Sciences et Technologies de l'Agronomie et du Vivant
Nouvelle-Calédonie novembre 2015 corrigé

La calculatrice est autorisée.

EXERCICE 1 **6 points**

Pour équiper une de ses serres en système d'arrosage « goutte à goutte », une personne prend des renseignements concernant des goutteurs auprès d'un fournisseur de matériel de jardinage.
Les deux parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.
Les probabilités seront arrondies à 10^{-3} *près si nécessaire.*

Partie n° 1 :

On appelle X la variable aléatoire égale au débit, en litre par heure, d'un goutteur.
On admet que X est distribuée selon la loi normale de moyenne $\mu = 2$ et d'écart type $\sigma = 0,3$.

1. Déterminons la probabilité que le débit en L.h^{-1} d'un goutteur pris au hasard soit compris entre 1,4 et 2,6.

   À l'aide de la calculatrice $p(1{,}4 \leqslant X \leqslant 1{,}6) \approx 0{,}954$.

   remarque : Nous savons que dans le cas d'une distribution normale $p(\overline{x} - 2\sigma \leqslant X \leqslant \overline{x} + 2\sigma) \approx 0{,}95$.

   La probabilité que le débit en L.h^{-1} d'un goutteur pris au hasard soit compris entre 1,4 et 2,6 est d'environ 0,954.

2. Un goutteur est dit défectueux si son débit est inférieur à 1,4 L.h^{-1}.

   Déterminons la probabilité qu'un goutteur pris au hasard soit défectueux, déterminons $p(X < 1{,}4)$.

   À l'aide de la calculatrice, $p(X < 1{,}4) \approx 0{,}023$.

   remarque : À partir de la considération de la symétrie de la courbe nous pouvons écrire que
   $p(X < 1{,}4) = p(X > 2{,}6) = \dfrac{1 - p(1{,}4 \leqslant X \leqslant 2{,}6)}{2} = \dfrac{1 - 0{,}954}{2} = 0{,}023$.

Partie n° 2 :

La personne décide d'acheter 50 goutteurs.
On suppose le stock du fournisseur suffisamment important pour que le choix puisse être assimilé à un tirage successif avec remise.
On admet que la probabilité qu'un goutteur soit défectueux est égale à 0,023.
On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de goutteurs défectueux parmi les 50.

1. La loi de probabilité de Y est binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,023$ puisque il y a répétition de 50 tirages indépendants et identiques caractérisés par deux issues soit le goutteur est défectueux de probabilité $p = 0,023$ soit il n'est pas défectueux de probabilité $q = 1 - p = 0,977$.

   Par conséquent, $p(X = k) = \begin{pmatrix}50\\k\end{pmatrix}(0{,}023)^k(0{,}977)^{50-k}$.

2. Calculons la probabilité qu'aucun goutteur ne soit défectueux.

   $p(Y = 0) = 0{,}977^{50} \approx 0{,}312$.

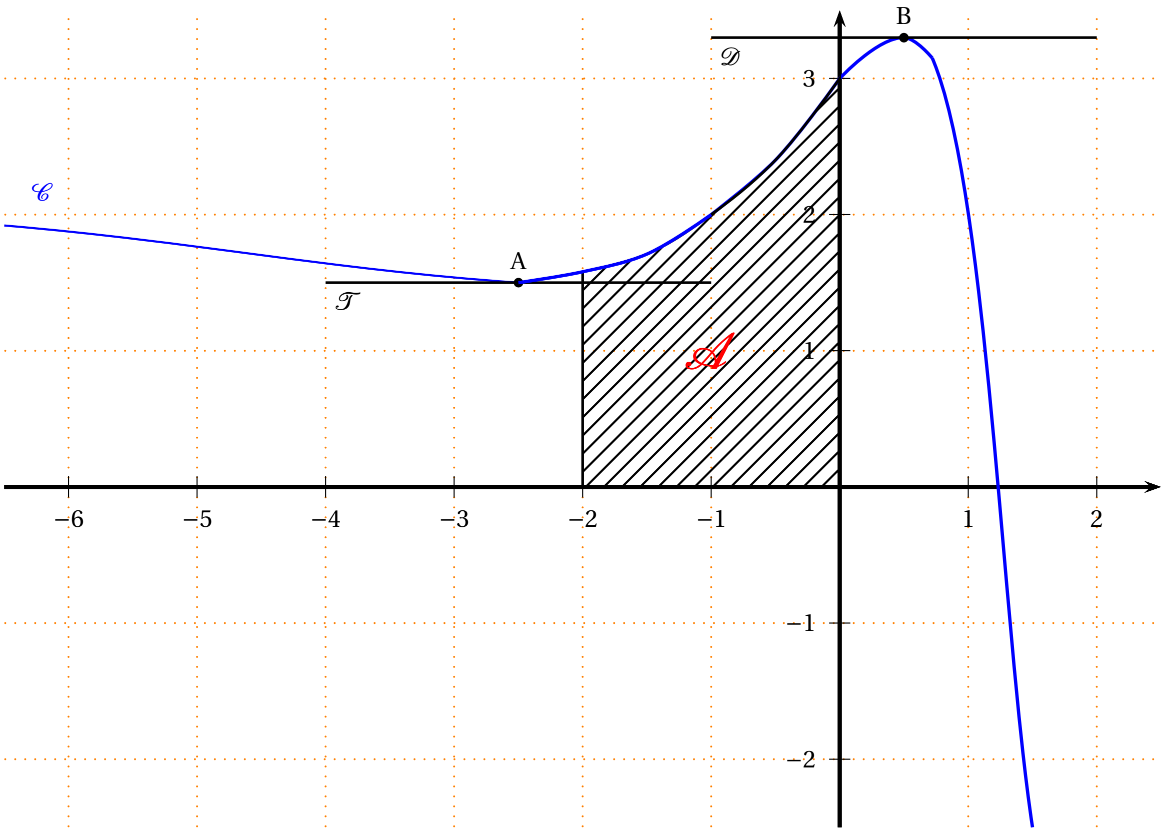
3. Calculons la probabilité qu'au moins 2 goutteurs soient défectueux.

   $p(Y \geqslant 2) = 1 - \big(p(Y = 0) + p(Y = 1)\big) = 1 - 0{,}312 - 0{,}368 = 0{,}320$.

   La probabilité qu'au moins deux goutteurs soient défectueux est d'environ 0,320.

EXERCICE 2 **4 points**

La courbe $(\mathscr{C})$ donnée ci-dessous, est la représentation graphique dans un repère orthogonal d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$;



La droite $\mathscr{T}$ est tangente à ($\mathscr{C}$) au point A. La droite $\mathscr{D}$ est tangente à ($\mathscr{C}$) au point B.
Les droites $\mathscr{T}$ et $\mathscr{D}$ sont parallèles à l'axe des abscisses.
La droite d'équation $y = 2$ est asymptote à ($\mathscr{C}$) en $-\infty$.
Pour chacune des quatre propositions suivantes, indiquer si elle est **vraie** ou **fausse**. Justifier vos réponses.
Une réponse exacte non justifiée ne rapporte pas de point. Une réponse inexacte n'enlève pas de point.

Proposition 1 : L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > 2$ est $[-1\ ;\ 0]$.

La proposition est **fausse** car $f(-1) = 2$ par conséquent -1 ne doit pas faire partie de l'ensemble solution.

Proposition 2 : L'équation $f'(x) = 0$ admet une seule solution sur $\mathbb{R}$.

La proposition est **fausse** car la tangente en A et celle en B sont parallèles à l'axe des abscisses par conséquent aux abscisses de ces points le nombre dérivé est nul.

L'équation « $f'(x) = 0$ » admet au moins deux solutions sur $\mathbb{R}$.

Proposition 3 : $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 3$.

La proposition est **vraie** car f étant positive sur [-2 ; 0], l'intégrale peut s'interpréter comme l'aire du domaine plan délimité par la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -2$ et $x = 0$. Cette aire a plus de trois unités d'aire ou plus de trois carreaux.

Proposition 4 : $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$.

La proposition est **vraie** car, par hypothèse, la droite d'équation $y = 2$ est asymptote à ($\mathscr{C}$) en $-\infty$.

EXERCICE 3 **3 points**

Lors de la première insémination artificielle, on considère que la proportion de vaches fécondées est de 65 %.
Dans une exploitation, sur un échantillon de 120 vaches, 72 ont été fécondées dès la première insémination.
On suppose la population assez grande pour assimiler cet échantillon à un tirage effectué avec remise.

On rappelle que :
Pour une proportion connue p dans une population, l'intervalle de fluctuation asymptotique à 0,95 d'une fréquence obtenue sur un échantillon de taille n est

$$\left[p-1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p+1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right].$$

1. Déterminons l'intervalle de fluctuation asymptotique à 0,95 de la fréquence des vaches fécondées pour un échantillon de taille 120.

$n=120>30,\quad np=120\times0,65=78>5,\quad n(1-p)=120\times0,35=42>5.$

$$\left[0,65-1,96\sqrt{\frac{0,65(1-0,65)}{120}}\ ;\ 0,65+1,96\sqrt{\frac{0,65(1-0,65)}{120}}\right]\approx\left[0,564\ ;\ 0,736\right]$$

Les bornes de l'intervalle sont arrondies à 10^{-3} près.

2. Le résultat de la fréquence observée sur l'échantillon de vaches fécondées n'est pas en contradiction avec la proportion théorique $p=0,65$ annoncée puisque cette fréquence est $\frac{72}{120}$ soit 0,6. Ce nombre appartient à l'intervalle de fluctuation.

EXERCICE 4 **7 points**

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $\left]-\dfrac{3}{2}\ ;\ 3\right]$ par :

$$g(x)=\ln(2x+3)-3x+1.$$

On note $(\mathscr{C}_g)$ la courbe représentative de g dans un repère orthogonal.

1. Calculons la valeur exacte de $g(3)$.

$g(3)=\ln(2\times3+3)-3\times3+1=\ln9-8$ or $9=3^2$ par conséquent $\ln9=2\ln3$.

Nous obtenons bien la valeur donnée $g(3)=2\ln3-8$.

2. Déterminons la limite de g en $-\dfrac{3}{2}$.

$$\lim_{x\to-\frac{3}{2}} g(x)=-\infty.$$

En effet $\displaystyle\lim_{x\to-\frac{3}{2}} 2x+3=0\quad \lim_{X\to0}\ln X=-\infty$. Par conséquent $\displaystyle\lim_{x\to-\frac{3}{2}}\ln 2x+3=-\infty$, d'autre part nous avons $\displaystyle\lim_{x\to-\frac{3}{2}}(-3x+1)=-\frac{-9}{2}+1=\frac{11}{2}$.

La fonction n'étant pas définie en $-\frac{3}{2}$ et la limite étant infinie, alors la droite d'équation $x=-\frac{3}{2}$ est asymptote à la courbe représentative de g.

3. Déterminons la fonction dérivée g' de la fonction g sur $\left]-\dfrac{3}{2}\ ;\ 3\right]$

$$g'(x)=\frac{2}{2x+3}-3=\frac{2-3(2x+3)}{2x+3}=\frac{-6x-7}{2x+3}$$

Par conséquent, pour tout x appartenant $\left]-\dfrac{3}{2}\ ;\ 3\right]$, $g'(x)=\dfrac{-6x-7}{2x+3}$.

4. **a.** Étudions le signe de $g'(x)$.

Sur $\left]-\dfrac{3}{2}~;~3\right]$, $2x+3>0$ par conséquent le signe de $g'(x)$ est celui de $-6x-7$.

Sur $\mathbb{R}$ $-6x-7>0 \iff x<-\dfrac{7}{6}$. Il en résulte :

si $x \in \left]-\dfrac{3}{2}~;~-\dfrac{7}{6}\right[$, $g'(x)>0$,

si $x \in \left]-\dfrac{7}{6}~;~3\right]$, $g'(x)<0$.

b. Dressons le tableau de variations de la fonction g.

Étudions d'abord le sens de variation de g.

Si pour tout $x \in I$, $f'(x)>0$ alors f est strictement croissante sur I.

Sur $\left]-\dfrac{3}{2}~;~-\dfrac{7}{6}\right[$ $g'(x)>0$ par conséquent g est strictement croissante sur cet intervalle.

Si pour tout $x \in I$, $f'(x)<0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

Sur $\left]-\dfrac{7}{6}~;~3\right]$, $g'(x)<0$ par conséquent g est strictement décroissante sur cet intervalle.

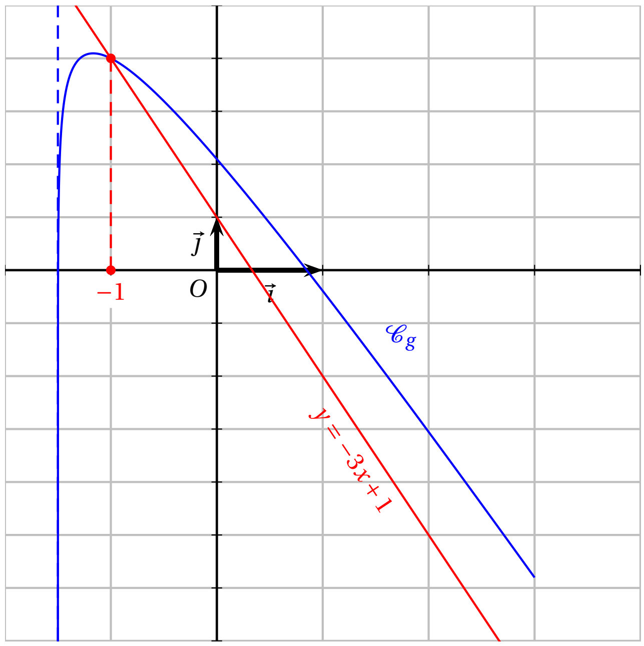
Construisons enfin le tableau de variation de g sur $\left]-\dfrac{3}{2}~;~3\right]$.

x	$-\frac{3}{2}$		$-\frac{7}{6}$		3
g'		$+$	0	$-$	
Variation de g	$-\infty$	$\nearrow$	$\ln 2-\ln 3+\frac{9}{2}$	$\searrow$	$2\ln 3-8$

5. Résolvons l'équation $g(x)=-3x+1$:

$$\begin{aligned}
\ln(2x+3)-3x+1 &= -3x+1\\
\ln(2x+3) &= 0\\
\ln(2x+3) &= \ln 1\\
2x+3 &= 1\\
2x &= -2\\
x &= -1
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{-1\right\}$.



-1
O
$\vec{\imath}$
$\vec{\jmath}$
$\mathscr{C}_g$
$y = -3x + 1$