3$^{\text{ème}}$ ___ Nom : ______________ Prénom : ________________

Chapitre 1. Les nombres entiers et rationnels
Corrigés Annales du brevet

Exercice 1 :

Un chocolatier vient de fabriquer 2 622 œufs de Pâques et 2 530 poissons en chocolat.
Il souhaite vendre des assortiments d'œufs et de poissons de façon que :

- tous les paquets aient la même composition ;
- après mise en paquet, il reste ni œufs, ni poissons.

1. Le chocolatier peut-il faire 19 paquets ? Justifier.
   $2\,530 \div 19 \approx 133{,}16$
   19 n'est pas un diviseur de 2 530, donc en faisant 19 paquets, il restera des poissons en chocolat. En conclusion, $\boxed{\text{il ne peut pas}}$ faire 19 paquets.

2. Quel est le plus grand nombre de paquets qu'il peut réaliser ? Dans ce cas, quelle sera la composition de chaque paquet ?
   Pour que tous les paquets aient la même composition et qu'il n'y ait pas de reste, le nombre de paquets doit être un diviseur de 2 622 et de 2 530. Le plus grand de ces diviseurs est le PGCD de 2 622 et de 2 530.
   On utilise l'algorithme d'Euclide :
   $$2\,622 = 2\,530 \times 1 + 92$$
   $$2\,530 = 92 \times 27 + 46$$
   $$92 = 46 \times 2 + 0$$
   Le dernier reste non nul est 46 donc le PGCD de 2 622 et de 2 530 est 46.
   Le plus grand nomnbre de paquets qu'il peut réaliser est $\boxed{46}$.
   $2\,622 \div 46 = 57$
   $2\,530 \div 46 = 55$
   Dans ce cas, la composition sera de $\boxed{\text{57 œufs}}$ et $\boxed{\text{55 poissons en chocolat}}$.

Exercice 2 :

L'entreprise « Punu Pua Toro » vend des boîtes de corned-beef.
Ces dernières sont de forme cylindrique de 12 cm de diamètre et de 5 cm de hauteur.
Elles sont rangées dans un carton de 84 cm de long, 60 cm de large et 5 cm de hauteur de façon à ce qu'elles se calent les unes contre les autres.

1. Combien de boîtes peut-on ranger au maximum dans un carton ?
   $84 \div 12 = 7$
   $60 \div 12 = 5$
   $7 \times 5 = 35$
   On peut mettre $\boxed{\text{35 boîtes}}$ dans un carton.

2. Calcule le PGCD de 84 et 60.
   En appliquant l'algorithme d'Euclide :
   $$84 = 60 \times 1 + 24$$
   $$60 = 24 \times 2 + 12$$
   $$24 = 12 \times 2 + 0$$
   Le dernier reste non nul est 12 donc le PGCD de 84 et de 60 est $\boxed{12}$.

3. L'entreprise peut-elle ranger dans ce carton des boîtes cylindriques de plus grand diamètre de façon à ce qu'elles se calent les unes contre les autres ? Justifie ta réponse.
   Le diamètre des boîtes doit être un diviseur de 84 et de 60. Le diviseur le plus grand est le PGCD de 84 et de 60, soit 12.
   L'entreprise $\boxed{\text{ne peut pas}}$ ranger des boîtes cylindriques plus grandes que 12 cm de diamètre.

Exercice 3 :

Un ouvrier dispose de plaques de métal de 110 cm de longueur et de 88 cm de largeur. Il a reçu la consigne suivante :

« **Découpe dans ces plaques des carrés tous identiques, dont les longueurs des côtés sont un nombre entier de cm, et de façon à ne pas avoir de perte.** »

1. Peut-il choisir de découper des plaques de 10 cm de côté ? Justifier votre réponse.
   Pour qu'il n'y ait pas de perte, la longueur du côté du carré, en cm, doit être un diviseur de 110 et de 88. Or 10 n'est pas un diviseur de 88 donc $\boxed{\text{il ne peut pas}}$ découper des plaques de 10 cm de côté.
2. Peut-il choisir de découper des plaques de 11 cm de côté ? Justifier votre réponse.
   11 est un diviseur de 110 et de 88 donc $\boxed{\text{il peut}}$ découper des plaques de 11 cm de côté.
3. On lui impose désormais de découper des carrés les plus grands possibles.
   a. Quelle sera la longueur du côté d'un carré ?
   La longueur du côté du carré, en cm, doit être un diviseur de 110 et de 88. Le maximum est obtenu par le PGCD de 110 et de 88.
   En appliquant l'algorithme d'Euclide :
   $110 = 88 \times 1 + 22$
   $88 = 22 \times 4 + 0$
   Le dernier reste non nul est 22 donc le PGCD de 110 et de 88 est 22.
   La longueur du côté du carré sera $\boxed{22 \text{ cm}}$.
   b. Combien y aura-t-il de carrés par plaque ?
   $88 \div 22 = 4$
   $110 \div 22 = 5$
   $4 \times 5 = 20$
   Il y aura $\boxed{20}$ carrés par plaque.

Exercice 4 :

1. Justifier sans calcul que 850 et 714 ne sont pas premiers entre eux.
   850 et 714 sont des nombres pairs, donc divisibles par 2. Donc le plus grand diviseur commun à 850 et à 714 n'est pas 1 : 850 et 714 ne sont pas premiers entre eux.
2. a. Déterminer par la méthode de votre choix, en détaillant les différentes étapes, le PGCD de 850 et 714.
   En appliquant l'algorithme d'Euclide :
   $850 = 714 \times 1 + 136$
   $714 = 136 \times 5 + 34$
   $136 = 34 \times 4 + 0$
   Le dernier reste non nul est 134 donc le PGCD de 850 et de 714 est $\boxed{34}$.
   b. En déduire la fraction irréductible égale à $\frac{850}{714}$.
   $\frac{850}{714} = \frac{850 \div 34}{714 \div 34} = \boxed{\frac{25}{21}}$

Exercice 5 :

1. Déterminer le PGCD de 260 et de 90 en détaillant les calculs intermédiaires.
   En appliquant l'algorithme d'Euclide :
   $260=90\times2+80$
   $90=80\times1+10$
   $80=10\times8+0$
   Le dernier reste non nul est 10 donc le PGCD de 260 et de 90 est $\boxed{10}$.
2. Pour réaliser un «tifaifai», (genre de couvre-lit), Tina doit découper des carrés dans un tissu de soie blanc rectangulaire de 260 cm de long sur 90 cm de large. Tout le tissu doit être utilisé. Chaque carré doit avoir le plus grand côté possible.
   a. Montrer que la longueur du côté d'un carré est 10 cm.
   Pour que tout le tissu soit utilisé, la longueur du côté du carré doit être un diviseur de 260 et de 90. Le maximum est obtenu par le PGCD de 260 et de 90, soit 10.
   Donc la longueur du côté d'un carré est $\boxed{10\text{ cm}}$.
   b. Combien de carrés pourra-t-elle obtenir ?
   $260 \div 10 = 26$
   $90 \div 10 = 9$
   Il peut y avoir 26 carrés sur la longueur et 9 carrés sur la largeur.
   $26 \times 9 = 234$
   Elle pourra obtenir $\boxed{234\text{ carrés}}$.
3.

	A	B	C	D
1	**motif**	**prix unitaire**	**quantité**	**total**
2	tiki	75	117	8 775
3	tipanier	80	117	9 360
4				
5	**Total**			

Pour obtenir le prix total des impressions des carrés, quelle formule doit-on saisir sans la cellule D5 ? Parmi les 4 formules proposées, recopier sur votre copie la bonne formule :

`D2+D3` `=SOMME(D2:D3)` `9360+8775` `=SOMME(D2:D5)`

La bonne formule est $\boxed{\texttt{=SOMME(D2:D3)}}$.

Exercice 6 :

1. Déterminer le PGCD de 120 et 144 par la méthode de votre choix.
   Faire apparaître les calculs intermédiaires.
   En appliquant l'algorithme d'Euclide :
   $144=120\times1+24$
   $120=24\times5+0$
   Le dernier reste non nul est 24 donc le PGCD de 120 et de 144 est $\boxed{24}$.
2. Un vendeur possède un stock de 120 flacons de parfum au tiare et de 144 savonnettes au monoï.
   Il veut écouler tout ce stock en confectionnant le plus grand nombre de coffrets « Souvenirs de Polynésie » de sorte que :
   – le nombre de flacons de parfum au tiare soit le même dans chaque coffret ;
   – le nombre de savonnettes au monoï soit le même dans chaque coffret ;
   – tous les flacons et savonnettes soient utilisés.
   Trouver le nombre de coffrets à préparer et la composition de chacun d'eux.
   Pour avoir le même nombre de flacons de parfum dans chaque coffret et pour que tous les flacons soient utilisés, le nombre de coffrets doit être un diviseur du nombre de flacons de parfum, soit un diviseur de 120. De même le nombre de coffrets doit être un diviseur du nombre de savonnettes. Parmi les nombres diviseurs de 120 et 144, le plus grand est le PGCD, soit 24.
   Le nombre maximal de coffrets est $\boxed{24}$.
   $120 \div 24 = 5$
   $144 \div 24 = 6$
   Chaque coffret contient $\boxed{5}$ flacons de parfum et $\boxed{6}$ savonnettes.
3. L'algorithme des soustractions successives permet de trouver le PGCD de deux entiers donnés.
   Il utilise la propriété suivante :
   « a et b étant deux entiers positifs tels que a supérieur à b, PGCD $(a\ ;\ b)$ = PGCD $(b\ ;\ a-b)$. »
   Sur un tableur, Heiarii a créé cette feuille de calcul pour trouver le PGCD de 2 277 et 1 449.

	A	B	C
1	a	b	$a-b$
2	2277	1449	828
3	1449	828	621
4	828	621	207
5	621	207	414
6	414	207	207
7	207	207	0

   a. En utilisant sa feuille de calcul, dire quel est le PGCD de 2 277 et 1 449.

Exercice 7 :

1. En précisant la méthode utilisée, calculer le PGCD de 378 et 270.
   En appliquant l'algorithme d'Euclide :
   $378 = 270 \times 1 + 108$
   $270 = 108 \times 2 + 54$
   $108 = 54 \times 2 + 0$
   Le dernier reste non nul est 54 donc le PGCD de 378 et de 270 est $\boxed{54}$.
2. Pour une kermesse, un comité des fêtes dispose de 378 billes et 270 calots.
   Il veut faire le plus grand nombre de lots identiques en utilisant toutes les billes et tous les calots.
   a. Combien de lots identiques pourra-t-il faire ?
   Le nombre de lots doit être un diviseur du nombre de billes (378) et aussi un diviseur du nombre de calots (270). Le maximum est obtenu en prenant le PGCD de 378 et de 270, soit 54.
   Il pourra faire $\boxed{54}$ lots identiques.
   b. Quelle sera la composition de chacun de ces lots ?
   $378 \div 54 = 7$; $270 \div 54 = 5$
   Chacun des lots sera composé de $\boxed{7 \text{ billes}}$ et $\boxed{5 \text{ calots}}$.

Exercice 8 :

1. Calculer les distances IJ et JK.
   $\mathrm{IJ} = 5 + 2 \times 1,25 = 7,5\,\mathrm{m} = \boxed{750\,\mathrm{cm}}$
   $\mathrm{JK} = 14 + 2 \times 1,25 = 16,5\,\mathrm{m} = \boxed{1650\,\mathrm{cm}}$
2. Pour réaliser la clôture, il souhaite utiliser un nombre entier de panneaux rectangulaires identiques, dont la longueur a est un nombre entier de centimètres, le plus grand possible.
   Expliquer pourquoi a est le PGCD de 750 et de 1650.
   La longueur a doit être diviseur de 750 et de 1650 pour avoir un nombre entier de panneaux dans la largeur et dans la longueur. Le maximum est obtenu en calculant le PGCD de 750 et de 1650.
3. Calculer la valeur de a, en indiquant la méthode utilisée.
   En appliquant l'algorithme d'Euclide :
   $1650 = 750 \times 1 + 150$
   $750 = 150 \times 5 + 0$
   Le dernier reste non nul est 150 donc le PGCD de 750 et de 1650 est $\boxed{150}$.
   $\boxed{a = 150}$
4. Combien faudra-t-il de panneaux pour clôturer la piscine ?
   $1650 \div 150 = 11$
   Il faudra 11 panneaux pour une longueur.
   $750 \div 150 = 5$
   Il faudra 5 panneaux pour une largeur.
   $2 \times (11 + 5) = 32$
   Il faudra $\boxed{32 \text{ panneaux}}$ pour clôturer la piscine.

Exercice 9 :

1. Déterminer le PGCD de 186 et 155 en expliquant la méthode utilisée (faire apparaître les calculs intermédiaires).
   En appliquant l'algorithme d'Euclide :
   $186 = 155 \times 1 + 31$
   $155 = 31 \times 5 + 0$
   Le dernier reste non nul est 31 donc le PGCD de 186 et de 155 est $\boxed{31}$.
2. Un chocolatier a fabriqué 186 pralines et 155 chocolats.
   Les colis sont constitués ainsi :

- Le nombre de pralines est le même dans chaque colis.
- Le nombre de chocolats est le même dans chaque colis.
- Tous les chocolats et toutes les pralines sont utilisés.

   a. Quel nombre maximal de colis pourra-t-il réaliser ?
   Le nombre de colis doit être un diviseur du nombre de pralines et du nombre de chocolats.
   Le maximum est atteint par le PGCD de 186 et de 155, soit 31.
   Le nombre maximal de colis est $\boxed{31}$.

   b. Combien y aura-t-il de chocolats et de pralines dans chaque colis ?
   $186 \div 31 = 6$
   $155 \div 321 = 5$
   Dans chaque colis, il y aura $\boxed{\text{6 pralines}}$ et $\boxed{\text{5 chocolats}}$.

Exercice 10 :

Pierre a gagné 84 sucettes et 147 bonbons à un jeu. Étant très généreux, et ayant surtout très peur du dentiste, il décide de les partager avec des amis. Pour ne pas faire de jaloux, chacun doit avoir le même nombre de sucettes et le même nombre de bonbons.

1. Combien de personnes au maximum pourront bénéficier de ces friandises (Pierre étant inclus dans ces personnes !) ? Expliquer votre raisonnement.
   Le nombre de sucettes et le nombre de bonbons doivent être des multiples du nombre de personnes, c'est-à-dire que le nombre de personnes doit être à la fois une diviseur du nombre de sucettes (de 84) et du nombre de bonbons (de 147).
   Le maximum est obtenu en calculant le PGCD de 84 et de 147.
   En utilisant l'algorithme d'Euclide :
   $147 = 84 \times 1 + 63$
   $84 = 63 \times 1 + 21$
   $63 = 21 \times 3 + 0$
   Le dernier reste non nul est 21 donc le PGCD de 84 et de 147 est 21.
   Le nombre maximum de personnes est $\boxed{21}$.
2. Combien de sucettes et de bonbons aura alors chaque personne ?
   $84 \div 21 = 4$
   $147 \div 21 = 7$
   Chaque personne aura alors $\boxed{\text{4 sucettes}}$ et $\boxed{\text{7 bonbons}}$.

Exercice 11 :

1. Calculer le PGCD des nombres 135 et 210.
En utilisant l'algorithme d'Euclide :
$210=135\times1+75$
$135=75\times1+60$
$75=60\times1+15$
$60=15\times4+0$
Le dernier reste non nul est 15 donc le PGCD de 135 et 210 est $\boxed{15}$.

2. Dans une salle de bains, on veut recouvrir le mur situé au dessus de la baignoire avec un nombre entier de carreaux de faïence de forme carrée dont le côté est un nombre entier de centimètres le plus grand possible.
   a. Déterminer la longueur, en cm, du côté d'un carreau, sachant que le mur mesure 210 cm de hauteur et 135 cm de longueur.
   La longueur en cm du côté d'un carreau doit diviser à la fois 210 et 135. Le nombre maximal est obtenu en prenant le PGCD de 210 et 135, soit une longueur de $\boxed{15 \text{ cm}}$.
   b. Combien faudra-t-il alors de carreaux ?
   Dans le sens de la longueur, on peut aligner $210 \div 15 = 14$ carreaux. Dans le sens de la largeur, on peut aligner $135 \div 15 = 9$ carreaux.
   $14 \times 9 = 126$
   Il faudra $\boxed{126 \text{ carreaux}}$.

Exercice 12 :

1. Calculer le PGCD des nombres 675 et 375
En utilisant l'algorithme d'Euclide :
$675=375\times1+300$
$375=300\times1+75$
$300=75\times4+0$
Le dernier reste non nul est 75 donc le PGCD des nombres 675 et 375 est $\boxed{75}$.

2. Écrire la fraction $\dfrac{675}{375}$ sous forme irréductible.
$\frac{675}{375} = \frac{675\div\text{PGCD}(675,375)}{375\div\text{PGCD}(675,375)} = \frac{675\div75}{375\div75} = \boxed{\frac{9}{5}}$

Exercice 13 :

1. Trouver le PGCD de 6 209 et 4 435 en détaillant la méthode.
   En appliquant l'algorithme d'Euclide :
   $6209 = 4435 \times 1 + 1774$
   $4435 = 1774 \times 2 + 887$
   $1774 = 887 \times 2 + 0$
   Le dernier reste non nul est 887 donc le PGCD de 6 209 et 4 435 est $\boxed{887}$.

2. En utilisant le résultat de la question précédente, expliquer pourquoi la fraction $\dfrac{4\,435}{6\,209}$ n'est pas irréductible.
   Si la fraction $\frac{4\,435}{6\,209}$ était irréductible, le PGCD de 6 209 et 4 435 serait égal à 1, or ce n'est pas le cas, donc la fraction $\frac{4\,435}{6\,209}$ n'est pas irréductible.

3. Donner la fraction irréductible égale à $\dfrac{4\,435}{6\,209}$.
   La forme irréductible est obtenue en calculant : $\dfrac{4435 \div \text{PGCD}(4435, 6209)}{6209 \div \text{PGCD}(4435, 6209)} = \dfrac{4435 \div 887}{6209 \div 887} = \boxed{\dfrac{5}{7}}$

Exercice 14 :

Un pâtissier dispose de 411 framboises et de 685 fraises. Afin de préparer des tartelettes, il désire répartir ces fruits en les utilisant tous et en obtenant le maximum de tartelettes identiques.

1. Calculer le nombre de tartelettes.
   Le nombre de framboises et le nombre de fraises doivent être des multiples du nombre de tartelettes, donc le nombre de tartelettes doit diviser à la fois le nombre de framboises et le nombre de fraises. Le maximum est obtenu en calculant le PGCD de 411 et de 685.
   En utilisant l'algorithme d'Euclide :
   $685 = 411 \times 1 + 274$
   $411 = 274 \times 1 + 137$
   $274 = 137 \times 2 + 0$
   Le dernier reste non nul est 137 donc le PGCD de 411 et de 685 est 137. Le nombre de tartelettes est $\boxed{137}$.

Exercice 15 :

1. 128 et 224 sont-ils premiers entre eux ? Expliquer pourquoi.
   128 et 224 sont tous deux divisibles par 2 et ne sont donc $\boxed{\text{pas premiers entre eux}}$.

2. Déterminer le PGCD de 288 et 224.
   En utilisant l'algorithme d'Euclide :
   $288 = 224 \times 1 + 64$
   $224 = 64 \times 3 + 32$
   $64 = 32 \times 2 + 0$
   Le dernier reste non nul est 32 donc le PGCD de 288 et 224 est $\boxed{32}$.

3. Écrire la fraction $\dfrac{224}{288}$ sous forme irréductible.
   La forme irréductible est obtenue en calculant : $\dfrac{224 \div \text{PGCD}(288, 224)}{288 \div \text{PGCD}(288, 224)} = \dfrac{224 \div 32}{288 \div 32} = \boxed{\dfrac{7}{9}}$

4. Un photographe doit réaliser une exposition en représentant ses œuvres sur des panneaux contenant chacun le même nombre de photos de paysage et le même nombre de portraits.
   Combien peut-il réaliser au maximum de panneaux en utilisant toutes les photos ?
   Combien chaque panneau contient-il de photos de paysage et de portraits ?
   Le nombre de panneaux doit diviser à la fois 224 et 288, le maximum est obtenu en calculant le PGCD de 224 et 288, soit $\boxed{\text{32 panneaux}}$.
   Chaque panneau contiendra alors $224 \div 32 = \boxed{\text{7 photos de paysages}}$ et $288 \div 32 = \boxed{\text{9 portraits}}$.

Exercice 16 :

1. Les nombres 682 et 352 sont-ils premiers entre eux ? Justifier.
   Les nombres 682 et 352 sont tous les deux divisibles par 2 donc $\boxed{\text{ils ne sont pas premiers entre eux}}$.

2. Calculer le plus grand diviseur commun (PGCD) de 682 et 352.
   En utilisant l'algorithme d'Euclide :
   $682 = 352 \times 1 + 330$
   $352 = 330 \times 1 + 22$
   $330 = 22 \times 15 + 0$
   Le dernier reste non nul est 22 donc
   $$\text{PGCD}(682; 352) = \boxed{22}$$

3. Rendre irréductible la fraction $\dfrac{682}{352}$ en indiquant clairement la méthode utilisée.
   $\frac{682}{352} = \frac{682 \div \text{PGCD}(682,352)}{352 \div \text{PGCD}(682,352)} = \frac{682 \div 22}{352 \div 22} = \boxed{\frac{31}{16}}$

Exercice 17 :

1. Calculer le PGCD des nombres 1183 et 455 en précisant la méthode utilisée.
   En utilisant l'algorithme d'Euclide :
   $1183 = 455 \times 2 + 273$
   $455 = 273 \times 1 + 182$
   $273 = 182 \times 1 + 91$
   $182 = 91 \times 2 + 0$
   Le dernier reste non nul est 91 donc
   $$\text{PGCD}(1183 ; 455) = \boxed{91}$$

2. Écrire sous la forme irréductible la fraction $\dfrac{1183}{455}$
   La forme irréductible est obtenue en calculant :
   $$\frac{1183 \div \text{PGCD}(1183, 455)}{455 \div \text{PGCD}(1183, 455)} = \frac{1183 \div 91}{455 \div 91} = \boxed{\frac{13}{5}}$$

Exercice 18 :

Dans cette partie, on pose $x = 3,5$.

1. Donner, en cm, les dimensions de la salle de travail MBCF.
   $\text{MB} = 5,5\,\text{m} = \boxed{550\,\text{cm}}$.
   $\text{BC} = 8\,\text{m} = \boxed{800\,\text{cm}}$.

2. On souhaite recouvrir le sol de la salle de travail à l'aide d'un nombre entier de dalles carrées identiques, de côté c entier le plus grand possible.
   a. Expliquer pourquoi c est le PGCD de 800 et 550.
   Le côté c de chaque dalle doit diviser à la fois 800 et 550. Le nombre le plus grand possible est donc obtenu en prenant le PGCD de 800 et 550.
   b. Calculer la valeur de c, en indiquant la méthode utilisée.
   En utilisant l'algorithme d'Euclide :
   $800 = 550 \times 1 + 250$
   $550 = 250 \times 2 + 50$
   $250 = 50 \times 5 + 0$
   Le dernier reste non nul est 50 donc $\text{PGCD}(800 ; 550) = \boxed{50}$.
   c. Combien de dalles sont nécessaires pour recouvrir le sol de la salle de travail ?
   Sur le côté de 800 cm, on peut aligner $800 \div 50 = 16$ dalles. sur le côté de 550 cm, on peut aligner $550 \div 50 = 11$ dalles.
   $16 \times 11 = 176$.
   Il faudra $\boxed{\text{176 dalles}}$ pour recouvrir le sol de la salle de travail.

3. Les dalles coûtent 13,50€ le mètre carré.
   Quelle somme devra-t-on payer pour acheter le nombre de dalles nécessaires ?
   L'aire de la pièce est $8 \times 5,5 = 44\,\text{m}^2$.
   $44 \times 13,50 = 594$
   On devra payer $\boxed{594€}$.