat, en utilisant un calcul approché, évaluer le nombre de chiffre d'un quotient entier ;<br>- Trouver mentalement le résultat numérique d'un problème à données simples ;<br>- Développer des moyens de contrôle des calculs instrumentés : chiffre des unités, nombre de chiffres (en particulier pour un quotient), calcul approché… |
| **Calcul posé**<br>- Connaître une technique opératoire pour l'addition, la soustraction, la multiplication, la division euclidienne. | - Calculer des sommes et des différences de nombres entiers ou décimaux, par un calcul écrit en ligne ou posé en colonnes ;<br>- Calculer le produit de deux entiers ou le produit d'un décimal par un entier (3 chiffres par 2 chiffres), par un calcul posé ;<br>- Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne d'un nombre entier (d'au plus 4 chiffres) par un nombre entier (d'au plus 2 chiffres), par un calcul posé ;<br>*- Calculer le quotient décimal exact d'un nombre entier par 2, 4 ou 5.* |
| **Calcul instrumenté**<br>- Connaître et utiliser certaines fonctionnalités de sa calculatrice pour gérer une suite de calculs : touches « opérations », touches « parenthèses ».<br>*- Connaître et utiliser les fonctionnalités : touches « mémoires » et « facteur constant » de sa calculatrice.* | - Utiliser ) bon escient une calculatrice en particulier pour vérifier un calcul mené à la main ou pour effectuer des calculs lourds ou longs nécessités par des résolutions de problème. |

## <u>Dénombrement des éléments d'une collection :</u>

- Dénombrement : activité qui consiste à trouver le nombre des éléments d'une collection.
- Cas particuliers de dénombrement :

- Dénombrement par comptage : activité qui consiste à trouver le nombre des éléments d'une

collection en utilisant un numérotage (on établit une correspondance entre une partie de la suite des mots-nombres, donc une partie de la comptine numérique, et les éléments de la collection) et en accordant une importance particulière au dernier mot-nombre prononcé.
- Dénombrement en utilisant des « collections-témoins organisées » (configurations spatiales de points appelées constellations ou configurations digitales ou ...).
- Dénombrement par reconnaissance instantanée pour les petites collections.

**Calcul automatisé :**
• Utilisation, dans une situation donnée, d'un algorithme unique, ne dépendant pas des nombres en jeu, pour trouver un résultat.
Exemple : algorithme de la multiplication posée.
• Le calcul automatisé est utilisé en général à l'écrit mais on peut envisager d'apprendre certaines règles de calcul automatisé utilisables mentalement (exemple : utilisation pour calculer mentalement le produit d'un nombre par 25 de la règle : "pour multiplier par 25, on multiplie par 100 et on divise par 4").

**Calcul et comptage :**
• Dans des situations d'ajout, de retrait, de partage, de regroupement, ... on peut prévoir le résultat en utilisant des procédures de comptage (on dispose d'objets ou on imagine mentalement des objets que l'on peut dénombrer) ou des procédures de calcul (on utilise uniquement des écritures chiffrées).
• Pour pouvoir faire un calcul, il faut avoir mémorisé certains résultats (exemple : "5 plus 7 est égal à douze") et avoir mémorisé certaines techniques de calcul (exemple : algorithme de l'addition posée).
• On peut distinguer différentes techniques de comptage.
Exemples : pour trouver à quoi est égal 4 + 6, je peux construire une collection de quatre "objets" (doigts par exemple) puis une collection de six "objets" puis réunir les deux collections et dénombrer le tout (technique de "recomptage du tout") ; je peux aussi "garder le nombre quatre en tête" et construire simplement une collection de six objets en disant "cinq, six, sept, huit, neuf, dix" (technique de surcomptage).

**Calcul instrumenté :**
• Utilisation d'une calculatrice ou d'un tableur pour effectuer un calcul.

**Calcul réfléchi :**
• Utilisation, dans une situation donnée, d'une procédure qui dépend des nombres en jeu ... et de la personne qui fait les calculs. On calcule en s'adaptant aux nombres en jeu :
12 x 25 = 3 × 4 x 25 = 3 × 100 = 300
14 x 25 = 7 x 2 x 25 = 7 × 50 = 350]
• On peut effectuer un calcul réfléchi mentalement (le calcul mental fait souvent appel au calcul réfléchi) mais aussi par écrit.

## Addition – Soustraction

**Propriétés :**

• **Associativité** *:* Regrouper des termes.
a + (b + c) = (a + b) + c
*Ex :* 19 + 34 + 6 = 19 +50 = 69

• **Commutativité :** Permuter des termes.
a + b = b + a
*Ex :* 34 + 19 + 6 = 34 + 6 + 19 = 50 + 19 = 69

• On ne change pas une différence en ajoutant ou retranchant un même nombre aux deux termes de celle-ci :
a – b = (a + c) – (b + c)
*Ex :* 54 – 39 = (54 + 1) – (39 + 1) = 55 – 40 = 15
a – b = ((a – c) – (b – c)
41 – 26 = 40 – 25 = 15

• Pour soustraire une somme on soustrait les deux termes de la somme :
a – (b + c) = a – b – c
*Ex* : 154 -44 = 154 – (40 + 4) = 154 – 4 – 40 = 150 – 40 = 110

• Pour soustraire une différence, on retranche le premier terme et on ajoute le second :
a – (b – c) = a – b + c
*Ex* : 57 – 19 = 57 – (20 – 1) = 57 – 20 + 1 = 58 – 20 = 38

• On ne change pas une somme si l'on ajoute un nombre au premier terme et si on soustrait ce même nombre au second :
a + b = (a + c) + (b – c)
*Ex :* 39 + 41 = (39 + 1) + (41 – 1) = 40 +40 = 80

**Technique de l'addition posée et connaissances utilisées :**

• Tables d'addition jusqu'à 20.
• Propriétés de la numération décimale : groupement échange par 10 pour la retenue. Repérer chaque chiffre suivant sa position.
• Commutativité.
• Associativité.

**Techniques de la soustraction posée  et connaissances utilisées :**

• **Par emprunt :** On emprunte les dizaines, centaines, milliers… au « nombre du haut ».
- Repérage des chiffres de chaque nombre
- Numération de position et groupements réguliers par 10.
- Connaissance des différences entre nombres inférieurs à 20 et nombre inférieurs à 10.

• **Technique traditionnelle :** On ajoute les retenues en haut et en bas.
- Repérage des chiffres de chaque nombre.
- Numération de position et groupements réguliers par 10.
- L'écart ne change pas en ajoutant un même nombre à deux grandeurs.
- Connaissance des différences entre nombres inférieurs à 20 et nombre inférieurs à 10.

• **Technique par complément :** Équivaut à une addition à trou.

- Équivalence a – b = x et b + x = a
- Connaissance des compléments des nombres inférieurs à 10 à ceux inférieurs à 20.
- Technique addition posée.
-

**Calcul des durées :** On peut utiliser la technique par complément ou par emprunt en faisant toujours attention de respecter le système sexagésimal : 60s, 60 mn, 24h.

**Classification des problèmes (Vergnaud) :**

• *Composition de deux états* :

- Recherche du composé (procédure experte au C2) : Dans un bouquet, il y a 9 roses et 7 iris/ Combien y a-t-il de fleurs.

- Recherche d'une partie (procédure perso) : Dans un bouquet de 15 fleurs composé de roses et d'iris, il y a 8 roses. Combien y a-t-il d'iris ?.

• *Transformation d'un état :*

- Recherche de l'état final (procédure experte) : Jean avait 17 billes. Il en a gagné 5 . Combien en a -t-il maintenant ?

- Recherche de l'état initial (P. perso) : Jean a gagné 5 billes. Il en a maintenant 22. Combien en avait-il au début ?

- Recherche de la transformation (perso) : Jean avait 17 billes au début et 22 à la fin. Combien en a-t-il gagné ?

• *Comparaison d'états* (perso) :

- Recherche de l'un des états : Jean a 25 voitures. Il en a 5 de plus que Tim. Combien Tim a-t-il de voitures ?

- Recherche de la comparaison : Jean a 25 voitures. Tim en a 30. Combien de voitures de plus a Tim ?

• *Composition de transformations* (perso)*:*

- Recherche de la transformation composée : Jean a joué deux parties. A la première il gagne 7 billes et à la deuxième il en perd 12 ? Combien a-t-il de billes ?

- Recherche de l'une des composantes : Au jeu de l'oie, Zoé joue deux coups. Au deuxième coup, elle avance de 9 cases. AU total, elle s'aperçoit qu'elle a reculé de 4 cases. Que s'était-il passé au premier coup ?

## Multiplication

**Associativité :** On peut changer l'ordre dans lequel on effectue les multiplications :
$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ *Ex :* 50 x 212 = 50 x (2 x 106) = (50 x 2) x 106 = 10600

**Commutativité :** On peut changer l'ordre des termes (ou facteurs) ;
$a \times b = b \times a$ *Ex :* 50 x 106 x 2 = 50 x 2 x 106 = 100 x 106 = 10600

**Distributivité sur l'addition ou la soustraction :** Pour multiplier une somme ou une différence par un nombre, on peut aussi multiplier chacun des termes de la somme ou de la différence par ce nombre : a x (b + c) = (a x b) + (a x c)
*Ex :* 10 x (1,5 + 2,8) = 10 x 1,5 + 10 x 2,8 =15 + 28 = 43
7,5 x 8,2 + 7,5 x 1,8 = 7,5 x (8,2 + 1,8) = 7,5 x 10 = 75

**Connaissances sous jacentes liées à la multiplication posée :**
• Addition posée avec retenue.
• Tables de multiplications jusqu'à 9.
• Numération : Valeur d'un chiffre suivant sa position. Groupement/échange par 10 (retenue). Règle des zéros pour multiplier par 10, 100, 1000…
• Décomposition additive.
• Distributivité.
• Associativité.

## Division Euclidienne

**Définition**

Étant donnés deux entiers D et d, il existe un unique couple d'entiers (q,r) tels que D = dxq + r et **r< d**. D, d, q et r s'appelle respectivement le dividende, le diviseur, le quotient et le reste.

**D = d** x **q + r** et **r < d**

*Ex :* • 200 = 48 x 4 + 8 est une division Euclidienne.
• 200 = 2 x 26 + 148 n'est pas une division Euclidienne.

**Type de problèmes**

*Division partition :* Situation de partage (ou distribution) : on connaît le nombre de « parts » et on cherche la valeur d'une « part ».
*Ex :* On veut partager 45 bonbons entre 6 enfants. Combien chaque enfant aura-t-il de bonbons.

*Division quotition :* Situation de regroupement : on connaît la valeur d'une « part » et on cherche le nombre de parts.
*Ex :* On a 45 bonbons. On veut faire des paquets de 6 bonbons. Combien peut-on faire de paquets ?

**Procédures personnelles (possible dès le cycle 2 !)**

- Procédures figuratives.
- Procédures additives : addition itérées du diviseur jusqu'à dépassement du dividende.
- Procédures  soustractives : soustractions itérées du dividende par le diviseur jusqu'à obtenir un nombre inférieur au diviseur : le reste apparaît naturellement.
- Procédures multiplicatives : utilisation de multiples du diviseur pour encadrer le dividende.
- Procédures mixtes : par exemple additions ou soustractions de multiples du diviseur.

**Procédure experte :**

Division posée : repose sur l'encadrement du dividende par des multiples du diviseur puis des soustractions itérées de multiples particuliers de celui-ci.

**Variables didactiques**

- Taille du dividende : grand dividende rend difficile la résolution par un schéma.
- Taille du quotient : grand quotient décourage les procédures additives ou soustractives puisqu'il détermine le nombre d'opérations nécessaires.
- Diviseur rappelant des multiples connus par les élèves pour favoriser la procédure multiplicative : 2, 3, 5, 10, 25, 50, 100…
- Quotient simple peut conduire à l'utilisation des multiples ou à l'emploi de la règle des zéros.
- Reste nul.
- Contraintes données dans la limitation du nombre d'opérations autorisés pour résoudre le problème, afin de favoriser les procédures mixtes.
- Emploi calculatrice ou de table de multiples pour encourager procédures multiplicatives.

## Algèbre

**<u>Développement- factorisation</u>** :

$k(a + b) = ka + kb$
$k(a - b) = ka - kb$

$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$
$(a + b)(c - d) = ac - ad + bc - bd$
$(a - b)(c - d) = ac + ad - bc + bd$

$$\left.\begin{array}{l}(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\ (a + b)(a - b) = a^2 - b^2\end{array}\right\} \text{ Identités remarquables.}$$

*Ex :* $(2x - 5)(7 - 3x) = 14x - 6x2 - 35 + 15x = -6x2 + 29x - 35$
$(4x - 3)^2 = 16x^2 - 24x + 9$
$(3x - 5)(3x + 5) = 9x^2 - 25$

**<u>Résolution d'un système de deux équations à deux inconnues par substitution</u>**

$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2x + 3y = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 - 3x \\ 2x + 3y = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 - 3x \\ 2x + 3(1 - 3x) = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 - 3x \\ 2x + 3 - 9x = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 - 3x \\ -7x + 3 = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 - 3x \\ -7x = -7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 - 3x \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 - 3 \times 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$