Le théorème de Thalès

Paul Milan

Professeurs des écoles le 29 septembre 2009

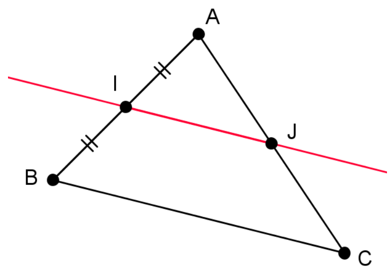
Table des matières

1 Théorème des milieux

1.1 Le théorème direct

Théorème 1 *Dans un triangle, la droite qui passe par le milieu d'un côté et qui est parallèle à un deuxième côté coupe le troisième en son milieu.*

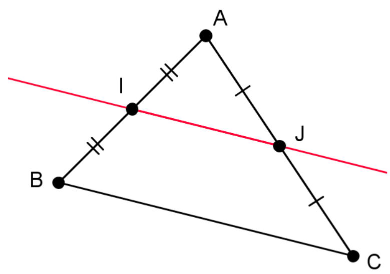
$$\text{Si} \quad I = m[AB] \quad \text{et si} \quad (IJ)//(BC) \quad \text{alors} \quad J = m[AC] \quad \text{et} \quad IJ = \frac{1}{2}BC$$



1.2 La réciproque du théorème des milieux

Théorème 2 *Dans un triangle, la droite qui passe par le milieu de deux côtés est parallèle au troisième.*

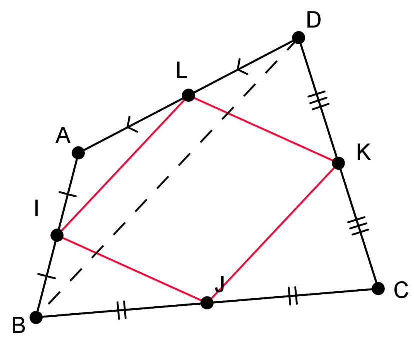
$$\text{Si} \quad I = m[AB] \quad \text{et si} \quad J = m[AC] \quad \text{alors} \quad (IJ)//(BC) \quad \text{et} \quad IJ = \frac{1}{2}BC$$



1.3 Application

Soit ABCD est quadrilatère quelconque. Soit I, J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ *et* $[DA]$. *Quelle la nature du quadrilatère IJKL ?*

Faisons d'abord une figure :



- Dans le triangle ABD, on sait que I est le milieu de $[AB]$ et L le milieu de $[AD]$, donc d'après la réciproque du théorème des milieux, on a :

$$(IL)//(BD) \quad \text{et} \quad IL = \frac{1}{2}BD \qquad \text{prop 1}$$

- Dans le triangle BDC, on sait que J est le milieu de $[BC]$ et K le milieu de $[CD]$, donc d'après la réciproque du théorème des milieux, on a :

$$(JK)//(BD) \quad \text{et} \quad JK = \frac{1}{2}BD \qquad \text{prop 2}$$

Des propriétés 1 et 2, on en déduit :

$$(IL)//(JK) \quad \text{et} \quad IL = JK$$

Donc le quadrilatère ILKL possède deux côtés parallèles de même longueur, donc IJKL est un parallèlogramme.

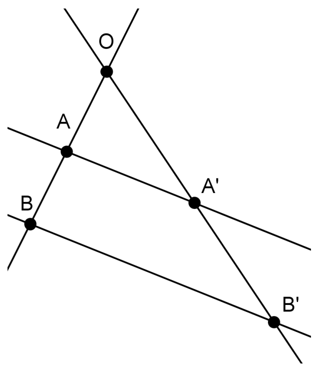
2 Le théorème de Thalès

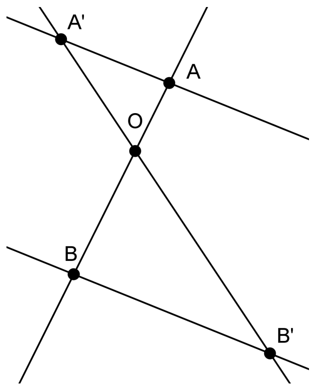
2.1 Théorème direct

Théorème 3 *: Soit deux droites (AB) et $(A'B')$ sécante en O.*

Si $\quad (AA')//(BB') \quad$ *alors, on a :* $\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{OA'}{OB'} = \dfrac{AA'}{BB'}$

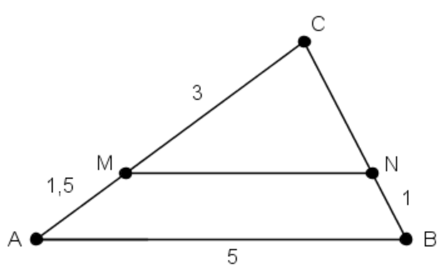
On peut avoir les deux configurations suivantes :





Exemple

Dans la figure ci-dessous, on a $(MN)//(AB)$. À l'aide des indications portées sur la figure, calculer CN et MN.



Comme $(MN)//(AB)$, nous avons une configuration de Thalès, donc

$$\frac{CM}{CA} = \frac{CN}{CB} = \frac{MN}{AB}$$

Si on pose $x = CN$, de la première égalité, on a :

$$\frac{3}{4,5} = \frac{x}{x+1}$$

On fait un produit en croix,

$$\begin{aligned} 3(x+1) &= 4,5x \\ 3x+3 &= 4,5x \\ 3x-4,5x &= -3 \\ -1,5x &= -3 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

De la seconde égalité, on a : $\dfrac{3}{4,5} = \dfrac{MN}{5}$

On fait un produit en croix,

$$MN = \frac{3 \times 5}{4,5} = \frac{15}{4,5} = \frac{10}{3}$$

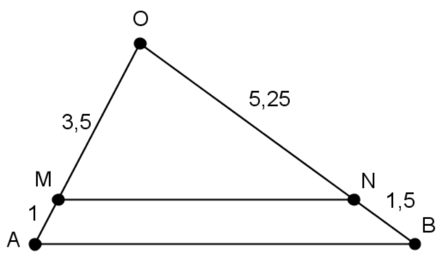
Conclusion : on a $CN = 2$ et $MN = \dfrac{10}{3}$.

2.2 Réciproque du théorème de Thalès

Théorème 4 : *Soit O, A, B d'une part et O, A', B' d'autre part alignés dans cet ordre.*

$$\textit{Si} \quad \frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} \quad \textit{alors, on a :} \quad (AA')//(BB')$$

Exemple
On donne la figure ci-dessous, montrer que (AB) et (MN) sont parallèles.



Calculons les deux rapports :

$$\frac{OM}{OA} = \frac{3,5}{4,5} = \frac{7}{9}$$

$$\frac{ON}{OB} = \frac{5,25}{6,75} = \frac{21}{27} = \frac{7}{9}$$

On a donc : $\dfrac{OM}{OA} = \dfrac{ON}{OB}$

donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (MN) et (AB) sont parallèles.