Corrigé Sciences et Technologies de l'Agronomie et du Vivant Antilles-Guyane-Polynésie juin 2017

La calculatrice est autorisée.

Les annexes A et B sont à rendre avec la copie après avoir été numérotées.

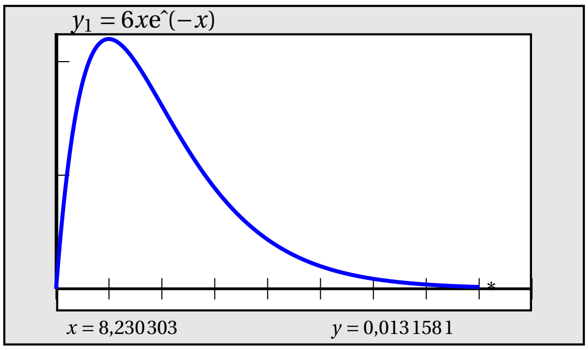
EXERCICE 1 — 7 points

On procède, chez un sportif, à l'injection intramusculaire d'un produit. Celui-ci se diffuse progressivement dans le sang.
On admet que la concentration de ce produit dans le sang, exprimée en mg·L^{-1} (milligrammes par litre) peut être modélisée par la fonction g définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = 6x\mathrm{e}^{-x}$$

où x est le temps exprimé en heures.

1. On donne ci-contre la capture d'écran d'une calculatrice illustrant la représentation graphique de la fonction g, chaque graduation correspondant à une unité.



a. Graphiquement la limite de g en $+\infty$ semble être 0 car la courbe se rapproche de plus en plus de l'axe des abscisses.

b. Cette valeur dans le contexte de l'exercice s'interprète comme la limite de la concentration dans le sang de l'injection d'un produit. Au bout d'un certain temps la concentration tend à disparaître.

2. **a.** Pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$, calculons $g'(x)$. $g'(x) = 6\mathrm{e}^{-x} + (6x)(-\mathrm{e}^{-x}) = (6-6x)\mathrm{e}^{-x}$.

b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$, par conséquent $g'(x)$ est du signe de $(6-6x)$.
Étudions le signe de $g'(x)$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.
Sur $\mathbb{R}$, $6-6x > 0 \iff x < 1$. Il en résulte : si $x \in [0\ ;\ 1[$, $g'(x) > 0$ et si $x \in]1\ ;\ +\infty[$, $g'(x) < 0$.

c. Étudions la variation de g.
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.
Sur $[0\ ;\ 1[$, $g'(x) > 0$ par conséquent g est strictement croissante sur cet intervalle.
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.
Sur $]1\ ;\ +\infty[$, $g'(x) < 0$ par conséquent g est strictement décroissante sur cet intervalle.
Construisons le tableau de variation de g sur $[0\ ;\ +\infty[$.

t	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
Variation de g	0	↗	$6\mathrm{e}^{-1} \approx 2,21$	↘	0

3. La concentration maximale du médicament dans le sang est $g(1)$. Une valeur approchée à 10^{-1} près de $6\mathrm{e}^{-6}$ est 2,2.

4. Le produit fait l'objet d'une réglementation par la fédération sportive. Pour ne pas être en infraction, la concentration dans le sang de ce produit doit être inférieure à 0,05 mg · L^{-1}.

a. L'algorithme permettant de déterminer le nombre d'heures qu'il faut attendre après l'injection pour être sûr de ne pas être en infraction est complété sur l'**Annexe A (à rendre avec la copie)**.

b. Déterminons le nombre d'heures qu'il faut attendre après l'injection pour être sûr de ne pas être en infraction.

En programmant l'algorithme sur une calculatrice, en sortie nous obtenons $x = 7$. Donc au bout de sept heures, nous pouvons être sûr de ne pas être en infraction.

En utilisant le tableur d'une calculatrice, nous obtenons $g(6,68) > 0,05 > g(6,69)$.

On prend par précaution $6{,}69\text{ (h)} = 6 + 0,69 \times 60 \approx 6\text{ (h)}41,4\text{ (min)}$.

Par conséquent au bout de six heures quarante deux minutes, le sportif ne sera pas en infraction.

EXERCICE 2 — 6 points

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

La glycémie, appelée aussi « taux de sucre » ou « taux de glucose » dans le sang, peut varier chez une personne diabétique pour plusieurs raisons : alimentation, traitement, activités sportives, …

PARTIE A

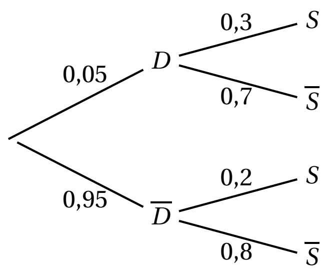
Une étude statistique menée sur une population a permis de diagnostiquer que :

— 5 % des personnes sont diabétiques et, parmi elles, 30 % pratiquent une activité sportive régulière ;

— parmi les personnes non diabétiques, 20 % pratiquent une activité sportive régulière.

On interroge au hasard une personne issue de cette population.
On note D l'évènement « la personne interrogée est diabétique ».
On note S l'évènement « la personne interrogée pratique une activité sportive régulière ».

1. Décrivons cette situation avec un arbre de probabilités, en précisant sur chaque branche la valeur des probabilités.



2. La probabilité pour une personne interrogée d'être diabétique et de pratiquer une activité sportive régulière est notée $p(D \cap S)$.

$p(D \cap S) = p(D) \times p_D(S) = 0,05 \times 0,30 = 0,015$.

3. Calculons la probabilité que la personne interrogée pratique une activité sportive régulière.

D et $\overline{D}$ constituent une partition de l'univers.

$p(S) = p(D \cap S) + p(\overline{D} \cap S) = p(D) \times p_D(S) + p(\overline{D}) \times p_{\overline{D}}(S) = 0,015 + 0,95 \times 0,20 = 0,205$.

PARTIE B

En 2006, le pourcentage de personnes diabétiques en France était de 3,95 %. L'Institut de Veille Sanitaire s'interroge sur la proportion de personnes diabétiques en France et aimerait savoir s'il y a une différence en 2016.

Un laboratoire, mandaté par l'Institut de veille sanitaire, effectue des analyses médicales sur 900 personnes et observe 63 individus diabétiques.

On suppose que la population française est suffisamment importante pour que le choix des 900 personnes puisse être assimilé à un prélèvement avec remise.

On rappelle que :

L'intervalle de fluctuation asymptotique à 0,95 d'une fréquence obtenue sur un échantillon de taille n est :

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

1. Déterminons l'intervalle de fluctuation asymptotique à 0,95 de la fréquence de personnes diabétiques en 2006 obtenue sur un échantillon de taille 900 (les bornes sont arrondies à 10^{-4} près).

$n = 900 > 30 \quad np = 0,0395 \times 900 = 35,55 > 5 \quad n(1-p) = 900 \times (1 - 0,0395) = 864,45 > 5$

$$\left[0,0395 - 1,96\sqrt{\frac{0,0395(1-0,0395)}{900}}\ ;\ 0,0395 + 1,96\sqrt{\frac{0,0395(1-0,0395)}{900}}\right] \approx [0,0267\ ;\ 0,0523]$$

2. La proportion d'individus diabétiques parmi l'échantillon en 2016 est $\dfrac{63}{900} = 0,07$. Ce résultat nous amène à remettre en cause l'hypothèse selon laquelle la proportion de personnes diabétiques est restée la même en 2016 qu'en 2006 puisque 0,07 n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation.

EXERCICE 3 — 3 points

La Fédération Française des Diabétiques publie le document suivant concernant le taux normal de glycémie à jeun.

Hypoglycémie	inférieur à $0{,}70\,\text{g}\cdot\text{L}^{-1}$
Glycémie normale	entre $0{,}70\,\text{g}\cdot\text{L}^{-1}$ et $1{,}10\,\text{g}\cdot\text{L}^{-1}$
Hyperglycémie	supérieur à $1{,}10\,\text{g}\cdot\text{L}^{-1}$

On désigne par X la variable aléatoire qui, à toute personne choisie au hasard dans une population, associe son taux de glycémie à jeun, exprimé en $\text{g}\cdot\text{L}^{-1}$.
On admet que X suit la loi normale de moyenne 0,9 et d'écart type 0,1.
On arrondira, si besoin, les résultats à 10^{-3} près.

1. Déterminons la probabilité $p(0,7 \leqslant X \leqslant 1,1)$. À l'aide d'une calculatrice, $p(0,7 \leqslant X \leqslant 1,1) \approx 0{,}954$.
   nous pouvons remarquer que $p\,(0,7 \leqslant X \leqslant 1,1)$ est de la forme $p(\overline{x} - 2\sigma \leqslant X \leqslant \overline{x} + 2\sigma)$.
   Ce résultat dans le contexte de l'exercice signifie que la probabilité qu'une personne ait une glycémie normale est de 0,954.
2. La probabilité qu'une personne choisie au hasard dans cette population soit en hyperglycémie est $p(X > 1{,}1)$.
   $p(X > 1{,}1) \approx 0{,}023$.
   Nous pouvions remarquer aussi : $p\left(X > \overline{x} - 2\sigma\right) = \dfrac{1 - 0{,}954}{2}$.

EXERCICE 4 — 4 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples, donné en **Annexe B (à rendre avec la copie)**.
Pour chaque proposition, une seule réponse est exacte.
Une réponse exacte rapporte un point, une réponse inexacte ou l'absence de réponse n'enlève pas de point.
Cocher, pour chaque proposition posée, la réponse qui convient. Aucune justification n'est demandée.

ANNEXE A (à compléter et à rendre avec la copie)

Exercice 1

Question **4.a.**

Initialisation
  x prend la valeur 1
  y prend la valeur 2,2
Traitement
Tant que $y \geqslant 0{,}05$
  x prend la valeur $x+1$
  y prend la valeur $6x\mathrm{e}^{-x}$
Fin Tant que
Sortie
Afficher x

ANNEXE B (à compléter et à rendre avec la copie)

Exercice 4 : QCM

Cocher pour chaque proposition, la réponse correcte. Aucune justification n'est demandée.

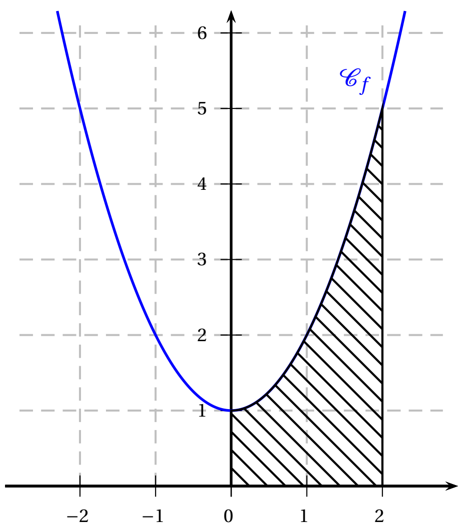
1. La fonction f est définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 1 + \dfrac{1}{2x}$
   Une primitive F de f sur $]0\,;\,+\infty[$ est :

   ☐ $\cancel{F(x) = x + \ln(2x)}$ ☑ $F(x) = x + \dfrac{1}{2}\ln(x)$ ☐ $\cancel{F(x) = -\dfrac{1}{2x^2}}$.

2. L'intégrale $\displaystyle\int_1^3 (2x^2 - 1)\,\mathrm{d}x$ est égale à :

   ☐ $\cancel{16}$ ☐ $\cancel{\dfrac{44}{3}}$ ☑ . $\dfrac{46}{3}$

3. On donne la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$
   L'intégrale $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ est :



   ☐ ~~comprise entre 0 et 3~~ ☑ comprise entre 3 et 7 ☐ ~~supérieure à 7~~ .

4. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ est égale à :

   ☑ $1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ ☐ $\cancel{1 + \mathrm{e}^{-1}}$ ☐ $\cancel{\dfrac{1}{\mathrm{e}} - 1}$.