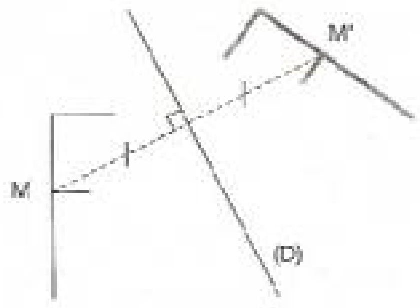
Chap 9 : Les transformations

Apports théoriques

Une transformation du plan est une application du plan dans lui-même.Cela signifie que c'est un procédé qui, à tout point M du plan, associe un point M' et un seul.On dit que M' est l'image de M par la transformation.

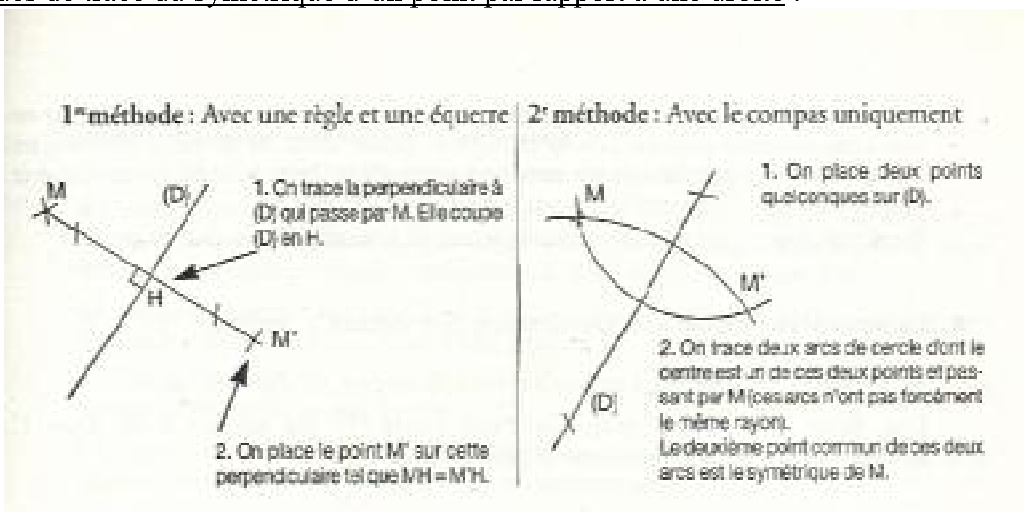
1. La symétrie axiale (ou symétrie orthogonale par rapport à une droite)



Une figure (F') est le symétrique d'une figure (F) par rapport à une droite (D) si lorsqu'on plie la feuille suivant (D), (F) et (F') se superposent.

Le symétrique d'un point M par rapport à une droite (D) est :
- le point M' tel que (D) soit la médiatrice de [MM'], si M n'est pas sur (D).
- le point M lui-même si M est sur (D).

Méthodes de tracé du symétrique d'un point par rapport à une droite :



Propriétés de la symétrie axiale :
- L'image d'une droite par une symétrie axiale est une droite.On dit que la symétrie axiale conserve l'alignement.
  → Si un point est sur une droite, son symétrique est sur le symétrique de cette droite.
  Mais attention, l'image d'une droite par une symétrie axiale n'est pas, en général, une droite parallèle.

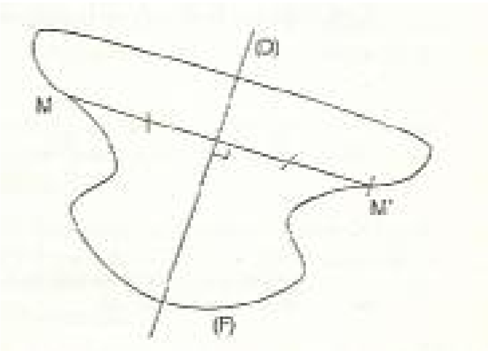
- L'image d'un segment par une symétrie axiale est un segment de même longueur.On dit que la symétrie axiale conserve les longueurs.

- L'image d'un angle par une symétrie axiale est un angle de même mesure.On dit que la symétrie axiale conserve les angles.

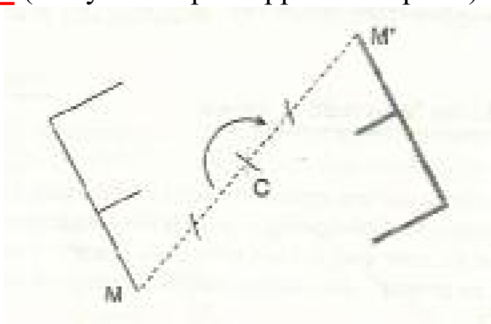
- L'image du milieu d'un segment par une symétrie axiale est le milieu de l'image de ce segment.On dit que la symétrie axiale conserve le milieu.

- Le symétrique d'un cercle est un cercle de même rayon dont le centre est le symétrique du centre.

Axe de symétrie :
Une figure (F) admet un axe de symétrie (D) si le symétrique de tout point de (F) appartient à (F).
Ex :



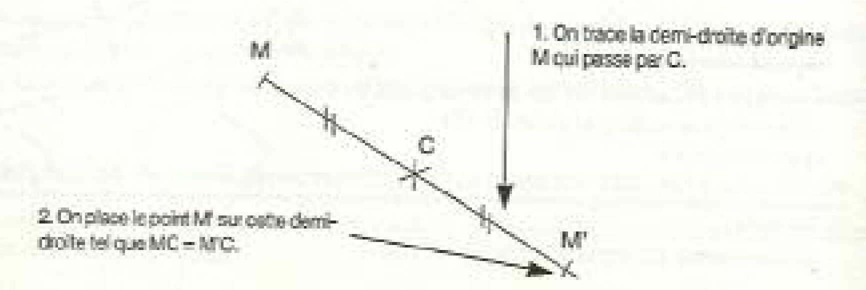
2. La symétrie centrale (ou symétrie par rapport à un point)



Une figure (F') est le symétrique d'une figure (F) par rapport à un point C si on obtient (F') en faisant tourner (F) de 180° autour de C.

Le symétrique d'un point M par rapport à un point C est :
- le point M' tel que C soit le milieu de [MM'], si M est distinct de C.
- le point M lui-même si M et C sont confondus.

Méthode de tracé :



Propriétés de la symétrie centrale :

- L'image d'une droite par une symétrie centrale est une droite.On dit que la symétrie centrale conserve l'alignement.La symétrie centrale transforme une droite en une droite parallèle.

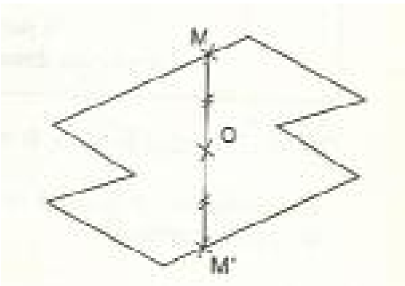
- L'image d'un segment par une symétrie centrale est un segment de même longueur.On dit que la symétrie centrale conserve els longueurs.

- L'image d'un angle par une symétrie centrale est un angle de même mesure.On dit que la symétrie centrale conserve les angles.

- L'image du milieu d'un segment par une symétrie centrale est le milieu de l'image de ce segment.On dit que la symétrie centrale conserve le milieu.

- Le symétrique d'un cercle est un cercle de même rayon dont le centre est el symétrique du centre.

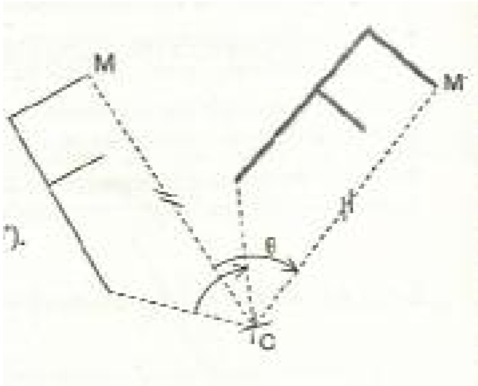
Centres de symétrie :
Une figure (F) admet un centre de symétrie C si le symétrique de tout point de (F) appartient à (F).
Ex :



→ *A noter que si une figure, dont certains côtés sont des segments, admet un centre de symétrie, alors forcément ces segments sont parallèles 2 à 2.*
Donc si un polygone n'a pas des côtés parallèles 2 à 2 il n'a pas de centre de symétrie.

3. La rotation

On parle de sens direct si on tourne dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.
La mesure d'un angle de sens direct est positive, celle d'un angle de sens indirecte est négative.On parle d'un angle de 45° ou de –45°.



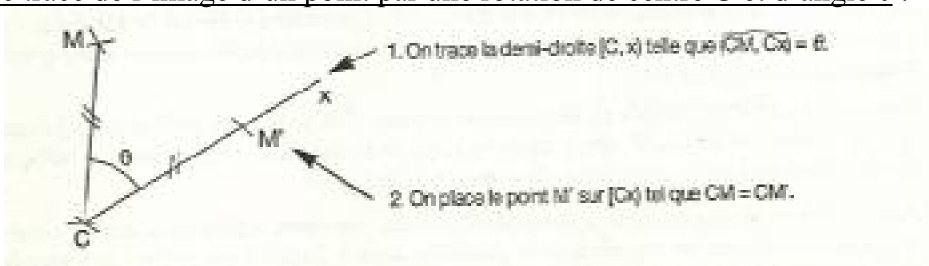
Etant donné un angle θ (de sens direct ou indirect) et un point C, l'image du point M par la rotation de centre C et de cet angle est :

- le point M' tel que CM' = CM et l'angle (CM, CM') = θ (de sens direct ou indirect) si M est différent de C.
- le point M lui-même si M est en C.

La rotation de centre C et d'angle θ est notée R (C, θ).

Si M' est l'image de M par R(C, θ), on écrit : M' = R(C, θ) (M).

<u>Méthode de tracé de l'image d'un point par une rotation de centre C et d'angle θ</u> :



Rq : Si M' est l'image de M par une rotation de centre C, alors C est sur la médiatrice de [MM']car CM = CM'.

<u>Propriétés des rotations</u> :

- La rotation transforme une droite en une droite, elle conserve les distances, les angles, les milieux.

- L'image d'un cercle est donc un cercle de même rayon dont le centre est l'image du centre.

4. La translation

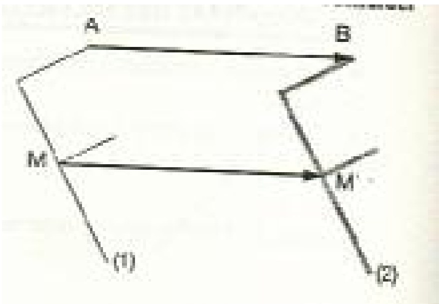
Un vecteur se caractérise par un sens, une direction et une longueur.

Deux vecteurs sont égaux s'ils ont même longueur, même sens et même direction.

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si ABDC est un parallèlogramme est réciproquement.

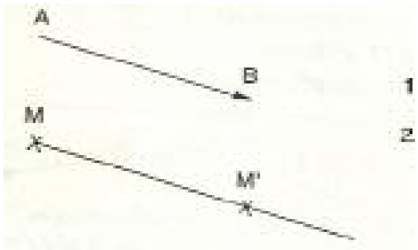
Une figure (F') est l'image d'une figure (F) par une translation s'il est possible, en faisant glisser (F) sans la faire tourner, de la faire coïncider avec (F).

Source : Hatier maths
Tome1, chapitre 9



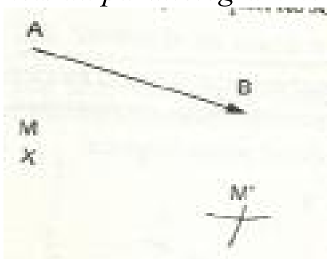
Étant donné un vecteur $\overrightarrow{AB}$, l'image du point M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$.
La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est notée $t_{\overrightarrow{AB}}$.
On note $M' = t_{\overrightarrow{AB}}(M)$.

<u>Méthodes de tracé</u> :
1ère méthode :



On trace la droite passant par M et parallèle à (AB).
On place le point M’ sur cette droite tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$.

2ème méthode : *en traçant les sommets du parallèlegramme ABM’M.*

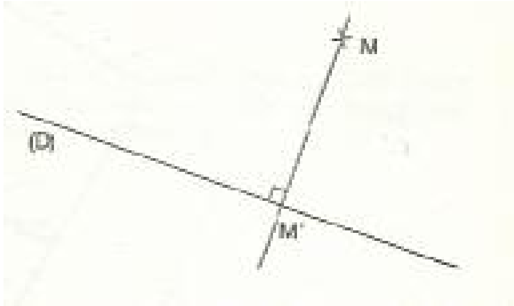


On trace un arce de cercle de rayon AM et de centre B.
On trace un arc de cercle de centre M et de rayon AB.
Ces deux arcs se coupent en M’.

<u>Propriétés de la translation</u> :
- La translation conserve l’alignement, les longueurs, les milieux.
- L’image d’une droite est une droite parallèle.
- L’image d’un cercle est un cercle de même rayon dont le centre est l’image du centre.

5. La projection orthogonale

Etant donnée une droite (D), la projection orthogonale sur (D) est la transformation qui à tout point M associe le point M' tel que M' est l'intersection de (D) et de la perpendiculaire à (D) passant par M.



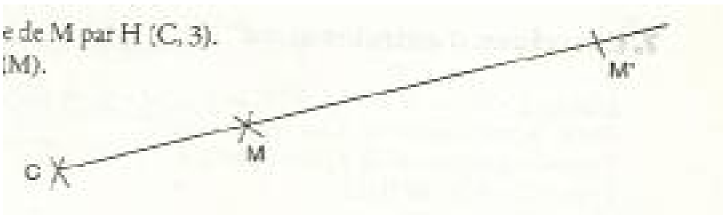
Propriété :
La projection ne conserve pas les longueurs mais elle conserve les milieux et l'alignement.

6. L'homothétie de rapport positif

Soit un nombre k>0 et un point C, l'image d'un point M par l'homothétie de centre C et de rapport k est le point M' tel que :

- M' est sur la demi-droite [CM),
- CM' = k ×CM.

Ex :



M' est l'image de M par H(C, 3).
On note M' = H(C,3) (M).

Propriétés :

- L'homothétie conserve l'alignement, les milieux mais, en général, pas les longueurs.
- On démontre que si A' et B' sont les images respectives de A et B par une homothétie de rapport k, alors on a A'B' = k ×AB.

Apports didactiques

1. Repérer et tracer les axes de symétrie d'une figure

1.1 Les procédures possibles

Pour conjecturer l'existence d'un axe (dans le cas où la figure n'est pas une figure « classique »), on repère :

- Soit une sous-figure qui admet un axe de symétrie.
- Soit des élèments de la figure qui semblent symétriques (segments de même longueur, angles de même mesure…) et on cherche alors à préciser leur axe de symétrie.

Pour vérifier que l'axe conjecturé est bien un axe de symétrie de la figure, on peut :

- Soit tracer mentalement (ou réellement ds certains cas) le symétrique de la figure et repérer si le symétrique obtenu fait partie de la figure.
- Soit effectuer mentalement le pliage et vérifier que les 2 parties de la figure situées dans les demi-plans définis par la droite se superposent.

1.2 Les principales difficultés rencontrées par les élèves

- Certains élèves n'arrivent pas à mobiliser des images mentales de pliage ou de construction de symétrique.

- Beaucoup d'élèves s'appuient sur le théorème-élève : « un axe de symétrie d'une figure passe par le milieu de cette figure », mais le mot milieu peut avoir plusieurs sens pour les élèves (milieu d'un segment, centre d'un cercle, d'une figure, droite qui partage la figure en 2 figures égales…).

- Les élèves privilégient les axes verticaux ou horizontaux, dans la mesure où ils le sont dans leur contexte social et scolaire.
  → *Dans le cas d'une figure présentant plusieurs axes de symétrie, les élèves ne repèreront que l'axe horizontal ou l'axe vertical s'ils existent.*
  → *Si une figure qui admet un ou des axes de symétrie est représentée de telle sorte que ces axes ne soient ni horizontaux ni verticaux, bcp d'élèves estimeront qu'il n'y a pas d'axe.*

- Dans le cas où la figure est composée de figures de base facilement repérables et possédant chacun un axe de symétrie, les élèves ont tendance à assimiler ces axes avec ceux de la figure complète.

1.3 Les principales variables didactiques

Les outils dont dispose l'élève :

- ***L'élève dispose de papier calque*** : il peut l'utiliser pour décalquer et faire divers essais de pliage pr trouver un éventuel axe de symétrie.Pas besoin d'anticiper sur une position de l'axe.
- ***Il peut plier la feuille*** : idem que précédemment.
- ***Il dispose d'une règle et d'une équerre et ne peut pas plier la feuille*** : doit faire appel à des images mentales.

Le support sur lequel est représentée la figure :

- ***La figure est tracée sur papier quadrillé*** :
  - Si l'axe de symétrie correspond à une ligne du quadrillage : facilite son repérage ; le décompte des carreaux facilite la vérification.
  - Si l'axe ne correspond pas à une ligne du quadrillage : la présence des lignes peut induire l'élève en erreur.
- ***La figure est tracée sur papier blanc*** : obligation de faire appel à des images mentales.

Les caractéristiques de la figure *(dans le cas où elle est représentée sur papier blanc)*

- ***L'orientation de l'axe*** : l'élève reconnaîtra plus facilement un axe horizontal ou vertical qu'un axe oblique.
- ***Le nombre d'axes de symétrie*** : si plusieurs axes de symétrie, l'élève après en avoir trouvé un peut considérer que sa tâche est terminée.
- ***La familiarité que l'élève a avec la figure***.
- ***Les figures de base qui constituent la figure*** :
  - Si la figure est composée de 2 éléments isolés qui sont symétriques, l'élève reconnaîtra facilement l'existence de l'axe.
  - Si la figure est composée de 2 éléments superposables non symétriques, il risque de considérer que la figure a un axe de symétrie.
  - Si la figure peut être partagée par une droite en 2 parties superposables, l'élève risque de reconnaître un axe de symétrie alors que ce n'est pas forcément le cas (ex : diagonale d'un parallélogramme).

2. Tracer le symétrique d'une figure par rapport à un axe

2.1 Les procédures possibles

Papier calque :minimum d'habileté manipulatrice.Idem si l'élève peut plier la feuille.

Papier blanc avec équerre et règle graduée :
- *Si polygone* : l'élève peut repérer les sommets de la figure, tracer le symétrique de chacun de ces sommets avec l'équerre puis joindre les points.
- *Si figure constituée d'arcs de cercle* : l'élève doit tracer le symétrique du centre de ces arcs et tracer les arcs de même rayon.Pliage = outil de contrôle.

Papier quadrillé :
- *Si l'axe coïncide avec une ligne du quadrillage* : les perpendiculaires sont déjà tracées et le report des mesures se fait par comptage des carreaux.
- *Si l'axe ne coïncide pas avec une ligne du quadrillage* : des obstacles peuvent apparaître.

A main levée :
- Effectuer le tracé des points clés.
- Construire globalement l'image de la figure.

2.2 Analyse des difficultés des élèves

Tracé du symétrique d'une figure à main levée :
- Difficulté à mobiliser des images mentales.
- Difficulté pour tracer les éléments après mobilisation des images mentales : si le tracé n'est pas parfaitement automatisé, possibilité de surcharge cognitive.

Tracé du symétrique d'une figure avec une équerre et une règle :
- Difficulté pour joindre les points si l'élève ne les a pas joints 2 par 2.
- Ds le cas de figures composées de segments, l'élève mobilise facilement des procédures erronées du type « ligne de rappel » horizontale, verticale ou suivant les directions de segments de la figure.

Pour tracer le symétrique d'un segment, les élèves peuvent mettre en œuvre des théorèmes erronés :

- *L'image d'un segment est un segment de même longueur.*
- *L'image d'un segment est un segment de même direction.*
- *La symétrie orthogonale est une transformation d'un demi-plan sur un autre demi-plan.*

2.3 Les variables didactiques

- **Consignes** données aux élèves : Peuvent-ils plier la feuille ?…
- **Matériel.**
- **Support.**
- **L'axe** est-il vertical ?horizontal ?oblique ?
- **La figure** :
    - « classique » ?
    - composée de « figures classiques » ?
    - Polygone et nombre de sommets ?
    - La figure coupe-t-elle l'axe ?
    - Contient-elle des côtés horizontaux ou verticaux ?
- **L'espace reservé aux élèves pour répondre** :leur permet-il de mettre en œuvre toutes les procédures auxquelles ils peuvent penser ?

⇨ **Il existe une conception erronée de la symétrie très répendue chez les élèves : « le symétrique d'une figure est une figure égale située de l'autre côté de l'axe, à une même « distance » de l'axe que la figure objet.Il y a conservation de la nature de la figure, des dimensions et de la forme. »**