ARITHMETIQUE

I Vocabulaire de l'arithmétique :

A) Division euclidienne

$$\begin{array}{c|c} a & b \\ \cline{2-2} r & q \end{array}$$

Effectuer la *division euclidienne* de a par b, c'est trouver deux entiers naturels q et r tels que : $a = b \times q + r$ avec $r < b$ où q est le quotient entier et r est le reste de la division euclidienne.

B) Diviseur :

Soient a et b deux entiers naturels (non nuls). On dit que b est un *diviseur* de a si le reste de la division de a par b est égal à zéro (c'est à dire s'il existe un entier c tel que $a = b \times c$).

Exemples : 5 est un diviseur de 15 car $15 = 3 \times 5 + \mathbf{0}$
3 n'est pas un diviseur de 7 car $7 = 2 \times 3 + \mathbf{1}$

Remarques : 1 et a sont toujours des diviseurs de a.
Si a est un diviseur de b, alors b est un *multiple* de a.

C) Diviseurs communs à deux entiers naturels :

Pour rechercher les *diviseurs communs à 2 entiers*, il suffit de chercher les diviseurs de chaque entier et regarder ceux qui sont identiques :

Exemple : **63** a pour diviseurs 1 ; 3 ; 7 ; 9 ; 21 ; 63
45 a pour diviseurs 1 ; 3 ; 5 ; 9 ; 15 ; 45
Les diviseurs communs à **63** et **45** sont donc 1 ; 3 et 9.

D) PGCD à deux entiers naturels :

Souvent on cherche le *plus grand des diviseurs communs à deux entiers*.

Exemple : PGCD(**63** ;**45**) = 9

Si les nombres sont grands, on peut utiliser l'algorithme d'Euclide (voir activité)

Exemple : Pour **493** et **377,**
$493 = 1 \times 377 + 116$
$377 = 3 \times 116 + 29$
$116 = 4 \times 29 + 0$
Le PGCD(**493** ;**377**) = **29** (le dernier reste non nul)

Démonstration (partielle et optionnelle) : Soit $a = b \times q + r$ avec $r < b$ (division euclidienne de a par b)
Soit $\mathbf{g}$ = PGCD (a ; b) et $\mathbf{h}$ = PGCD (b ; r).

a) g divise a et b : c'est-à-dire qu'il existe k_1, k_2 tels que $a = \mathbf{g} \times k_1$ et $b = \mathbf{g} \times k_2$.
Donc $a - b \times q = \mathbf{g} \times k_1 - \mathbf{g} \times k_2 \times q = \mathbf{g} \times (k_1 - k_2 \times q)$ c'est-à-dire que g divise $a - b \times q$.
Par conséquent g est un diviseur commun à b et r.
On peut déduire que $\mathbf{g} \leq \mathbf{h}$ par définition de **h**.

b) h divise b et r : c'est-à-dire qu'il existe k_3, k_4 tels que $b = \mathbf{h} \times k_3$ et $r = \mathbf{h} \times k_4$.
Donc $b \times q + r = \mathbf{h} \times k_3 \times q + \mathbf{h} \times k_4 = \mathbf{h} \times (k_3 \times q + k_4)$ c'est-à-dire que **h** divise $b \times q + r$.
Par conséquent **h** est un diviseur commun à a et b.
On peut déduire que $\mathbf{h} \leq \mathbf{g}$ par définition de **g**.

c) D'après a) et b) **g=h** c'est-à-dire que PGCD (a ; b) = PGCD (b ; r)

Conclusion : Le PGCD du diviseur et du dividende est égal au PGCD du dividende et du reste.

II Nombres premiers entre eux :

On dit que deux nombres a et b sont *premiers entre eux* lorsque leur plus grand diviseur commun est égal à 1.

Exemples *:*

a) **10** et 7 sont premiers entre eux ; en effet :
les diviseurs positifs de **10** sont 1, 2, 5 et 10,
les diviseurs positifs de 7 sont 1 et 7,
donc PGCD(**10** ; 7) = 1 et **10** et 7 sont premiers entre eux.

b) **221** et **69** sont premiers entre eux ; en effet :
en appliquant l'algorithme d'Euclide,
$221 = 69\times3 + 14$
$69 = 14\times4 + 13$
$14 = 13\times1 + 1$
$13 = 1\times13$ donc PGCD(**221** ; **69**) = 1.

III Fractions irréductibles :

On dit qu'une fraction est *irréductible* lorsque son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

Exemple : PGCD (10 ; 7) = 1 donc $\frac{10}{7}$ est une fraction est irréductible.

Propriété **:** Lorsque l'on simplifie une fraction par le plus grand diviseur commun à son numérateur et son dénominateur, la fraction obtenue est irréductible.

Exemple **:** On sait que PGCD (252 ; 360) = 36 donc : $\frac{360}{252} = \frac{360:36}{252:36} = \frac{10}{7}$ est une fraction est irréductible.

IV Résolution de problèmes :

On a 2 types d'objets : A et B.
Il y a 120 objets A et 45 objets B.
On veut constituer des « paquets » d'objets A et B, tous identiques.
On veut le plus grand nombre de paquets possibles.

Appelons : p le nombre de paquets,
a le nombre d'objets A dans chaque paquet,
b le nombre d'objets B dans chaque paquet.

Donc $p\times a = 120$: p est un diviseur de 120
et $p\times b=45$: p est un diviseur de 45.

Donc p est un diviseur commun de 120 et 45 et on veut qu'il soit le plus grand possible :
p est le PGCD de 120 et 45.
$a= 120\div p$ et $b = 45\div p$