Ministère de l'Éducation Nationale		**République du Mali**
Centre National des Examens et Concours de l'Éducation		**Un Peuple-Un But-Une Foi**
EXAMEN : Baccalauréat Général		BAC 2020
Série: Terminale Sciences Economiques (**TSEco**)		SESSION : Septembre 2020
Épreuve: Mathématiques	Durée: 3 heures	Coefficient: 3

Exercice 1……………………………………………………………..…………(6 pts)

Trois capitaux, en progression arithmétique, ont pour somme 81000000 F CFA.

1. Calcule ces capitaux sachant que le troisième capital est le double du premier.
2. On place ces capitaux dans les conditions suivantes :
   - 18000000 F CFA à 6% pendant 90 jours ;
   - 27000000 F CFA à 4,5% pendant 60 jours;
   - 36000000 F CFA à t% pendant 30 jours.

   Le taux moyen de ces placements est : 5,735%.

   Calcule le taux du troisième capital.

Exercice 2……………………………………………………………..…………(6 pts)

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{5} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 3}{6} \end{cases}$.

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 5u_n + 3$.

1. Démontre que (v_n) est une suite géométrique. En déduis une expression de u_n en fonction de n.
2. Démontre que (u_n) est une suite décroissante.
3. a. Calcule $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$ et $S'_n = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1}$.
   b. Détermine les limites de S_n et S'_n quand $n \to +\infty$.

Problème……………………………………………………………..…………(8 pts)

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; I, J)$. Soit f la fonction définie par

$f : x \mapsto (\ln x)^2 - 1$ et (C) sa courbe représentative.

1. a. Détermine l'ensemble définition de f.
   b. Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble définition.
2. a. Calcule la fonction dérivée f' de f.
   b. Etudie le signe de $f'(x)$.
   c. Dresse le tableau de variations f.

3. a. Reproduis et Complète le tableau ci-dessous :

x	e^{-1}	1	2	e	3	4	5
$f(x)$							

b. Construis la courbe représentative (C) de f .

Exercice 1 :

Soient C_1, C_2 et C_3 les trois capitaux en progression arithmétique de raison r

$C_1 + C_2 + C_3 = 81\ 000\ 000$

1. Calculons ces capitaux sachant que $C_3 = 2C_1$

Méthode 1 :

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 81\ 000\ 000 \\ C_3 = 2C_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + (C_1 + r) + (C_1 + 2r) = 81\ 000\ 000 \\ C_1 + 2r = 2C_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3C_1 + 3r = 81\ 000\ 000 \\ -C_1 + 2r = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3C_1 + 3r = 81\ 000\ 000 \\ -3C_1 + 6r = 0 \end{cases}$$

$$9r = 81\ 000\ 000 \Rightarrow r = \frac{81\ 000\ 000}{9} = 9\ 000\ 000$$

$-C_1 + 2r = 0 \Rightarrow C_1 = 2r = 2 \times 9\ 000\ 000 = 18\ 000\ 000$; $C_1 = 18\ 000\ 000 F\ CFA$

$C_2 = 18\ 000\ 000 + 9\ 000\ 000 = 27\ 000\ 000$; $C_2 = 27\ 000\ 000 F\ CFA$

$C_3 = 18\ 000\ 000 + 2 \times 9\ 000\ 000 = 36\ 000\ 000$; $C_3 = 36\ 000\ 000 F\ CFA$

Méthode 2 :

C_1, C_2 et C_3 sont en progression arithmétique $\Rightarrow C_1 + C_3 = 2C_2$

$C_1 + C_2 + C_3 = 81\ 000\ 000 \Rightarrow 3C_2 = 81\ 000\ 000$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{81\ 000\ 000}{3} = 27\ 000\ 000 F\ CFA$$

$C_3 = 2C_1$ et $C_1 + C_2 + C_3 = 81\ 000\ 000 \Rightarrow C_1 + 27\ 000\ 000 + 2C_1 = 81\ 000\ 000$

$$\Rightarrow 3C_1 = 81\ 000\ 000 - 27\ 000\ 000$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{54\ 000\ 000}{3} = 18\ 000\ 000 F\ CFA$$

$C_3 = 2C_1 = 2 \times 18\ 000\ 000 = 36\ 000\ 000 F\ CFA$

Autrement

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 81\ 000\ 000 \\ C_3 = 2C_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + 27\ 000\ 000 + C_3 = 81\ 000\ 000 \\ C_3 = 2C_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_3 = 54\ 000\ 000 \\ 2C_1 - C_3 = 0 \end{cases}$$

$3C_1 = 54\ \ 000\,000 \Rightarrow C_1 = 18\ \ 000\,000 F\,CFA$

$C_3 = 2C_2 = 2 \times 18\,000\,000 = 36\,000\,000 F\,CFA$

2. Calculons le taux du troisième capital

$$t_{\mathrm{m}} = \frac{C_1 n_1 t_1 + C_2 t_2 n_2 + C_3 t_3 n_3}{C_1 n_1 + C_2 n_2 + C_3 n_3}$$

$$\Rightarrow 5{,}735 = \frac{18\,000\,000 \times 6 \times 90 + 27\,000\,000 \times 4{,}5 \times 60 + 36\,000\,000 \times t \times 30}{18\,000\,000 \times 90 + 27\,000\,000 \times 60 + 36\,000\,000 \times 30}$$

$$\Rightarrow 5{,}735 = \frac{9\,720\,000\,000 + 7\,290\,000\,000 + 1080\,000\,000 \times t}{18\,000\,000 \times 90 + 27\,000\,000 \times 60 + 36\,000\,000 \times 30}$$

$$\Rightarrow 5{,}735 = \frac{9\,72 + 7\,29 + 108t}{432}$$

$$\Rightarrow 5{,}735 \times 432 = 1701 + 108t$$

$$\Rightarrow t = \frac{2477{,}5 - 1701}{108} = 7{,}19\ \%$$

Exercice 2 :

$$(U_n)_{n \in \mathbb{N}} : \begin{cases} U_0 = \dfrac{3}{5} \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n - 3}{6} \end{cases} \text{ et } (V_n)_{n \in \mathbb{N}} : V_n = 5U_n + 3$$

1. Démontrons que (V_n) est une suite géométrique

$$V_n = 5U_n + 3 \Rightarrow V_{n+1} = 5U_{n+1} + 3 = 5 \times \frac{U_n - 3}{6} + 3 = \frac{5U_n - 15 + 18}{6} = \frac{5U_n + 3}{6} = \frac{V_n}{6}$$

$V_{n+1} = \dfrac{1}{6} V_n$, alors (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{6}$ et de premier terme

$V_0 = 5U_0 + 3 = 5 \times \dfrac{3}{5} + 3 = 6$; $V_0 = 6$

Deduisons une expression de U_n en fonction de n

$$V_n = V_0 \times q^n = 6\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

$$V_n = 5U_n + 3 \quad \Rightarrow \quad U_n = \frac{V_n - 3}{5} = \frac{1}{5}\left(6\left(\frac{1}{6}\right)^n - 3\right) = \frac{6}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n - \frac{3}{5} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} - \frac{3}{5} \quad ;$$

$$U_n = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} - \frac{3}{5}$$

2. Démontrons que (U_n) *e*st décroissante

$$U_n = \frac{6}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n - \frac{3}{5} \Rightarrow U_{n+1} = \frac{6}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} - \frac{3}{5}$$

$$U_{n+1}-U_n=\frac{6}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}-\frac{3}{5}-\left(\frac{6}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{n}-\frac{3}{5}\right)$$

$$=\frac{6}{5}\times\frac{1}{6^{n+1}}-\frac{3}{5}-\frac{6}{5}\times\frac{1}{6^{n}}+\frac{3}{5}$$

$$=\frac{6}{5}\left(\frac{1}{6^{n+1}}-\frac{6}{6^{n+1}}\right)=\frac{6}{5}\times\left(\frac{-5}{6^{n+1}}\right)=\frac{-1}{6^{n}}<0$$

$U_{n+1}-U_n\leq 0 \Longrightarrow (U_n)$ est décroissante

3. **a.** Calculons $S_n=V_0+V_1+\cdots+V_{n-1}$ et $S_n^{'}=U_0+U_1+\cdots+U_{n-1}$

$$S_n=V_0+V_1+\cdots+V_{n-1}=V_0\times\frac{1-q^n}{1-q}=6\times\frac{1-\left(\frac{1}{6}\right)^n}{1-\frac{1}{6}}$$

$$=6\times\frac{1-\left(\frac{1}{6}\right)^n}{-\frac{5}{6}}$$

$$=\frac{36}{5}\left[\left(\frac{1}{6}\right)^n-1\right]$$

$$S_n^{'}=U_0+U_1+\cdots+U_{n-1}$$

$$U_0=\frac{V_0-3}{5}$$

$$U_1=\frac{V_1-3}{5}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$U_{n-1}=\frac{V_{n-1}-3}{5}$$

$$S^{'}_n=\frac{S_n-3n}{5}=\frac{1}{5}\left(\frac{36}{5}\left[\left(\frac{1}{6}\right)^n-1\right]-3n\right)=\frac{36}{25}\left[\left(\frac{1}{6}\right)^n-1\right]-\frac{3n}{5}$$

b. Déterminons les limites de S_n et de $S_n^{'}$ quand $n\longrightarrow+\infty$

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{36}{5}\left[\left(\frac{1}{6}\right)^n-1\right]=-\frac{36}{5}$$

$$\lim_{n\to+\infty}S_n^{'}=\lim_{n\to+\infty}\frac{36}{25}\left[\left(\frac{1}{6}\right)^n-1\right]-\frac{3n}{5}=\frac{36}{25}[0-1]-\infty=-\infty$$

Problème :

Le plan est muni d'un repère ortonormal $(O\,;I\,;J)$

$f(x)=(\ln x)^2-1$, (C) est la représentation graphique de la fonction f

1. a Déterminons l'ensemble de définition de f

$D_f = \{x/x \in \mathbb{R}, x > 0\} \Rightarrow D_f =]0; +\infty[$

b. Calculons les limites de f aux bornes de son ensemble de définition

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} (\ln x)^2 - 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (\ln x)^2 - 1 = +\infty$$

2. a. Calculons la fonction dérivée $f\,'$ de f

f est dérivable sur $]0; +\infty[$

$$f\,'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x) = \frac{2\ln(x)}{x}$$

b. Étudions le signe de $f\,'(x)$

$\forall x \in]0; +\infty[, \dfrac{2}{x} > 0$; $f\,'(x)$ a même signe que $\ln(x)$

Tableau de signe :

x	0		1		$+\infty$
$f\,'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

c. Dressons le tableau de variation de f **:**

$f(1) = (\ln 1)^2 - 1 = -1$

x	0		1		$+\infty$
$f\,'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f\,'(x)$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

3. a. Reproduisons et complétons le tableau :

x	e^{-1}	1	2	e	3	4	5
$f(x)$	0	-1	$(\ln 2)^2 - 1$	0	$(\ln 3)^2 - 1$	$(\ln 4)^2 - 1$	$(\ln 5)^2 - 1$

$f(e^{-1}) = (\ln e^{-1})^2 - 1 = 0$; $f(1) = -1$; $f(2) = (\ln 2)^2 - 1 \approx -0{,}52$

$f(e) = (\ln e)^2 - 1 = 0$; $f(3) = (\ln 3)^2 - 1 \approx 0,21$; $f(4) = (\ln 4)^2 - 1 \approx 0,92$;

$f(5) = (\ln 5)^2 - 1 \approx 1,59$

b. Représentons graphiquement la courbe (C) de f