

MULTIPLICATION ET DIVISION DES NOMBRES ENTIERS

LES TEXTES OFFICIELS

CYCLE 2

<u>PROGRAMMES</u>	Ils mémorisent et utilisent les tables d'addition et de multiplication (par 2, 3, 4 et 5), ils apprennent les techniques opératoires de l'addition et de la soustraction, celle de la multiplication et apprennent à résoudre des problèmes faisant intervenir ces opérations. Les problèmes de groupements et de partage permettent une première approche de la division pour des nombres inférieurs à 100.
<u>SOCLE COMMUN</u> <u>Pallier 1</u>	<ul style="list-style-type: none"> - calculer : addition, soustraction, multiplication ; - diviser par 2 et par 5 des nombres entiers inférieurs à 100 (dans le cas où le quotient exact est entier) ; - restituer et utiliser les tables d'addition et de multiplication par 2, 3, 4 et 5 ; - calculer mentalement en utilisant des additions, des soustractions et des multiplications simples ;

<u>PROGRESSION</u>	
CP	CE1
<ul style="list-style-type: none"> - Connaître les doubles des nombres inférieurs à 10 et les moitiés des nombres pairs inférieurs à 20. - Connaître la table de multiplication par 2. 	<ul style="list-style-type: none"> - Connaître les doubles et moitiés de nombres d'usage courant. - Mémoriser tables de multiplication par 2, 3, 4 et 5. - Connaître et utiliser des procédures de calcul mental pour calculer des sommes, des différences et des produits. - Calculer en ligne des suites d'opérations. - Connaître une technique opératoire de la multiplication et l'utiliser pour effectuer des multiplications par un nombre à un chiffre. - Diviser par 2 ou 5 des nombres inférieurs à 100 (quotient exact entier). - Résoudre des problèmes relevant de l'addition, de la soustraction et de la multiplication. - Approcher la division de deux nombres entiers à partir d'un problème de partage ou de groupements.

CYCLE 3

<u>PROGRAMMES</u>	<ul style="list-style-type: none"> - relations arithmétiques entre les nombres d'usage courant : double, moitié, quadruple, quart, triple, tiers..., la notion de multiple. - <u>calcul mental</u> : tables d'addition et de multiplication. L'entraînement quotidien au calcul mental portant sur les quatre opérations favorise une appropriation des nombres et de leurs propriétés. - <u>calcul posé</u> : la maîtrise d'une technique opératoire pour chacune des quatre opérations est indispensable.
<u>SOCLE COMMUN</u> <u>Pallier 2</u>	<ul style="list-style-type: none"> - restituer les tables d'addition et de multiplication de 2 à 9 ; - utiliser les techniques opératoires des quatre opérations sur les nombres entiers et décimaux (pour la division, le diviseur est un nombre entier) ; - calculer mentalement en utilisant les quatre opérations ; - estimer l'ordre de grandeur d'un résultat ;

<u>PROGRESSION</u>		
CE2	CM1	CM2
<p>– Connaître et utiliser des expressions telles que : double, moitié ou demi, triple, quart d'un nombre entier.</p> <p><u>Calculer mentalement</u></p> <p>– Mémoriser et mobiliser les résultats des tables d'addition et de multiplication.</p> <p>– Calculer mentalement des sommes, des différences, des produits.</p> <p><u>Effectuer un calcul posé</u></p> <p>– Addition, soustraction et multiplication.</p> <p>– Connaître une technique opératoire de la division et la mettre en oeuvre avec un diviseur à un chiffre.</p>	<p>– La notion de multiple : reconnaître les multiples des nombres d'usage courant : 5, 10, 15, 20, 25, 50.</p> <p><u>Calculer mentalement</u> Consolider les connaissances et capacités en calcul mental sur les nombres entiers.</p> <p>– Multiplier mentalement un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1 000.</p> <p>– Estimer mentalement un ordre de grandeur du résultat.</p> <p><u>Effectuer un calcul posé</u></p> <p>– Multiplication d'un nombre décimal par un nombre entier.</p> <p>– Division euclidienne de deux entiers.</p> <p>– Division décimale de deux entiers.</p>	<p><u>Calculer mentalement</u> – Diviser un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1 000.–</p> <p><u>Effectuer un calcul posé</u></p> <p>– Addition, soustraction, multiplication de deux nombres entiers ou décimaux.</p> <p>– Division d'un nombre décimal par un nombre entier.</p>

PISTES PEDAGOGIQUES DE MISE EN APPLICATION

MULTIPLIER

CALCUL AUTOMATISE

Facteurs importants pour la mémorisation :

- la *répétition*
- la *compréhension* de ce qui est à mémoriser et l'intérêt
- il est plus facile de mémoriser un *ensemble structuré* de résultats que des résultats isolés
- *construction des résultats* par les élèves eux-même (par l'addition réitérée, ou par l'appui sur des résultats déjà connus...)

Cycle 2 : calcul du double et des moitié, connaissance de tables de 2 à 5

- *Comprendre le sens de la multiplication*, et la *propriété de commutativité*. 5 fois 6 (6+6+6+6+6) n'a pas la même signification que 6 fois 5 (5+5+5+5+5) or les deux produits sont égaux. Il est donc nécessaire d'aborder la *commutativité* comme la première propriété importante.
- *Calcul du double* : s'acquière de façon *progressive* : d'abord les nb < 10 puis nb < 50 et enfin nb < 100. Les doubles des *nb ronds* ou se terminant par 0 ou 5 constituent des *points d'appui* utiles.
- *Calcul des moitiés* : on travaille d'abord sur les nb dont le *chiffre des dizaines est pair*.

Cycle 3 : *La règle des zéros* : pour multiplier et diviser un nombre entier par 10, 100, 1000... Il faut donner du sens à la procédure qui consiste à décaler les chiffres d'un ou plusieurs rangs vers la gauche.

- Reformuler : *parler en terme de dizaine, centaine...* Par exemple, 13×10 revient à chercher le nombre que représente 13 dizaines. $340 : 10$ revient à chercher combien il y a de dizaines dans 340
- La *référence à l'écrit* constitue une aide importante : l'énoncé du résultat nécessite un sectionnement par tranches, plus facile à lire. Par exemple, $530 \times 10 = 5\ 300$

CALCUL REFLECHI

A tout cycle, l'enseignant doit insister sur la *variété des procédures* qui peuvent être utilisées, les élèves doivent pouvoir choisir la plus adaptée. L'*explication* de ces procédures et des *débats* favorisent les progrès des élèves.

Cycle 3 : Ce travail s'articule généralement sur une *décomposition des nb*, pour *dépasser les seules décompositions liées à la connaissance des tables*. Par exemple, 15×16 peut être calculé :

- en ajoutant les résultats : $15 \times 10 + 15 \times 6$ ou $10 \times 16 + 5 \times 16$
- en calculant 15×4 et en multipliant le résultat par 4
- en multipliant 16 par 30 et en divisant par 2

NOTION DE MULTIPLES

Notion à acquérir dès le cycle 3. Afin de déterminer si un nombre est un multiple d'un autre nombre, *plusieurs procédures* sont envisageables pour les élèves :

- Chercher s'il est dans la table de multiplication « prolongée » de n
- S'appuyer sur un multiple connu de n , puis avancer de n en n
- Essayer des nombres k susceptibles de faire que le produit $n \times k$ soit égal au nombre donné.
- Diviser le nombre donné par n pour vérifier si on obtient un reste nul ou non.
- Utiliser une propriété connue : par exemple pour savoir si un nombre est multiple de 2, de 5 ou de 10, il suffit de s'intéresser à son chiffre des unités.

MULTIPLICATION POSEE

Pré-requis :

- connaissance des *tables de multiplication*
- *numération décimale* pour la gestion des *retenues*
- *règle des zéros* : utilisée pour effectuer un produit dont l'un des facteurs est un multiple de 10, 100... Par exemple, $5 \times 30 \rightarrow$ on calcul d'abord $5 \times 3 = 15$, puis comme $30 = 3 \times 10$, on juxtapose à droite du résultat initial un zéro $\rightarrow 150$)
- *distributivité* de la multiplication sur l'addition. Par exemple, $27 \times 6 = 7 \times 6 + 20 \times 6 = 6 \times 27 = 6 \times 7 + 6 \times 20$

Les étapes d'apprentissage de la multiplication posée :

- Cycle 2, CE1 : multiplication d'un nombre par un nombre à un chiffre ;
- Cycle 3 : multiplication d'un nombre par un nombre du type 20, 300... ;
- Cycle 3 : multiplication de deux nombres quelconques.

Dans tous les cas, l'apprentissage des élèves est facilitée par :

- *l'écriture explicite des « 0 »* qui donne du sens à la valeur des chiffres
 1. On multiplie d'abord par les chiffre des unités
 2. On multiplie ensuite par le chiffre des dizaines, donc on ajoute un zéro
 3. On multiplie ensuite par le chiffre des centaines, donc on ajoute 2 zéros...
- par *l'écriture des produits partiels* en marge du calcul à effectuer.

$$\begin{array}{r} 523 \\ \times 205 \\ \hline 2615 \\ + 104600 \\ \hline 107215 \end{array} \quad \begin{array}{l} 523 \times 5 \\ 523 \times 200 = 523 \times 2 \text{ centaines} \end{array}$$

DIVISER

La technique usuelle française est très dépouillée (sans soustraction) et donc source de nombreuses erreurs (+ pas de trace écrite pour analyser ces erreurs). De plus, il s'agit d'un *calcul à risque* puisque le chiffre essayé au quotient n'est jamais certain (l'estimation vient en cours de calcul).

Les pré-requis pour aborder la division posée :

- maîtrise des *2 sens de la division* :
 - *la valeur de chaque part*: diviser 26 par 3 revient à partager 26 en 3 parts
 - *le nombre de parts* : diviser 26 par 3 revient à chercher combien de fois 3 est contenu dans 26.
- maîtrise des *tables de multiplication*
- capacité à *prévoir le nombre de chiffres du quotient*, par encadrement ou par partage d'une partie en dividende.

Les procédures élèves utilisées pour les problèmes de partition :

- *Procédures multiplicatives* : l'élève cherche à résoudre une équation du type $a * x = b$:
 - pose effective de la multiplication à trous : $12 \times \dots = 273$;
 - essais de multiples successifs du diviseur : $12 \times 10 = 120$; $12 \times 11 = 132$, etc. ;
 - essais par approches successives : $12 \times 30 = 360$; $12 \times 15 = 180$, etc.
- *Procédures mixtes* : l'élève utilise la multiplication et la soustraction :
 - quotients partiels « au hasard » : $12 \times 15 = 180$; $273 - 180 = 93$; $12 \times 7 = 84$; $93 - 84 = 9$; quotient : $15 + 7 = 22$, reste 9 ;
 - utilisation de multiples de 10, 100... pour les quotients partiels.
- *Utilisation de la division* : calcul de la division de 273 par 12 ou utilisation d'une calculatrice à l'élève a reconnu le modèle expert dont relève le problème posé.

Le travail doit être orienté vers la *compréhension de l'articulation des différentes étapes du calcul*.

1. division d'un nombre entier par un nombre entier à un chiffre, en encourageant :
 - l'estimation du nombre de chiffre au quotient
 - la *pose des produits annexes*
 - la *pose effective des soustractions*

→ la *vérification du résultat* en utilisant l'égalité : dividende = diviseur x quotient + reste

2. division d'un nombre entier par un nombre entier à plusieurs chiffres
3. division décimale de 2 nombres entiers
4. division décimale d'un nombre décimal par un nombre entier

$$\begin{array}{r} 7805 \\ -54 \\ \hline 240 \\ -216 \\ \hline 245 \\ -243 \\ \hline 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 27 \\ \hline 289 \end{array} \quad \begin{array}{r} 27 \\ \times 9 \\ \hline 243 \end{array} \quad \begin{array}{r} 27 \\ \times 8 \\ \hline 216 \end{array}$$

$7805 = 27 \times 289 + 2$ dividende = diviseur x quotient + reste

Remarque : seuls les *termes* de *quotient* et de *reste* sont à connaître pour les élèves (mais dividende et diviseur peuvent être utilisés).

VARIABLES DIDACTIQUES

TYPOLOGIE DES PROBLEMES

- *Problèmes de multiplication* : Je déplace un pion sur une piste graduée, par bonds réguliers de longueur 16. En partant de 0, j'ai avancé de 12 bonds. Quelle est la position d'arrivée ?
- *Problèmes de division-partition* ou de partage (recherche de la « valeur d'une part ») : Je déplace un pion sur une piste graduée, par bonds réguliers. En partant de 0 et en 12 bonds, le pion arrive à la position 192. Quelle est la valeur de chaque bond ?
- *Problèmes de division-quotition* ou de groupement (recherche du « nombre de parts ») : Je déplace un pion sur une piste graduée, en partant de 0, par bonds réguliers de longueur 12. Je suis arrivé à la position 192. En combien de bonds ?

POUR LES PROBLÈMES DE MULTIPLICATION ET DE DIVISION

- *Le type de problèmes* : et le type d'opération à effectuer (facilement identifiable ou non)
- *Les types de nombres utilisés* : les nombres décimaux posent, dans les problèmes multiplicatifs, des difficultés.

- *La taille des nombres en jeu* : elle rend possible ou non telle ou telle catégorie de procédures.
- *Les outils de calcul* disponibles ou non

POUR LES PROBLÈMES DE DIVISION

- *La valeur du quotient* : le quotient est plus ou moins facile à calculer selon qu'il est ou non composé d'un seul chiffre ou qu'il s'exprime par un nombre entier de dizaines ou de centaines...
- *L'existence ou non d'un reste non nul.*
- *Le fait que la réponse soit fournie par le quotient entier, le quotient augmenté de 1, le reste, ou le quotient et le reste* : les problèmes les plus fréquents se limitent à exiger une réponse en utilisant le quotient entier, les autres problèmes rendent plus difficile l'interprétation de tous les nombres.

DIFFICULTES ELEVES

- Comprendre le *sens de la multiplication*, et la *propriété de commutativité*. 5 fois 6 ($6+6+6+6+6$) n'a pas la même signification que 6 fois 5 ($5+5+5+5+5$) or les deux produits sont égaux. Il est donc nécessaire d'aborder la commutativité comme la première propriété importante.
- Pour la multiplication, *principe de distributivité* par rapport à l'addition
- *Distinction des signes \times et $+$* . S'appuyer sur la propriété de commutativité, comme expliqué précédemment.
- Le *terme produit* peut vouloir signifier opération (6×5) et résultat ($=30$)
- *Tables de multiplication* sont mal maîtrisées par les élèves français. Pourtant, seuls quelques domaines sont mal maîtrisés (tables de 6 à 9), donc insister dessus
- *Règle des zéro*, sens de cette procédure

Remarque :

- connaissance dans les faits : l'élève connaît explicitement des principes mathématiques
- connaissance dans les actes : l'élève utilise des propriétés mathématiques sans connaître leur nom explicite