APPRENDRE LES QUATRE OPERATIONS DES LE CP ?

Réponse à Rémi Brissiaud

Première partie

Nombres concrets et commutativité de la multiplication

Michel Delord

Dans un texte proposé récemment à la discussion publique[1], « Calcul et résolution de problèmes arithmétiques : il n'y a pas de paradis pédagogique perdu »[i], Rémi Brissiaud [RB], de l'IUFM de Versailles, semblant saisi par l'urgence[2], revient notamment sur une recommandation préconisée par le GRIP présentée dans le rapport de la commission parlementaire Rolland sur l'enseignement des disciplines scientifiques dans le primaire et le secondaire pour exposer ses plus grandes réserves quant à la possibilité de « *développer l'apprentissage des techniques opératoires des quatre opérations dès le cours préparatoire* ». Il écrit : «*Il n'y a guère d'autre choix que de continuer à expliquer, de la manière la plus précise possible, pourquoi un retour à l'enseignement des quatre opérations dès le CP serait catastrophique.* »

Remarques liminaires

Avant d'aborder le sujet principal, l'apprentissage des quatre opérations dès le CP, deux brèves remarques s'imposent.

- La première est d'ordre protocolaire. Dans ses conclusions, Rémi Brissiaud appelle à «*favoriser le débat, confronter les points de vue* ». Nous nous en réjouissons, mais encore faudrait-il considérer ces *points de vue* pour ce qu'ils sont et non pour ce qu'on voudrait qu'ils soient. RB prétend critiquer les positions du GRIP en affirmant qu'elles reposent sur les « *pratiques pédagogiques de 1945* » ; or le GRIP ne s'en réclame nullement, et nombre de mes textes critiquent *explicitement* cette période comme étant marqué par de graves dérives utilitaristes[3]. De tels arrangements avec la vérité peuvent à court terme, autoriser des démonstrations plus faciles. Mais s'ils persistaient, ils risqueraient dans le proche avenir de rendre cette nécessaire discussion beaucoup plus difficile.

- La seconde est d'ordre conceptuel. RB entend légiférer en matière de mathématique, mais son point de vue est celui de la psychologie cognitive. Nous laissons ouverte la question de la pertinence *de jure* et *de facto* de l'intervention d'un psychologue en dehors de son territoire propre ; d'aucuns ne manqueront pas de la juger intempestive[4]. Ici nous avancerons sur le sol ferme des mathématiques et de l'apprentissage des mathématiques à l'école élémentaire.

---

[1] Ce texte a d'abord été adressé à Laurent Lafforgue, Jean-Pierre Demailly et Michel Delord.

[2] Nous avons pris contact par courriel avec Rémi Brissiaud il y a près de sept ans, le 20 novembre 1999, notamment à propos de l'enseignement des quatre opérations en CP. Ayant dit qu'il ne répondrait pas « *A moins que* [nous ayons] *quelque chose de très important à lui communiquer* », il a reçu des extraits de « *Calcul humain, calcul mental et calculettes : Questions pédagogiques* »[MD], dans lequel on peut lire : « *Si les nombres ont un sens, c'est par rapport aux autres nombres et ce rapport aux autres nombres est réalisé par les opérations : ceci a une conséquence immédiate : il faut apprendre les quatre opérations au fur et à mesure de l'apprentissage de la numération de 20 (ou 11) jusqu'à 100 car c'est à ce moment là que doit se mettre en place simultanément - si l'on ne veut pas produire chez les élèves une pensée aussi atomisée que celle des théoriciens de la pédagogie moderniste - et la numération et les capacités opératoires.* ». A ce jour, et sauf croisement de courriel, nous n'avons pas reçu de réponse. (Voir Annexe I)

[3] Nous faisons explicitement référence au texte cité dans la note précédente et envoyé à RB dès 1999, texte dont, non pas une phrase mais *la conclusion* était explicitement centrée sur la critique des faiblesses de la période 45-70 : « '***L'avenir le dira***' […] *Quoiqu'il en soit, et l'exemple des progressions en mathématiques suffit à le prouver, la pédagogie* classique, *bien que possédant un savoir-faire supérieur en qualité à celle des modernistes, n'a pas pu résister à la vague du décervelage structuraliste qui n'a pas commencé en 68. Pour qui veut se poser quelques vraies questions, la pierre de touche n'est donc pas la critique des modernistes mais la critique de l'impuissance des vaincus, sous peine de vouloir, au prix d'une perte d'énergie considérable, reconstruire un système qui a logiquement abouti au désastre actuel.* » (Voir Annexe I)

[4] A l'occasion de la réception du prix Abel 2005 Peter Lax répond ainsi à la question : "*Do you believe that high school and college math are poorly taught?* : *'By and large, that's correct. I would like to see the schools of education teach much more math than*

Nombres concrets - Commutativité

RB centre sa démonstration sur une question difficile, l'apprentissage de la division en CP préconisé par le GRIP et retenu par ladite commission : « *C'est l'enseignement de la division à l'école qui, dans un premier temps, servira de fil conducteur : Delord, Demailly et Lafforgue proposent que les élèves apprennent à poser des divisions par 2, 4 et 5 dès le CP. Je voudrais avant tout montrer que lorsqu'on l'analyse à la lumière des connaissances disponibles en psychologie cognitive, le retour aux pratiques pédagogiques de 1945 ne se justifie d'aucune façon*. »

En outre, RB pose une question considérable portant sur l'appropriation et la définition d'une propriété mathématique importante de la multiplication, la commutativité. Il l'expose ainsi : *« Plus généralement, l'usage de ce qu'on appelait à l'époque des 'nombres concrets' faisait obstacle à l'appropriation de plusieurs propriétés importantes des opérations, dont la commutativité de la multiplication.* » RB a tout à fait raison de remarquer que la division doit être traitée « *Plus généralement* », c'est-à-dire *en fonction de l'utilisation ou non des nombres concrets,* même s'il ne le fait pas et considère ainsi implicitement l'abandon des nombres concrets comme un acquis de 1970. Aussi, avant d'aborder la question des quatre opérations en CP et en particulier celle de la division, il importe de redonner sa juste place à l'assertion de RB selon laquelle «*l'utilisation des nombres concrets* […] *faisait obstacle à la compréhension de la commutativité de la multiplication* »[5], vieille idée qui est au fondement de la réforme des mathématiques modernes avec laquelle RB semble se solidariser[6]. Ce point est aussi fondamental par son importance théorique que par sa rémanence historique.

Enfin, nous semble-t-il, RB fonde tout son raisonnement sur une conception erronée de la commutativité en mettant exclusivement en avant la *commutativité de la multiplication*. Rétablissons la vérité. Il est vrai que *sont commutatives toutes les multiplications de nombres abstraits* (que ce soient des entiers naturels, des décimaux ou des réels) *ou les multiplications de grandeurs identiques,* pour autant que le produit ait réellement une signification. Mais *en général, ne sont pas commutatives les diverses formes de multiplication sur les nombres concrets ou les grandeurs physiques* (en tant qu'opérations de produit tensoriel sur des espaces vectoriels différents - si l'on adopte un point de vue mathématique avancé).

Rappelons que cette discussion s'inscrit dans le cadre de la controverse sur la réforme des mathématiques modernes qui a supprimé l'enseignement de toutes les opérations sur les grandeurs, y compris la multiplication et a donc de fait réduit l'apprentissage de la multiplication à celui de *la multiplication des nombres abstraits.*

Dès lors, *dans cette première partie*, il convient de traiter logiquement :

- tout d'abord la question du calcul sur les grandeurs, l'utilisation des nombres concrets, l'enseignement des prémisses de l'analyse dimensionnelle, en abordant les principales justifications du refus de leur enseignement depuis 1970. Nous évoquerons aussi l'état actuel des programmes sur ces questions fondamentales en Annexe 2 ;

---

methods of teaching and educational psychology. In mathematics, nothing takes the place of real knowledge of the subject and enthusiasm for it." Claudia Dreyfus, *A conversation with Peter Lax : From Budapest to Los Alamos, a Life in Mathematics*, *The New York Times*, 29/03/05

[5] D'autant plus que, comme il faudra traiter la question de l'algorithme *expert* de la division qui est au centre du débat et que celui-ci ne peut être abordé sans traiter la multiplication, cette réponse abordant la multiplication sera utile pour la suite.

[6] C'est une idée constante chez RB et on la retrouve par exemple dans son livre du maître de CE1 : « *Les réformateurs de 1970 ont critiqué avec raison ce choix ; en effet il fait obstacle à la compréhension de la propriété de la multiplication qu'on appelle la « commutativité » : « 7 × 8 » peut tout aussi bien se calculer en faisant « 7 fois 8 » que en faisant « 8 fois 7».* »

- ensuite, la signification réelle de la commutativité de la multiplication en tant qu'opération sur les nombres *abstraits* et sur les nombres *concrets* ;

- enfin, nous reviendrons sur un aspect particulier de la division évoqué par RB : *On remarquera d'ailleurs que le seul fait de noter « cerises » dans l'égalité, ce qui se faisait systématiquement dans les petites classes à l'époque place nécessairement l'égalité dans un contexte de partage. On ne peut pas écrire : « 21 cerises : 3 = 7 groupes de 3 cerises »*. Ceci nous amènera à mettre en évidence une sévère divergence de nature disciplinaire avec son auteur.

Pour aborder toutes ces questions, on ne part pas des *pratiques de classe* ou des manuels depuis 1945, mais des références centrales contenues dans le *Dictionnaire de pédagogie* de Ferdinand Buisson et de la tradition des penseurs et praticiens de l'instruction publique auteurs de manuels scolaires jusqu'au tournant de 1945.

Une fois le terrain théorique balisé, il sera possible de traiter correctement la question dite « des quatre opérations en CP », c'est-à-dire de poser raisonnablement
- le problème de la définition des opérations et en particulier celles de la multiplication et de la division.
- le problème de leur enseignement dans le cadre de programmes et de progressions bien définis, en répondant ainsi aux objectifs pédagogiques du GRIP.

*
* *

1) On s'attachera essentiellement à cette partie du texte de RB : « *À cette époque* [1945-1970], *la division n'était pas enseignée avant le CE2. Une telle proposition peut surprendre parce que dans la table des matières de tous les ouvrages de CE1 de l'époque, des leçons s'intitulent : « division par 2 », « division par 3 »… Mais le titre est trompeur : ce n'est pas la division qui était enseignée, c'était la recherche de la valeur d'une part lors d'un partage. Aussi bien dans la série « Le calcul vivant » que dans la série « Le calcul quotidien », au CE1, la seule signification qui était attribuée à une égalité telle que « 21 cerises : 3 = 7 cerises » était la suivante : si 21 cerises sont partagées entre 3 personnes, chacune d'elle en reçoit 7. Avant le CE2, à aucun moment, l'enseignant ne disait explicitement à ses élèves que la division sert aussi à résoudre les problèmes de groupement, c'est-à-dire que l'égalité « 21 : 3 = 7 » renvoie aussi à un scénario où les cerises sont groupées par 3 et où 7 exprime alors le nombre de groupes de 3 cerises. On remarquera d'ailleurs que le seul fait de noter « cerises » dans l'égalité, ce qui se faisait systématiquement dans les petites classes à l'époque (cf. ci-dessous) place nécessairement l'égalité dans un contexte de partage. On ne peut pas écrire : « 21 cerises : 3 = 7 groupes de 3 cerises »*. Il ajoute en note : *« Plus généralement, l'usage de ce qu'on appelait à l'époque des « nombres concrets » faisait obstacle à l'appropriation de plusieurs propriétés importantes des opérations, dont la commutativité de la multiplication. »*

* * *

2) On utilisera les références suivantes :

i) [BO70] B.O.E.N. n° 5 du 29/01/70, *Programme de mathématiques de l'enseignement élémentaire*. Le BO introduisant les mathématiques modernes en primaire
http://michel.delord.free.fr/bo70.pdf

ii) Deux articles tirés de *La mathématique à l'école élémentaire*, Paris, Supplément au bulletin APMEP n° 282, 1972, 502 pages (Noté [APMEP72]) qui présente une sorte de bilan officiel de la réforme des mathématiques modernes par l'organisation qui en a été le principal vecteur.

- [JACQ] P. Jacquemier, *Promenade au long du programme du 2 Janvier 1970 et des commentaires qui les accompagnent*, Pages 59 à 74.
- [MROB] Marguerite Robert, *Réflexions sur le programme rénové : Un nouvel état d'esprit*, Pages 15 à 58.

iii) Quatre articles ayant servi à préparer la réunion d'octobre 2003 à la SMF dont

- Trois dont le nom générique est : *Précisons nos divergences (Réponse à Roland Charnay et à la commission Joutard)*

[FER1] : *Un scoop : ce que pensait Jules Ferry de l'utilisation des calculettes* http://michel.delord.free.fr/ferry_calc1.pdf

[FER2]: *Sur les algorithmes* http://michel.delord.free.fr/ferry_calc2.pdf

[FER3]: *A propos du calcul mental* http://michel.delord.free.fr/ferry_calc3.pdf

Une présentation de ces trois articles et une brève analyse de cette réunion de la SMF se trouve aussi à : http://grip.ujf-grenoble.fr/spip/article.php3?id_article=14

- [CAPT] Michel Delord, *Michèle Artigue et l'âge du capitaine* http://michel.delord.free.fr/captain1-0.pdf

iv) [BANFF] Michel Delord, *A propos des nombres concrets et abstraits : Un témoignage historique sur l'école primaire française*, Colloque *Numeracy and Beyond*, Pacific Institute for Mathematical Studies, Banff, Canada, 4 décembre 2004. http://michel.delord.free.fr/grip-banff.pdf

v) [CALC] Michel Delord, *Calcul humain, calcul mental et calculettes : Questions pédagogiques*, écrit en 1999, mis en ligne début 2000 pour la première fois sur les sites de SLL et du SAGES. http://michel.delord.free.fr/txt1999/calc-index.html

* * *

Plan

I) Nombres concrets, nombres abstraits ou purs.

II) La commutativité : *version naïve ?*

III) La réforme de 70 : *L'abandon des « opérations sur les grandeurs » est bien la mutation fondamentale apportée par les programmes transitoires.*

IV) La commutativité : version mathématique. « La multiplication n'est pas commutative. »

Intermède : Le sens.
Résolution de problèmes ?
Difficultés et puissance de l'enseignement du calcul sur les grandeurs.
RB et la multiplication : remarques.

V) Retour à la division.

ANNEXE 1
A propos de la référence aux programmes de 45 et aux manuels des années 50.

ANNEXE 2
Où en sont les programmes ?

ANNEXE 3
Brouet et Haudricourt Frères, *Cours Moyen*, Paris, 1912. La multiplication.

ANNEXE 4
Marguerite Robert, *Réflexions sur le programme rénové : Un nouvel état d'esprit*, Chap. 5 - La multiplication dans N, 1972.

*
* *

Ce texte « *Apprendre les quatre opérations dés le CP ? Réponse à Rémi Brissiaud. Première partie : Nombres concrets et commutativité de la multiplication* » est disponible à http://michel.delord.free.fr/re1-brissiaud.pdf

I) - Nombres concrets, nombres abstraits ou purs

> ***Nombre abstrait ; nombre concret.*** - Un nombre, soit entier, soit fractionnaire, n'est pas toujours accompagné du nom de l'unité, comme quand on dit par exemple : *un, deux, trois*, ou bien *une demie, deux tiers, trois quarts*, etc., sans avoir en vue une espèce d'unité plutôt qu'une autre. Dans ce cas, le nombre est *abstrait*, c'est-à-dire séparé de la quantité â laquelle il se rapportait. Par opposition, le nombre qui est accompagné du nom de l'unité est appelé nombre *concret* (du latin *concretus*, épais, solide) ; par exemple *trois francs, cinq sixièmes de mètre*.
>
> G. Bovier-Lapierre, Article *Numération*, *Dictionnaire de pédagogie d'instruction primaire*, Hachette, 1887.
> Tome 2 de la première partie, pages 1422 à 1425.

* * *

ARITHMÉTIQUE

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

> **1**. - On appelle **quantité** tout ce qui peut être augmenté ou diminué, comme une somme d'argent, un nombre d'arbres, la hauteur d'un mur.
>
> **2**. **–** L'**unité** est une quantité connue qui sert à mesurer à évaluer toutes les quantités de la même espèce qu'elle.
> Ex. : Si l'on compte les tables de la classe, les arbres de la cour, l'unité est une **table**, un **arbre**.
>
> **3.** - Un **nombre** est le résultat obtenu en comparant une quantité à son unité.
> Il est *concret* s'il désigne l'espèce d'unité, comme 12 litres ; il est *abstrait* s'il ne désigne pas l'espèce d'unité, comme 12.
>
> Brouet et Haudricourt Frères, *Arithmétique et système métrique Cours Moyen*, Paris, 1907.

*
* *

II) - La commutativité : *version naïve ?*

Quand dit-on qu'une opération est commutative ? Lorsque, si l'on intervertit l'ordre des nombres de départ, le résultat reste le même. Ainsi l'addition et la multiplication portant sur des nombres abstraits sont commutatives puisque 8+2 = 2+8 et 2×8 = 8× 2.

Au contraire, dans ces conditions
- la soustraction n'est pas commutative : 8 - 2 = 6 mais 2 - 8 = - 6.
- la division n'est pas commutative : 8 : 2 = 4 mais 2 : 8 = 0,25.

* * *

RB prétend que « *l'usage des « nombres concrets » faisait obstacle à l'appropriation de la commutativité de la multiplication* », tout comme, P. Jacquemier écrivant, 34 ans avant « *Les Instructions de 1945 parlent en plusieurs endroits de* '*nombres concrets*'. *Cette expression, qui est proprement antinomique, car un nombre ne saurait être concret, a porté grand tort à la commutativité de la multiplication*. »

Prenons maintenant deux exemples de cours sur la multiplication correspondant aux programmes de 1923 (le deuxième en Annexe 3) qui définissent la multiplication en employant des nombres concrets et voyons en quoi ils empêchent de comprendre la commutativité de la multiplication sur les nombres abstraits.

* * *

Royer-Court, Cours Elémentaire, 1925 – Leçons 52 et 65

52*[e] *leçon

LA MULTIPLICATION

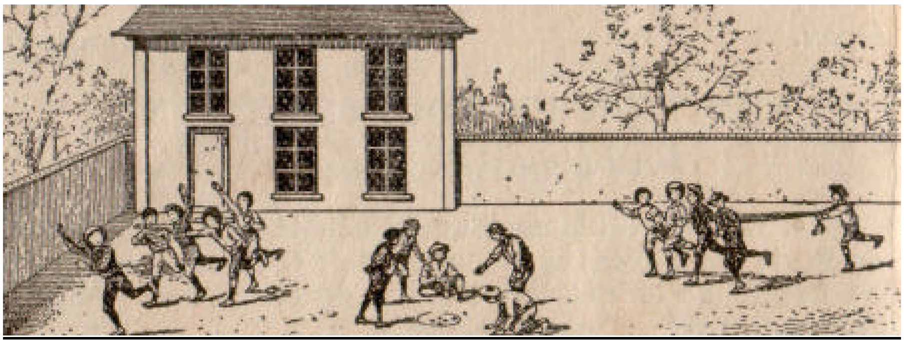


Fig. 48.- la multiplication : trois fois cinq.

100. *Problème.* – ***Les élèves qui s'amusent dans la cours sont répartis en 3 groupes. Chaque groupe compte 5 élèves. Combien y a-t-il d'élèves en tout dans la cour ?***

Les 3 groupes contiennent:
5 élèves + 5 élèves + 5 élèves = 15 élèves.
Dans cette addition de nombres égaux, le nombre 5 élèves est répété 3 fois ou, comme on dit, multiplié par 3.
On dit plus rapidement: 3 fois 5 élèves font 15 élèves, ce qu'on écrit : 5 élèves × 3 = 15 élèves.
(multiplicande × multiplicateur = produit).
Cette addition particulière est une multiplication.

101. ***La multiplication est une addition abrégée de nombres égaux.***
Le multiplicande est le nombre que l'on répète.
Le multiplicateur est le nombre de fois que l'on répète le multiplicande.
Le produit est le résultat de la multiplication[7]***.***

[…] (Technique de la multiplication)[8]

65*[e] *leçon

PREUVE DE LA MULTIPLICATION

116. Exercice d'observation.

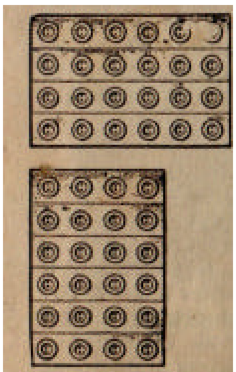


FIG. 56.

Nous pouvons disposer 24 boutons en 4 rangées de 6 boutons, soit 6 b × 4, ou encore en 6 rangées de 4 boutons, soit 4 b × 6.
On a donc 6 b × 4 = 4 b × 6 (fig.56).
La multiplication 85 × 43 donne aussi le même produit que la multiplication 43× 85.

Multiplication					Preuve			
		8	5				4	3
		4	3				8	5
	2	5	5			2	1	5
3	4	0			3	4	4	
3	6	5	5	=	3	6	5	5

117. - ***1. Un produit ne change pas quand on intervertit le multiplicande et le multiplicateur.***
2. Pour faire la preuve d'une multiplication, on intervertit le multiplicande et le multiplicateur. On doit retrouver le même résultat.

[7] Dans cet exemple de cours, et à la différence de l'exemple précédent, il n'est pas indiqué explicitement indiqué que « Le *produit* exprime toujours des unités *semblables* à celles du multiplicande », cela est contenu implicitement dans la définition donnée puisque « *On ne peut additionner que des quantités de même nature et effectue l'opération que si elles sont exprimées dans la même unité* ».

[8] Dans la technique de la multiplication, c'est-à-dire lorsque l'on pose l'opération, le multiplicande est celui qui est en haut et le multiplicateur celui qui est en bas.

* * *

On voit donc que, non seulement la commutativité - même si le terme n'est heureusement pas employé[9] - n'est pas ignorée mais que, après avoir été constatée pour la table de multiplication, elle est même *démontrée* rigoureusement par l'utilisation d'une plaque de boutons[10]. L'utilisation de la commutativité en primaire est assez réduite pour le calcul écrit. Il s'agit surtout d'en user pour faire le choix efficient du multiplicateur. Par exemple, lorsqu'on pose la multiplication 23×14857 il vaut mieux prendre 23 que 14587 comme multiplicateur.

Ce type de *démonstration* est d'ailleurs déjà recommandé dans l'article *Multiplication* du *Dictionnaire Pédagogique* de 1882 dont l'auteur est *Henri Sonnet* :

> 8. - *Le produit de deux nombres reste le même dans quelque ordre qu'on les multiplie*. Soit, par exemple, à multiplier 5 par 3, on obtiendra toutes les unités du produit, si l'on écrit 5 unités sur une même ligne, et qu'on écrive 3 de ces lignes comme l'indique le tableau ci-dessous :

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

> Mais, au lieu de compter 5 unités par ligne horizontale et de les répéter 3 fois, on peut compter 3 unités par colonne verticale et les répéter 5 fois. Ce tableau représente donc indifféremment le produit de 5 par 3, ou le produit de 3 par 5. Le raisonnement étant indépendant des nombres 5 et 3, la conclusion s'applique à deux nombres quelconques; ce qui démontre la proposition énoncée.

Les partisans des mathématiques modernes ne trouveront pas mieux, loin de là, au vu de la qualité du texte *supra*, et ce qu'ils ajouteront sera soit du verbiage soit une collection d'argumentations psychologisantes, mathématiquement fausses.

Citons en trois exemples :

<u>i) Le BO de 70</u> introduisant les mathématiques modernes indique que « *La multiplication est commutative. Les deux nombres 8 et 5* jouent le même rôle. »
:

> *4.2. Multiplication - Division exacte*
>
> *4.2. 1. La multiplication.*
>
> *Exemple:* Des objets sont disposés en lignes et colonnes de la façon suivante

```
+ + + + + + + +
+ + + + + + + +
+ + + + + + + +
+ + + + + + + +
+ + + + + + + +
```

> On peut répartir ces objets en 5 ensembles de 8 objets.

---

[9] Et c'est heureux, car au début du primaire, il n'apporte rien - si ce n'est la confusion avec *commutateur électrique* - et ne correspond pas à la véritable définition de la commutativité d'une loi de composition interne (voir infra). Il est donc préférable d'écrire : « *Dans toute multiplication, on peut intervertir l'ordre des facteurs sans changer la valeur du produit.* » ou « *Un produit ne change pas quand on intervertit le multiplicande et le multiplicateur* », phrase qui disent bien et complètement tout ce qu'elles veulent dire et sans recourir à des formules littérales du type a×b = b×a que l'élève fait au mieux semblant de comprendre. Sur ce sujet : [BANFF] notamment *f) Arithmétique et langue maternelle*

[10] Pour une démonstration correspondant à un degré plus élevé dans le cursus, lire la page consacrée à ce sujet par la médaille Fields *Timothy Gowers* : http://www.dpmms.cam.ac.uk/~wtg10/commutative.html

Le nombre des objets est (8 + 8 + 8 + 8 + 8)[11] qu'on écrit selon une convention généralement adoptée (8 × 5)
Le nombre des objets est (5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5) que l'on écrit avec la même convention (5 × 8). Ceci justifie l'égalité (8 × 5) = (5 × 8)
On peut écrire indifféremment (8 × 5) ou (5 × 8) puisque ces écritures désignent le même nombre. On l'appelle *produit* des deux nombres donnés.
La *multiplication* est l'opération qui associe à deux nombres leur produit. Aux couples (8 ; 5) et (5 ; 8) la multiplication fait correspondre le nombre 40.
(8 × 5) = (5 × 8) = 40
La multiplication est *commutative*. Les deux nombres 8 et 5 jouent le même rôle.

Arrêtons nous cependant **à** la dernière ligne, *fondamentale*, du BO « *La multiplication est commutative. Les deux nombres 8 et 5 jouent le même rôle.* »
Rappelons tout d'abord que, en particulier pour les nombres entiers abstraits en question, la commutativité de la multiplication ne signifie rien d'autre que : si l'on intervertit les deux facteurs, les résultats sont égaux. Rien de plus.

Mais, là, par juxtaposition de ces deux propositions introduisant un lien de causalité non explicite, le BO dit beaucoup plus : il induit que la signification de la commutativité de la multiplication est l'identité des rôles des deux facteurs du produit, ce qui permettra, dans la foulée, de supprimer la distinction multiplicande/multiplicateur.

Or, ***même dans le cas des nombres abstraits pour lesquels la multiplication est commutative, les deux facteurs ne jouent pas le même rôle***. Plus grave encore, il donne pour acquis ce qu'il faudrait démontrer. En effet, si l'on veut *prouver* que 5×8 = 8×5, il faut décider de la définition de 5×8 et 8×5.

Si l'on décide que 5×8 = 8+8+8+8+8, alors 8×5 = 5+5+5+5+5+5+5+5 et le calcul des deux sommes démontre bien l'égalité.
Si l'on décide que 5×8 = 5+5+5+5+5+5+5+5, alors 8×5 = 8+8+8+8+8 et le calcul des deux sommes démontre bien l'égalité.
Mais l'on ne peut pas décider sans incohérence que 5×8 = 8+8+8+8+8 et que 8×5 = 8+8+8+8+8 , du moins à partir du moment où l'on a décidé de définir la multiplication auprès des élèves comme une addition répétée.

Affirmer peu ou prou que *la multiplication est commutative* signifie que les deux facteurs du produit jouent le même rôle est donc mathématiquement faux. Les démonstrations par *Tim Gowers* de la commutativité de la multiplication signalées dans la note précédente, même si elles supposent un niveau de connaissance mathématique supérieure, sont basées exactement sur le même principe.

On conviendra qu'il est difficile de transmettre ce qu'on ne sait pas encore énoncer clairement et distinctement car, dans le meilleur des cas, l'expression « *le même rôle* » est une métaphore.

Concluons sur ce point : à la lumière de ce contre-exemple, quelles sont les qualités requises pour l'enseignement, qualités qui doivent se transmettre du maître à l'élève ?

- La rigueur intellectuelle : contrairement à ce qu'on entend souvent, ce sont les plus petits qui ont le plus besoin de la rigueur intellectuelle du maître car c'est elle qui permet aussi de comprendre la rationalité exprimée dans le langage propre de l'élève et de s'appuyer sur cette rationalité mal exprimée pour lui permettre de l'exposer avec le degré de précision que lui permet son âge. La compréhension des abus de langages - qui doivent être évités encore plus dans les petites classes -

[11] Les parenthèses que l'on trouve autour d'expressions isolées comme (8×7) n'ont aucun sens mathématique. Une parenthèse indique que le calcul entre parenthèses doit être effectué avant ceux qui sont hors de la parenthèse. Selon les auteurs du BO, elles servent à indiquer que 8×7 est… un nombre.

suppose toujours une très bonne formation disciplinaire aussi bien de la part de celui qui les transmet que de la part de celui qui les entend.

- Une formation disciplinaire, ici mathématique, sérieuse doublée d'une capacité à observer les choses les plus simples et à en rendre compte précisément.

- L'utilisation d'une langue parlée et surtout écrite exacte et précise.

ii) L'article de Pierre Jacquemier [JACQ]. Il écrit :

> « La commutativité de la multiplication n'est pas évidente chez les enfants. Ils la découvrent quand, disposant des objets en 3 rangées de 7, ils découvrent 7 rangées de 3 ; et c'est bien là l'idée la plus simple. On peut aussi leur proposer d'envisager un produit cartésien d'ensembles ; ces mots savants ne sont rien d'autre que ceci : 3 fruits distincts, une pomme, une poire, une banane, posés de toutes les façons possibles sur 7 assiettes de couleurs distinctes, à raison d'un fruit sur une assiette comme au restaurant ; en remplissant les cases d'un tableau, ils voient, là encore, 3 colonnes de 7 cases ou 7 lignes de 3 cases. »

iii) L'article de Marguerite Robert [MROB]. Nous en présentons un extrait. L'intégralité, mélange de verbiage et de positions mathématiquement fausses, est reproduite en Annexe 4.

> **5) La multiplication dans N**
>
> Traditionnellement, elle était présentée à partir des « grandeurs ». Il s'agit de trouver le prix de 6 livres à 3 F pièce, ou la longueur de tissu nécessaire pour faire 6 robes en sachant que la confection de chacune demande 3 m d'étoffe. Il faudra donc que les maîtres renoncent à cette présentation et, surtout, qu'ils abandonnent radicalement les écritures telles que
>
> 6F × 3 =18 F. ou 6m×3 =18m ou
> 3×6F=18 F ou 3×6m=18m
>
> Nous savons, en effet, que le signe « = » ne peut être placé qu'entre deux écritures d'un même naturel et non entre des «grandeurs ». Pour réformer les habitudes mentales, mieux vaut abandonner les notions de multiplicande (mesure d'une « grandeur ») et de multiplicateur (nombre de « grandeurs », nombre de « fois »).
>
> La nouvelle situation de base est celle d'une certaine disposition, par lignes et colonnes, d'une collection d'objets. Prenons, par exemple, une collection de douze objets, et disposons ces objets de la façon suivante :
>
> * * * *
> * * * *
> * * * *
>
> Nous voyons 3 lignes de 4 objets ou 4 colonnes de 3 objets. Cette disposition nous permet d'écrire le naturel douze sous la forme :
>
> 4×3 ou 3×4
>
> que nous appelons produit des naturels 4 et 3.
>
> Signalons aux maîtres que cette situation est celle qui leur permettra le mieux, plus tard, d'aborder le produit de deux naturels à partir du produit cartésien de deux ensembles. [Chapitre 5 complet en Annexe 4]

* * *

Personne n'a jamais pu constater que *« l'usage des « nombres concrets » faisait obstacle à l'appropriation de la commutativité de la multiplication* » pour la bonne raison qu'il n'y a aucune raison que le fait d'écrire 8m×7 = 56m empêche de comprendre que 8×7 = 7×8. Et ce ne sont pas les innovations introduites en 70 présentées *supra* qui ont pu améliorer l'intelligence de la commutativité puisque, fondamentalement, elle s'opposent à sa compréhension en tendant à la définir comme le fait que les deux facteurs d'un produit *jouent le même rôle*, affirmation mathématiquement très imprécise et inappropriée (même si on définit abstraitement la multiplication comme le cardinal d'un ensemble produit $E \times F$, il serait mathématiquement faux de considérer $E \times F$ *et* $F \times E$ comme des ensembles égaux, ils sont tout au plus équipotents).

*

* *

<u>III - La réforme de 70</u> : ***L'abandon des « opérations sur les grandeurs » est bien la mutation fondamentale apportée par les programmes transitoires***

On peut tout à fait faire confiance aux promoteurs des mathématiques modernes comme l'APMEP pour caractériser ce qui est le point fondamental de rupture de cette réforme. L'article *Réflexions sur le programme rénové : Un nouvel état d'esprit* écrit par *Marguerite Robert* dans « *La mathématique à l'école élémentaire* » (Numéro Spécial de 1972), l'explique très bien :

> « L'enseignement élémentaire reste donc, provisoirement, on ne peut plus traditionnel dans son contenu. L'école primaire a toujours eu pour objectif d'enseigner les 'quatre opérations'. En quoi le provisoire peut-il bien être transitoire ?[12]
>
> En fait, c'est bien là qu'est demandée aux maîtres une mutation radicale, qui exigera d'eux de grands efforts de vigilance, de surveillance d'eux-mêmes, une véritable conversion intellectuelle.
>
> ***Car les naturels ne sont plus liés à la mesure des objets du monde physique et, surtout, les opérations sur les naturels ne sont plus tirées des opérations sur les « grandeurs » du monde physique ou de l'univers quotidien telles que longueurs, poids, prix, capacités.***
>
> ***L'abandon des « opérations sur les grandeurs » est bien la mutation fondamentale apportée par les programmes transitoires, c'est lui qui transforme profondément les démarches de la pensée dans l'enseignement élémentaire. »***

Voilà la raison fondamentale pour laquelle il ne faut plus écrire 2m×3 = 6 m : le *m* signifie *mètre* qui entretient des rapports trop étroits avec les *« objets du monde physique »*. Les diverses affirmations mathématiquement fausses, les arguties variées basées sur le fait jamais prouvé que cette écriture empêcherait de comprendre que 2×3=3×2 n'ont pas d'autre origine.

Mais, pour paraître sérieux, il fallait bien donner des justifications d'apparence *purement mathématiques* à la chose. Nous en avons plusieurs et la plus sérieuse est celle qui figure dans le BO de 70 : «*Il est essentiel de comprendre que l'addition, la multiplication ne portent que sur des nombres*. »

2Fr + 3Fr n'est donc pas une opération dont le résultat serait «5 Fr », autant dire que, d'un trait de plume, l'APMEP paralysa le commerce mondial. En utilisant la profonde stupidité mathématique de Marguerite Robert citée plus haut «*Nous savons, en effet, que le signe '=' ne peut être placé qu'entre deux écritures d'un même naturel et non entre des 'grandeurs'*», il sera même interdit d'écrire 1 m = 100 cm. C'est bien ce qui est écrit quelques lignes plus bas : « *Les phrases telles que : 8 pommes + 7 pommes = 15 pommes n'appartiennent en fait, ni au langage mathématique, ni au langage usuel.* » En France, ces formulations immédiatement compréhensibles par les marchands d'étoffe comme les maçons, les marchandes des quatre-saisons comme les poissonniers… devenaient hiéroglyphiques aux professeurs de mathématiques. En écrivant ses

---

[12] Les programmes du BO de 70 ne se présentent pas comme des programmes de mathématiques modernes mais comme des programmes de transition vers les mathématiques modernes.

« *Réflexions sur le programme rénové* » MR voyait s'installer « *Un nouvel état d'esprit* », il serait plus juste d'évoquer l'instauration d'un nouvel état de l'esprit, soit un esprit dans tous ses états.

Et pourtant, dès 1968, soit deux ans avant la publication du B.O., quatre ans avant le commentaire de l'APMEP, dans une des plus prestigieuses revues mathématiques mondiales[ii], le grand géomètre *Hassler Whitney* publiait un article qui donne un cadre mathématique axiomatique au calcul sur les grandeurs dans la perspective même des «mathématiques modernes »[13]. Il y déclare notamment – et démontre en donnant une structure mathématique sous-jacente (nommée *rays* et *birays*) – qu'il est tout à fait *mathématique* d'écrire :

5 cakes + 2 cakes = (5+2) cakes = 7 cakes
or
2 yd = 2 (3 ft) = 6 ft

Le contexte de l'introduction montre qu'il vise explicitement les faux mathématiciens de la didactique des mathématiques modernes en dénonçant notamment, au vu de l'interdiction d'écriture de 2m = 200cm, l'absurdité des obligations langagières du type « *Complétez : 2 cm ont même longueur que … mm ; 80 mm ont même longueur que … cm.* »[iii] puisqu'il est dit explicitement : "*The fact that "2 yd" and "6 ft" name the same element of the model enables us to say they are equal; there is no need for such mysterious phrases as "2 yd measures the same as 6 ft."* "

Un autre facteur a joué un rôle important à cette époque. Selon la conception des mathématiques dite axiomatique et structurelle présente dans la charte de Chambéry, on ne peut introduire une notion qu'en en donnant complètement la structure mathématique adéquate sous jacente, présentée de plus sous un angle axiomatique[14]. (Cf. [BANFF], *Le calcul numérique : de l'arithmétique aux axiomes de corps*)

Dans cette perspective, écrire 2 m + 3 m = 5 m en CP ou en CE, supposait d'enseigner préalablement dans ces classes la notion de polynôme ou d'espace vectoriel (Il existe une forte *ressemblance*[15] avec $2\ x + 3\ x = 5\ x$). Mais considérant qu'il était impossible d'enseigner les espaces vectoriels ou les polynômes en CP - ce qui est tout à fait vrai -, on n'enseigna plus du tout 2 m + 3 m = 5 m. Mais croyant supprimer seulement l'écriture 2 m + 3 m = 5 m - au prétexte que *ce n'était pas une écriture mathématique* -, on supprima la liaison entre le calcul et le système métrique, c'est-à-dire le calcul sur les grandeurs. Pendant ce temps, les astrophysiciens continuaient inlassablement leurs mesures du ciel en milliers, millions d'années-lumières[16]…

---

[13] Les partisans des maths modernes définiront, dans la Charte de Chambéry en janvier 1968, leur conception comme « *la conception constructive,* ***axiomatique, structurelle*** *des mathématiques* » *in* http://michel.delord.free.fr/chambery.pdf

[14] On peut dire qu'il s'agit de l'ancêtre de la conception présente dans le texte de RB cité au début qui explique que l'on n'enseignait pas la division en CP parce que son enseignement n'est que partiel : «*Ce n'est pas la division qui était enseignée, c'était la recherche de la valeur d'une part lors d'un partage.* »

[15] Nous écrivons *ressemblance* car on voit bien que les *structures,* à la fois enseignables avant l'université et entrant dans les connaissances des formateurs qui avaient en général une maîtrise aussi limitée des mathématiques modernes que celle de MR, correspondant par exemple aux polynômes « n'allaient pas bien » ni en termes de fonctions polynômes puisque dans 2 *m*, *m* n'est pas une variable, ni en terme de polynôme formel puisque m^2 + m n'a pas grand sens physique. Il en est de même pour la structure d'espace vectoriel qui, si elle peut correspondre à 2m + 3m ne convient plus pour m^2 + m ou 2m × 3m = $6m^2$.

[16] Et l'un des pires effets de ce type de justification de la réforme par des considérations aussi pompeuses que creuses improprement nommés mathématiques a été d'intimider les instituteurs et de leur faire croire qu'il était impossible de penser mathématiquement leur cours de calcul. Puisqu'ils ne pensaient plus les difficultés de leur cours à partir du contenu de la matière organisé en progression, on les convia à les penser à partir de la psychologie et de la sociologie. Et plus ils faisaient de psychologie, moins ils faisaient de mathématiques ; et moins ils faisaient de mathématiques, plus ils faisaient de psychologie.

Pour conclure, nous en appelerons au témoignage de *Simon Sommerville Laurie* (1829-1909) titulaire d'une chaire d'éducation à l'université d'Edimbourg qui écrit dans *Primary Instruction in Relation to Education* (1867) : «*Un maître dont l'intelligence est cultivée, et dont la volonté est fortifiée par l'expérience, par la raison, par la religion, peut être en état de produire chez les autres les qualités qu'il possède lui-même, et d'adapter inconsciemment les procédés qu'il emploie à une méthode exacte*.» (Cité par Gabriel Compayré *in Cours de pédagogie théorique et pratique*[iv])

*
* *

<u>IV - La commutativité : version mathématique.</u> « La multiplication n'est pas commutative »

Lorsqu'on a défini une loi de composition notée « * » sur ***un*** ensemble E, les deux éléments de départ étant donc dans le même ensemble, on dit que celle loi est commutative si, pour tout couple (a, b) de E×E, on a a*b=b*a. Et on ne peut parler, au sens strict, de commutativité non seulement lorsque « les résultats sont égaux » mais si, également, les deux ensembles de départ sont identiques. On peut dire, sans être exhaustif, que les multiplications du type $2m \times 3 = 6m$, $2m^2 \times 3m = 6m^3$, ne sont pas commutatives. Et donc que l'affirmation « la multiplication des nombres concrets est commutative » est fausse. Mais, de toutes les façons, on ne trouve nulle part, dans les années 70, une discussion rigoureuse sur cette question dans les ouvrages consacrés à l'enseignement primaire ou secondaire.

* * *

Intermède : Le sens.

RB reprend l'héritage des réformateurs de 70. Voyons comme Pierre Jacquemier traitait les défenseurs des nombres concrets : « Les tenants des 'nombres concrets' protesteront : l'ensemble des deux mains contient 5 doigts × 2 = 10 doigts. Il faudra qu'ils acceptent qu'il contient aussi bien 2 doigts × 5 (2 pouces, 2 index, etc.) ; que 3 sacs de 7 oranges contiennent 7 oranges × 3 ou aussi bien 3 oranges × 7 (3 oranges que j'ai placées dans les sacs à raison d'une par sac, puis 3 autres, etc., et ceci 7 fois). Ils en contiennent 3× 7, ou 7×3, ou 21. »

Et si l'on s'intéresse au *sens*, au sens de ceux qui disent que le sens vient exclusivement du caractère concret de mathématiques appliquées, il faudra que les tenants de la commutativité de la multiplication qui donnent raison aux réformateurs de 70 (car la multiplication sur les décimaux est commutative), acceptent de nous montrer l'équivalence entre l'expression 12,57€ × 8 représentant le prix de 8 livres à 12,57€ l'un et l'expression 8€ × 12,57 représentant … ?
Le prix de 12,57 livres, chacun coûtant 8€ ?
Ou le prix de 24 verres, chacun coûtant 4,19€, comme ce matin au supermarché ?

* * *

Résolution de problèmes ?

En supprimant le calcul sur les grandeurs, l'enseignement a perdu ce que l'on peut appeler les bases du calcul dimensionnel. A un niveau élémentaire, le maître pouvait dire « *On n'ajoute pas des vaches et des cochons* » ou *« On n'ajoute pas des torchons et des serviettes* ». Et l'élève ne pouvait donner comme opération répondant au problème : « Quel est le prix de 8 livres à 12,57€ ? » ni 8 + 12,57 ni 8 livres + 12,57€ puisque, ce faisant, il ajoutait des quantités qui n'étaient pas de même nature, la question de l'écriture de l'opération (avec ou sans unités) étant secondaire puisque le raisonnement dimensionnel peut être fait sans l'écriture des unités.

Et il en est ainsi pour toutes les opérations. Or, si résoudre un problème d'arithmétique est savoir retrouver la chaîne logique des opérations permettant de parvenir au résultat escompté à partir des données du problème, il est bien évident que le calcul dimensionnel sur chaque opération pour voir si elle répond de ce point de vue au résultat recherché est une aide précieuse. A cet égard, quel reproche peut être adressé à ceux qui, en abolissant la distinction multiplicande/multiplicateur, ont mis en avant de manière unilatérale la commutativité de la multiplication ?

Le rabâchage de l'idée, certes juste, mais assez simpliste - *Le résultat de 3€×5 (prix de 5 cahiers à 3€) est le même que celui de 5€×3 (prix de 3 cahiers à 5 €)* - a introduit subrepticement une autre idée, *fausse celle-là*, d'une symétrie et même d'une identification des fonctions des deux facteurs du produit dans la compréhension de la multiplication, symétrie et identification facilitées par la non écriture des unités.

Pourtant, il importe que l'élève distingue les fonctions différentes et spécifiques du multiplicande et du multiplicateur. Par exemple, si les problèmes suivants sont posés, il doit pouvoir distinguer deux situations absolument indépendantes à moins de croire à la numérologie[17] :

- soit, problème 1 : *Calculer le prix de 5 cahiers à 3 € l'un,*
- soit, problème 2 : *Calculer le prix de 3 cahiers à 5 € l'un.*

Ce qui lui permet d'écrire

- que la solution du problème 1 est donnée par : 3€ × 5
- que la solution du problème 2 est donnée par : 5€ × 3

Et il importe d'entraîner l'élève à faire cette distinction dans des exercices adaptés que l'on nommait avant 1945 *Exercices d'intelligence*. Ils existaient pour tous les types de leçon et pas seulement pour la multiplication. Ils tendent à disparaître après 1945 puisque la définition de la multiplication disparaît progressivement des manuels.

Difficultés et puissance de l'enseignement du calcul sur les grandeurs.

Sans vouloir être exhaustif, on signalera simplement deux difficultés et problèmes liés à cette démarche :

1) A propos de la multiplication absolument inutile d'exercices tatillons et alambiqués sur les grandeurs, Lebesgue qui parlait, de la « *grandeur* de son étonnement ». Sont à proscrire :

i) les domaines où *il y a des nombres* et où l'arithmétique *ne s'applique pas* : si l'on *ajoute* **3** liquides miscibles, on trouve **1** liquide ;

ii) les discussions oiseuses sur le fait de savoir si 2 chevaux + 3 ânes est égal à *5* animaux, 5 mammifères ou 5 formes dont le volume est inférieur à celui de la planète Jupiter. En effet, *l'objet essentiel du calcul sur les grandeurs à l'école primaire est le système métrique.*

2) Si on se limite à l'addition – mais on peut faire la même remarque pour les autres opérations – il est possible d'améliorer les formulations autrefois employées citées *supra* et de

[17] Pour une critique plus détaillée des positions de RB sur l'enseignement de la multiplication, consulter les parties « *Multiplicateur et multiplicande : des notions inutiles voire nuisibles ?* » et « *Commutativité et associativité* » respectivement aux pages 28-34 et 35-40 du texte d'octobre 2003 « *Michèle Artigue et l'âge du capitaine* » [CAPT].

dire, dès que l'élève peut en saisir la subtilité, « *On ne peut additionner - ou soustraire - que des quantités de même nature et n'effectuer l'opération que si elles sont exprimées dans la même unité* » ; en effet 3kg + 2m n'a pas de sens, 3m + 2dm a du sens puisqu'il s'agit de l'addition de deux longueurs mais on ne peut effectuer directement la somme 3+2 pour trouver la somme 3m+2dm : elle se calcule en ajoutant les nombres abstraits 30 et 2 comme résultat, en dm, de 30dm + 2dm. Cette règle sert aussi bien pour la résolution de problèmes que comme justification de l'alignement des chiffres en colonnes dans les opérations posées[18]. On ne s'étendra pas ici sur les formulations autrefois employées à propos des autres opérations.

* * *

RB et la multiplication : remarques.

Le raisonnement en terme d'analyse dimensionnelle peut se faire en écrivant les unités dans les opérations ou non comme le montre l'exemple *supra* et il faut distinguer très précisément l'enseignement des débuts de l'analyse dimensionnelle, le calcul sur les grandeurs et l'écriture des unités dans les opérations même si ces trois domaines sont liés.
Dans la présentation de la multiplication du livre du maître de CE1[19], RB écrit :

> **La multiplication avant et après 1970**
>
> **Avant 1970**
>
> Jusqu'en 1970, la multiplication est introduite comme addition répétée et une écriture telle que «7 × 8» devait nécessairement se lire «8 fois 7». Rappelons la raison de cette prescription : à l'époque, on pensait qu'il fallait longtemps spécifier les *unités* dans les égalités. C'est seulement dans un deuxième temps que les enfants pouvaient rencontrer ces mêmes égalités sous leur forme *abstraite*, sans unités. Ainsi, pour rendre compte du problème suivant : *«Des objets valent 7 F l'un. Quel est le prix de 8 de ces objets ? »*, on écrivait «7 F × 8 = ...» et pour aider les enfants à traduire la situation concrète en une écriture, on leur imposait un protocole de traduction : on écrit en premier le nombre qui indique la nature de l'unité, et en second celui qui indique le « nombre de fois ».

Il faudrait plusieurs pages pour démêler l'imbroglio des huit lignes écrites ci-dessus.

Disons simplement :

1) Il est faux d'affirmer que «*C'est seulement dans un deuxième temps que les enfants pouvaient rencontrer ces mêmes égalités sous leur forme* abstraite, *sans unités.*» Voici deux exemples qui montrent le contraire de ce qui est affirmé, c'est-à-dire des exemples d'écriture des opérations sur les nombres sans unités avant même celles des opérations avec unités

- le manuel de *Lemoine* de CE (page 1 et 2) dans lequel, dés les premières leçons (et avant l'écriture avec les unités), on trouve 1 + 2 + 2 = 5, 2 × 2 + 1 = 5, 5 – 3 = … , 3 × 2 = … , 6 : 2 = …

- le manuel *J'apprends les nombres* de CP de E. Crépin et L. Blanquet, édition conforme aux programmes de 1945 dans lequel, dès la troisième semaine, on trouve 3 + 2 = 5, 5 – 1 = 4, 1 + … = 5, 5 - … = 3, etc.[v]

[18] A condition de considérer les ordres de chaque classe comme des grandeurs et non strictement comme des nombres abstraits, ce qui permet de comprendre le lien entre le calcul des opérations posées et le calcul mental. Car, comme l'exprime un exposé d'un inspecteur général au début du siècle : « *Le calcul mental opère simplement sur les nombres ; le calcul écrit, au contraire, opère sur les chiffres, sans tenir compte des nombres, excepté pour le résultat final* ».

[19] Rémi Brissiaud, Pierre Clerc, André Ouzoulias, *J'apprends les maths CE1, Livre du maître*, Edition Retz – Nathan diffusion - Dépôt légal : octobre 2000. Chapitre 4. La multiplication.

Il s'agit en fait de la norme et nous pourrions multiplier les exemples dans lesquels il y a utilisation simultanée des deux écritures puisque, dans la mesure par exemple où

- les élèves apprenaient les tables d'addition et au moins deux tables de multiplication dès le CP et toutes les tables de multiplication dès le CE1 (IO de 45),
- les leçons sur le sens de l'opération (voir les exemples supra 2 et 3) précédaient immédiatement les leçons sur la « technique de l'opération », il est bien évident que l'on écrivait des opérations « sans unités ».

De plus, la notation 3F × 2 n'est pas universelle et l'on trouve aussi la suivante : 1F × 3 × 2.

2) L'affirmation de RB selon laquelle « *C'est seulement dans un deuxième temps que les enfants pouvaient rencontrer ces mêmes égalités sous leur forme « abstraite », sans unités* » est probablement une allusion indirecte aux effets, dans de nombreux manuels, de la phrase des IO de 1945 **:** « *L'acquisition de la notion de nombres entiers, concrets et de leur usage suppose naturellement des leçons de choses diverses, répétées, et néanmoins assez méthodiques. Au cours moyen seulement, on rencontrera des exemples de nombres abstraits et indépendants des unités dans l'étude des pourcentages et des fractions simples.* »

RB semble oublier qu'après 45 les élèves ont continué à apprendre les tables de multiplication qui présentent des nombres abstraits ! Plus grave encore, RB fait l'impasse sur la tendance utilitariste qui grève les programmes de 45, plombés de l'influence des programmes *anti-encyclopédistes et anti-théoriques* promus sous Pétain[20]. A partir de ce moment, il devient de fait impossible de donner une définition de la multiplication comme addition répétée, puisqu'elle ne permet pas de désigner le multiplicateur comme nombre abstrait (nombre de fois). Et c'est bien ce que l'on retrouvera chez certains auteurs de manuels des années 50 qui n'enseignent plus de définition explicite de la multiplication comme celle figurant dans le *Royer et Court*. Ils réduiront son enseignement à des procédures et à des mécanismes qui seront d'autant plus tentants pour les enseignants « *qu'ils* marchent *dans la résolution de problèmes* ». On comprend pourquoi RB contient sa démonstration dans un cadre historique si étroit [45-70][21]. Cela lui permet d'esquiver la discussion et d'éviter de se confronter à la qualité des programmes précédents.

3) Surtout cette présentation réduit la complexité[22] de la définition de la multiplication comme opération sur les grandeurs et comme introduction aux bases de l'analyse dimensionnelle à une question formelle d'écriture : elle se situe bien dans le cadre de la problématique des mathématiques modernes qui justifiait la non-écriture des opérations avec unités au prétexte qu'il ne s'agissait pas d'une *écriture mathématique* ou dans celle qu'évoque le titre même d'un des articles de référence sur le sujet par l'APMEP, l'article de Rémi Duvert intitulé « Faut-il mettre les unités dans les calculs ? »[vi]

---

[20] Dans son discours *L'éducation nationale* paru en 1941, Philippe Pétain s'exprime ainsi : « *[L'école primaire] continuera comme par le passé, cela va sans dire, à enseigner le français, les éléments des mathématiques, de l'histoire, de la géographie, mais selon des programmes simplifiés, dépouillés du caractère encyclopédique et théorique qui les détournait de leur objet véritable.* » http://michel.delord.free.fr/pp-ecole.pdf

[21] La scolastique utilitariste découlant des IO de 45 a servi, en réaction, à justifier la fausse abstraction des mathématiques modernes, scolastique certes pire que la première mais qui ne doit pas servir à en nier l'existence. Jean Dieudonné, un des leaders des mathématiques modernes, s'exprime ainsi en 1974 : « *Beaucoup de mathématiciens et de scientifiques sont véritablement atterrés lorsqu'ils voient que l'ancienne scolastique, qu'ils avaient acceptée comme un fait inéluctable et qu'ils avaient appris à tolérer, était remplacée par une forme encore plus agressive et stupide placée sous la bannière du 'modernisme'.* » Jean A. Dieudonné, « Devons-nous enseigner les 'mathématiques modernes' ? », Bulletin de l'APMEP n° 292, Février 1974.

[22] Il s'agit bien évidemment d'une question complexe et l'allégement proposé par les mathématiques modernes réduisant tout aux opérations sur les nombres abstraits est bien un allègement des programmes mais surtout *un allégement de sens*. On ne dit pas « suppression du sens » car la manipulation des nombres abstraits, et en particulier la maîtrise des algorithmes « classiques » des quatre opérations ne sont pas des activités purement « mécaniques et privées de sens ».

*
* *

V) - Retour à la division

Cette présentation de la multiplication comme opération sur les grandeurs n'est pas inutile car elle permet de répondre à une affirmation mathématique fausse sur la division.

Reprenons en effet la proposition initiale de RB : « *La seule signification qui était attribuée à une égalité telle que « 21 cerises : 3 = 7 cerises » était la suivante : si 21 cerises sont partagées entre 3 personnes, chacune d'elle en reçoit 7. Avant le CE2, à aucun moment, l'enseignant ne disait explicitement à ses élèves que la division sert aussi à résoudre les problèmes de groupement, c'est-à-dire que l'égalité « 21 : 3 = 7 » renvoie aussi à un scénario où les cerises sont groupées par 3 et où 7 exprime alors le nombre de groupes de 3 cerises. On remarquera d'ailleurs que le seul fait de noter « cerises » dans l'égalité, ce qui se faisait systématiquement dans les petites classes à l'époque (cf. ci-dessous) place nécessairement l'égalité dans un contexte de partage. On ne peut pas écrire : « 21 cerises : 3 = 7 groupes de 3 cerises* »

Que signifie l'expression, aussi vraie aujourd'hui qu'en 1950 : « *Le seul fait de noter «cerises » dans l'égalité… place* ***nécessairement*** *l'égalité dans un contexte de partage* [et pas de groupement. MD]. *On ne peut pas écrire : « 21 cerises : 3 = 7 groupes de 3 cerises »* ? Passons sur le sempiternel « *On ne peut pas écrire* », ordre du mufti, et reprenons la question à partir de la multiplication[23].

Reprenons la situation initiale I donnée par RB : « 21 cerises : 3 = 7 cerises ». Elle décrit la répartition de 21 cerises en 3 groupes de 7 cerises. On a donc 7 cerises × 3 = 21 cerises dans laquelle le multiplicande *7 cerises* représente la quantité qui se répète et le multiplicateur 3 représente le nombre de répétitions du multiplicande. On peut en inférer deux problèmes :

> i) On partage 21 cerises en 3 parts égales. Quelle est la taille d'une part ?
> La réponse est donnée par 21 cerises : 3 = 7 cerises
>
> ii) On partage 21 cerises en parts égales de 7 cerises. Combien a-t-on de parts ?
> La réponse est donnée par 21 cerises : 7 cerises = 3 [24]

Prenons maintenant une autre situation initiale II qui décrit la répartition de 21 cerises en 7 groupes de 3 cerises. Elle se traduit par 3 cerises × 7 = 21 cerises dans laquelle le multiplicande *3 cerises* représente la quantité qui se répète et le multiplicateur 7 représente le nombre de répétitions du multiplicande. On peut en inférer deux problèmes

> i) On partage 21 cerises en 7 parts égales. Quelle est la taille d'une part ?
> La réponse est donnée par 21 cerises : 7 = 3 cerises
>
> ii) On partage 21 cerises en parts égales de 3 cerises. Combien a-t-on de parts ?
> La réponse est donnée par 21 cerises : 3 cerises = 7

---

[23] Il s'agit ici d'un texte critique : nous n'affirmons pas ici qu'il faut enseigner la division à partir de la multiplication, c'est-à-dire comme opération inverse de cette dernière.

[24] Remarquons la parfaite logique « algébrique » qui, *tout en n'étant pas à enseigner en primaire*, surtout pas comme point de départ des multiplications portant sur les produits de longueurs ou de longueurs et d'aires
- dans la situation I, à $7\boldsymbol{u} \times 3 = 21\boldsymbol{u}$ fait correspondre $21\boldsymbol{u} : 3 = 7\boldsymbol{u}$ et $21\boldsymbol{u} : 7\boldsymbol{u} = 3$.
- dans la situation II, à $3\boldsymbol{u} \times 7 = 21\boldsymbol{u}$ fait correspondre $21\boldsymbol{u} : 7 = 3\boldsymbol{u}$ et $21\boldsymbol{u} : 3\boldsymbol{u} = 7$.

Donc, contrairement à ce qu'affirme RB, le fait de « *noter les unités dans la division* » n'interdit nullement de se trouver dans un « *contexte de regroupement* », c'est-à-dire de calculer le nombre de parts[25].

Lorsque RB écrit « On ne peut pas écrire : « *21 cerises : 3 = 7 groupes de 3 cerises* », il a raison, mais non pas au sens où il l'entend, mais parce qu'il écrit une expression physiquement non homogène[26] et tous les physiciens savent qu'« *une expression non homogène est nécessairement fausse* »[27]. Il ne le fait pas par faute d'inattention - ce qui serait déjà ennuyeux - mais parce qu'il a besoin de cette formule fausse pour arriver à son but qui est d'interdire la définition de la division comme opération sur les grandeurs.

Ce faisant

- il fait correspondre à ce calcul ***mal écrit*** la situation initiale II écrite sous la forme ii),

- il explique qu'il ne peut identifier cette écriture à la situation I écrite sous la forme i).

La raison n'est est pas, comme on vient de le voir, que l'écriture des unités dans la division ne permet pas de décrire « un contexte de partage », mais que RB assimile les situations I et II, qui n'ont rien à voir l'une avec l'autre, sinon que 3 × 7 = 7 × 3 (car la multiplication des nombres purs est commutative) et c'est bien cette insistance et cette focalisation sur une incompréhension de la commutativité de la multiplication qui l'amène à identifier deux situations non identifiables sinon en numérologie.

Cela dit, il conviendra d'analyser l'affirmation de RB « *les deux points et la potence sont des symboles de l'équivalence entre le partage et le groupement* », thèse fausse liée bien entendue à la thèse tout aussi fausse selon laquelle c'est la commutativité de la multiplication « *qui fonde celle-ci comme opération arithmétique* » (*Livre du maître* de CE2 déjà cité). Alors, il deviendra possible de poser le problème de la définition des opérations et en particulier celles de la multiplication et de la division ainsi que celui du rôle et de la nature l'apprentissage de leurs algorithmes.

Cabanac, le 3 juillet 2006

Michel Delord

Professeur certifié de mathématiques
CA et *Commission enseignement* de la Société Mathématique de France
Texte relu par Jean-Pierre Demailly

[25] C'est-à-dire, dans un langage plus précis, pas seulement d'observation passive d'une situation mais de pédagogie active visant la résolution effective de problèmes.

[26] Non homogène car il devrait écrire *21 cerises : 3* ***cerises*** *= 7 groupes de 3 cerises* ou plus exactement *21 cerises : 3* ***cerises*** *= 7*. Lorsqu'on divise deux quantités de même dimension, on trouve une quantité sans dimension (*Id est* un nombre pur) car algébriquement $21\mathbf{u} : 3\mathbf{u} = 7$.

[27] Lire pour cela, par exemple : Eddie Saudrais, *Introduction à l'analyse dimensionnelle*,
http://www.logique.jussieu.fr/www.chalons/adimphy.pdf

ANNEXE 1 -

A propos de la référence aux programmes de 45 et aux manuels des années 50

Dans son texte, RB fait exclusivement référence à des manuels correspondant aux programmes et IO de 1945, ce qui annule toute la pertinence critique de sa démonstration puisque le GRIP ne se réclame nulle part explicitement des programmes de 1945.

a) Le 31/06/2006, lors de l'audition devant la commission Rolland[28], je déclarais : « *Il n'y a plus d'enseignement des définitions des opérations depuis les années 50 : aucune définition des opérations ne figure plus ni dans les programmes ni dans les documents d'accompagnement.* »

Outre l'état d'esprit utilitariste général qui anime ces IO, et sans évoquer les nombreux autres points critiquables qui tendent tous à réduire l'apprentissage à des procédures, ces IO mettent en évidence un point très précis de désaccord : « *L'acquisition de la notion de nombres entiers, concrets et de leur usage suppose naturellement des leçons de choses diverses, répétées, et néanmoins assez méthodiques. Au cours moyen seulement, on rencontrera des exemples de nombres abstraits et indépendants des unités dans l'étude des pourcentages et des fractions simples.* »

Cette position interdit de donner une définition de la multiplication où l'on rencontrerait des formules telles que *3 m× 2 = 6 m* puisque le multiplicateur 2 est un nombre abstrait. Cette position aboutira d'ailleurs à une tentative de mise en place de règles d'écriture de la multiplication - dite *notation concrète* - qui permet effectivement d'éviter, par l'application rigide de procédures, un bon nombre d'erreurs sur des problèmes très standardisés mais… ne permet pas de savoir ce qu'est une multiplication.[vii]

b) Lors de l'exposé [viii] fait en octobre 2005 pour la rencontre SMF/Société Finlandaise de Mathématiques, je reprends explicitement la critique d'utilitarisme faite aux programmes de 1945 par l'inspecteur général Leif en 1958 : « *En fait, et les succès aidant, il semble bien que la tendance à néglige l'aspect éducatif au profit de l'utilité pratique et e l'efficacité immédiate, ait incliné les maîtres à se faire une conception trop étroite de cet enseignement. Les Instructions Officielles de 1938, celles de 1945 surtout, et les textes relatifs à l'épreuve de calcul au C.E.P.E. qui ont beaucoup insisté sur le caractère pratique et utilitaire de l'enseignement du calcul à l'Ecole Primaire, n'ont fait d'ailleurs, au moins en apparence, que renforcer cette tendance.*[29] »

c) J'ai pris contact avec RB le 20/11/1999 et il me répond le lendemain :

> Message-ID: <38384aa638485db0@antholoma.wanadoo.fr> (added by antholoma.wanadoo.fr)
> X-Mailer: Microsoft Internet Mail & News for Macintosh - 3.0
> Date: Sun, 21 Nov 1999 21:53:18 +0100
> Subject: Re: Renseignements?
> From: Brissiaud <remi.brissiaud@wanadoo.fr>
> To: MFree <michel.delord@free.fr>
>
> Cher collègue,
>
> Je suis effectivement le Rémi Brissiaud que vous évoquez. Mais, malheureusement, je suis dans l'incapacité totale de répondre de manière suivie à tous les courriers électroniques que je reçois. Sinon, je ne serai bientôt plus ni chercheur, ni enseignant, mais répondeur de messages e-mail !
> Alors, à moins que vous n'ayez quelque chose de très important à me communiquer....
> Merci de votre compréhension
>
> Rémi Brissiaud

Le lendemain, je renvoie des extraits de mon texte «*Calcul humain, calcul mental et calculettes : Questions pédagogiques*»[ix], publié dés 2000 sur les sites de SLL et du SAGES et apparemment RB ne le trouve pas « *très important* » puisqu'il ne me réponds pas.

Or ce texte dès 1999, c'est-à-dire il y a sept ans,

- s'adresse fort courtoisement à RB même s'il émet des critiques sur ses positions :
  Sur le site du SNUIPP, Rémi Brissiaud (« Pourquoi s'y prendre à nouveau comme en 1970 ? ») critique d'une manière intéressante les IO du BO Special7 en montrant la nécessité de l'apprentissage simultané de toutes les opérations, de l'apprentissage simultané de toutes les fractions (et pas seulement de celles supérieures à 1) et,

[28] Disponible depuis la publication du rapport Rolland à http://michel.delord.free.fr/an-31012006.pdf

[29] J. Leif , R. Dézaly, *Pédagogie Spéciale, Deuxième fascicule, L'enseignement du calcul, Leçons dechoses et Sciences appliquées*, Librairie Delagrave, Paris, 1958. Extraits à http://michel.delord.free.fr/leif-introcalc.pdf

en faisant référence à 1970, montre bien que nous ne sommes pas sortis de la problématique formaliste. Mais il repart dans l'antienne : « Un ouvrage récent (Analysis of arithmetic for mathematics teaching, 1992) présente une synthèse des recherches menées dans ce pays sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. Dans le chapitre consacré à la division, on y recommande d'enseigner la technique des longues divisions. Mais, visiblement, les auteurs du projet d'IO en mathématiques ne se sont guère inspirés des travaux récents en psychologie de l'apprentissage ».
Il est tout à fait préférable, pour la défense des « longues divisions », de reprendre, d'un strict point de vue mathématique, les positions de James Milgram et David Klein dans « The Role of Long Division in the K-12 Curriculum » que l'on trouve sur le site FTP de James Milgram (Fichier long-division-try-again.doc). Elles sont basées sur des arguments qui ne dépendent pas des variations météorologiques «des travaux récents en psychologie de l'apprentissage ».
Or, on n'a pas besoin des « travaux récents en psychologie de l'apprentissage » car les travaux antérieurs les contredisaient, à moins d'expliquer pourquoi les résultats précédents les contredisaient.

- discute explicitement de l'importance des 4 opérations en CP :

[Les auteurs des programmes] auraient également remarqué que l'on ne peut enlever d'un édifice dont on ne comprends pas le fonctionnement un morceau sans penser que cela n'aura aucune influence sur le reste de l'édifice. Ils n'ont pas pu également -dominés par une pensée atomisée- penser que (comme je l'ai dit en introduction , je ne me place ici qu'au point de vue interne aux mathématiques lorsque j'emploie le mot sens)

1) si les nombres ont un sens , c'est par rapport aux autres nombres et que ce rapport aux autres nombres est réalisé par les opérations : ceci a une conséquence immédiate : il faut apprendre les 4 opérations au fur et à mesure de l'apprentissage de la numération de 20 (ou 11) jusqu'à 100 car c'est à ce moment là que doit se mettre en place simultanément - si l'on ne veut pas produire chez les élèves une pensée aussi atomisée que celle des théoriciens de la pédagogie moderniste- et la numération et les capacités opératoires
2) que ce sont les opérations qui donnent un sens aux nombres

- évoque clairement, dans sa conclusion, les faiblesses de l'enseignement des années 50/60 :

L'avenir le dira
Il n'est pas déraisonnable de se poser la question du devenir de l'éducation Nationale (fut-elle laïque et obligatoire et nationalisée) au vu de son état actuel et des possibilités existantes de l'empêcher de se transformer définitivement en instrument « d'edutainment », cad de décervelage incapable même d'apprendre aux enfants à lire, écrire et compter : la réponse pratique viendra assez vite. On verra si la société est capable de faire naître un mouvement s'opposant à cette véritable dégénérescence et si l'administration le tolérera.
Quoiqu'il en soit, et l'exemple des progressions en mathématiques suffit à le prouver, la pédagogie « classique », bien que possédant un savoir-faire supérieur en qualité à celle des modernistes, n'a pas pu résister à la vague du décervelage structuraliste qui n'a pas commencé en 68. Pour qui veut se poser quelques vraies questions, la pierre de touche n'est donc pas la critique des modernistes mais la critique de l'impuissance des vaincus, sous peine de vouloir, au prix d'une perte d'énergie considérable, reconstruire un système qui a logiquement abouti au désastre actuel.

Michel DELORD[x]

* * *

Le GRIP ne se réclame pas des programmes de 1945. Sa position officielle est notamment exprimée dans un document envoyé à la DESCO en juin 2005 [xi] :

« Pour reconquérir cette maîtrise des savoirs de base, nous nous référons pour une grande part au noyau rationnel et transposable des thèses des fondateurs de l'instruction publique ... Ce noyau rationnel comprend principalement :

- la synthèse des pédagogies innovantes recensées au niveau international en 1887 par Ferdinand Buisson et présentes dans son *Dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire. Cette synthèse porte le nom bien oublié maintenant de « méthode intuitive » :* anti-dogmatique, elle part de l'intuition sensible pour arriver à l'abstraction qui est la caractéristique de toute connaissance et la clé d'une pratique non aveugle et mécaniste. Pas d'abstraction prématurée, pas de retard dans le passage à l'abstraction - des extraits en ont été systématiquement cités dans toutes les Instructions Officielles jusqu'en 1945.
- les axes et contenus logiques, quasiment invariants de 1880 aux années 1960, des programmes et progressions du primaire et primaire supérieur (notamment pour l'enseignement du calcul et de la langue). »

*
* *

ANNEXE 2 -

Où en sont les programmes ?

La prégnance des thèses défendues par Marguerite Robert justifiant *L'abandon des « opérations sur les grandeurs »* parce que « *ce n'est pas mathématique* » est telle aujourd'hui, c'est-à-dire trente cinq ans après la publication du BO de 70, qu'on peut encore lire cette conception isolant les mathématiques dans le très officiel document d'accompagnement des programmes de troisième, applicables théoriquement jusqu'en 2007-2008 : «*En effet, en mathématiques, on ne travaille pas sur les grandeurs (c'est l'objet d'autres disciplines, comme la physique, la technologie, les sciences de la vie et de la Terre ou la géographie et l'économie par exemple)* »[xii].

Les programmes du primaire de 2002 continuent de préconiser l'enseignement des opérations en ignorant le calcul sur les grandeurs puisque, dans ces programmes qui se veulent pourtant exhaustifs, on ne trouve pas la moindre allusion à ce calcul[30] pas plus par exemple que, pour la multiplication, on ne trouve la moindre allusion à la notion de multiplicande ou de multiplicateur.

On peut cependant noter la publication tardive en février 2005 d'un document d'accompagnement des programmes du primaire de 2002 intitulé *Grandeurs et mesure à l'école élémentaire*[xiii]. Il recommande des écritures du type 1 km = 1000 m et comporte un chapitre intitulé *Le calcul sur les grandeurs* dans lequel on trouve :

> *Plus tard l'élève maniera les égalités du type*
> *- pour l'aire de rectangles :* $4\ m \times 7\ m = 28\ m^2$, $8\ m \times 50\ cm = 8\ m \times 0{,}50\ m = 4\ m^2$
> *- pour le périmètre d'un carré de 7 cm de côté :* $4 \times 7\ cm = 28\ cm$

Mais ce texte coexiste avec le document d'accompagnement des programmes de troisième cité *supra* dans lequel on lit «*en mathématiques, on ne travaille pas sur les grandeurs* » et avec les programmes du primaire de 2002 dont il est un commentaire, dans lequel ne figure aucune allusion ni au calcul sur les grandeurs ni à sa nature ni à la manière de l'enseigner. Il règne donc la plus grande confusion. Dans l'état actuel, un enseignement sérieux du calcul sur les grandeurs est à peu près impossible : la quasi-totalité des enseignants en fonction ont des habitudes d'enseignement qui nient le calcul sur les grandeurs (qui n'est pas un ajout au calcul sur les nombres purs), ils n'ont reçu aucune formation pour l'expliquer et on ne leur fournit aucune indication ou explication susceptible de leur donner des points de repères rationnels expliquant les origines des aberrations qu'on leur a demandé d'enseigner, ce qui serait la seule manière de dépasser ces aberrations. De plus, comme début de l'analyse dimensionnelle, il n'est pas un *truc d'écriture*[31], mais doit faire partie d'une progression cohérente permettant d'en comprendre le sens et les modalités. Or ces conditions ne sont pas du tout respectées, d'abord parce que, dans les programmes la numération est toujours apprise séparément des unités physiques ; ensuite, parce que ces mêmes programmes, documents d'accompagnement compris, ne donnent aucune définition des opérations.

Aujourd'hui, on semble s'orienter vers un aménagement de façade des programmes de 70. Ceux-ci interdisaient tout calcul sur les grandeurs ; on partait du calcul sur des nombres abstraits pour y rester. On rencontrerait les calculs sur les *nombres avec unités*[32], mais seulement à partir du collège. C'est ce que semble sous-entendre le document d'accompagnement des programmes de 2002 cité *supra* lorsqu'il dit « Plus tard *l'élève maniera les égalités du type […] pour le périmètre d'un carré de 7 cm de côté :* $4 \times 7\ cm = 28\ cm$ » alors que le périmètre du carré est au programme du primaire. Celui-ci ne le cède en rien à la position de *Yves Chevallard* dont l'autorité de didacticien est reconnue puisqu'il est, avec Guy Brousseau, un des deux grands spécialistes de la didactique des mathématiques en France. En 2001, il publiait *Les grandeurs en mathématiques* au collège *: Une Atlantide oubliée*[33]. Ce titre à valeur programmatique confirme sans aucune ambiguïté, pour le niveau scolaire où il est aussi fondamental que problématique depuis 1970, le renoncement à l'enseignement des grandeurs en primaire.

*
* *

[30] Alors qu'y sont détaillés les types de calcul demandés aux élèves : *calcul posé, automatisé, réfléchi, mental.*

[31] Le fait d'écrire 3m×5 est une image plus précise et plus intuitive de la situation à traduire en calcul que l'écriture 3×5 ; elle est, pour cette raison, plus complexe.

[32] Sur le modèle *J'apprends d'abord le concept : j'apprends la notion de couleur, puis celles de rouge, bleu, blanc, vert …*

[33] Chevallard Y., Bosch M., 2000-2001, *Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie I : Une Atlantide oubliée*, Petit *x* n°55, pp. 5-32, IREM de Grenoble.

ANNEXE 3 -

MULTIPLICATION

68.- La **multiplication** est une opération par laquelle on répète un nombre appelé **multiplicande** autant de fois que l'indique un autre nombre appelé **multiplicateur**.
Le résultat se nomme **produit**.
On définit encore la multiplication ainsi :
69. – La multiplication est une opération qui a pour but de trouver un nombre appelé ***produit*** *qui soit par rapport au* ***multiplicande*** *ce que le* ***multiplicateur*** *est par rapport à l'****unité****.*
70. - Le multiplicande et le multiplicateur se nomment les **facteurs** du produit.
71. - La multiplication s'indique par le signe × (**multiplié par**) qui s'écrit entre les nombres à multiplier : 8 × 5 (*8 multiplié par 5*).
72. - La multiplication n'est qu'une *addition abrégée*.
73.- Le *multiplicande* est toujours un nombre *concret*, c'est-à-dire qui exprime des objets déterminés, comme des arbres, des mètres, des francs, etc.
74.- Le *multiplicateur* est un nombre *abstrait*, qui indique seulement combien de fois on répète le multiplicande.
75.- Le *produit* exprime toujours des **unités** *semblables* à celles du multiplicande.

[…] (Technique de la multiplication)

Principes relatifs à la multiplication

85.- Principe 1. – *Dans toute multiplication, on peut intervertir l'ordre des facteurs sans changer la valeur du produit.*

Ex. : 7 × 4 donne le même produit que 4 × 7.
[…]

89. – La *preuve de la multiplication* se fait en recommençant l'opération après avoir changé *l'ordre des facteurs*. On doit trouver le même produit. (Principe 1, n°85). On peut faire aussi la preuve par 9.(Voir page 134)

Brouet et Haudricourt Frères, *Cours Moyen*, Paris, 1912

*
* *

ANNEXE 4 -

Marguerite Robert, *Réflexions sur le programme rénové : Un nouvel état d'esprit*, (1972).
Extraits

5) La multiplication dans N

Traditionnellement, elle était présentée à partir des « grandeurs ». Il s'agissait de trouver le prix de 6 livres à 3 F pièce, ou la longueur de tissu nécessaire pour faire 6 robes en sachant que la confection de chacune demande 3 m d'étoffe.

Il faudra donc que les maîtres renoncent à cette présentation et, surtout, qu'ils abandonnent radicalement les écritures telles que

6F×3=18 F. ou 6m×3=18m ou
3×6F=18F ou 3×6m=18m

Nous savons, en effet, que le signe « = » ne peut être placé qu'entre deux écritures d'un même naturel et non entre des « grandeurs ». Pour réformer les habitudes mentales, mieux vaut abandonner les notions de multiplicande (mesure d'une « grandeur ») et de multiplicateur (nombre de « grandeurs », nombre de « fois »).

La nouvelle situation de base est celle d'une certaine disposition, par lignes et colonnes, d'une collection d'objets. Prenons, par exemple, une collection de douze objets, et disposons ces objets de la façon suivante :

*   *   *   *
*   *   *   *
*   *   *   *

Nous voyons 3 lignes de 4 objets ou 4 colonnes de 3 objets. Cette disposition nous permet d’écrire le naturel douze sous la forme :

$$4\times3 \text{ ou } 3\times4$$

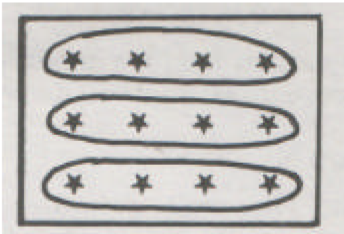
que nous appelons produit des naturels 4 et 3.

Signalons aux maîtres que cette situation est celle qui leur permettra le mieux, plus tard, d’aborder le produit de deux naturels à partir du produit cartésien de deux ensembles.

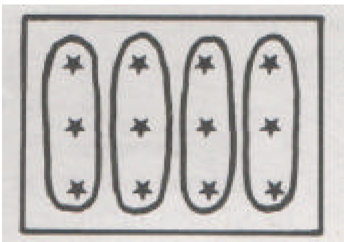
Nous pouvons tout de suite, avec ces nouvelles écritures de douze, former des égalités :

$3 \times 4 = 4 \times 3$ $4 \times 3 = 3 \times 4$
$12 = 3 \times 4$ $3 \times 4 = 12$
$12 = 4 \times 3$ $4 \times 3 = 12$

Par ailleurs, notre nouvelle situation de base n’est pas sans lien avec la précédente. Il suffit de modifier le dessin de la façon suivante :



pour retrouver l’écriture de douze sous forme de somme $4 + 4 + 4$
ou encore de la modifier ainsi



pour obtenir la somme $3 + 3 + 3 + 3$.

Nous pouvons donc passer de l’écriture d’un naturel sous forme de produit à deux écritures de ce naturel sous forme de somme de termes égaux.

Ainsi le naturel 5×2 peut s'écrire :
$2 + 2 + 2 + 2 + 2$ ou $5 + 5$
$5 \times 2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2$ $5 \times 2 = 5 + 5$

De même nous pouvons écrire une somme de naturels égaux sous forme de produit.

$7 + 7 + 7$ s'écrira 7×3 ou 3×7
$7 + 7 + 7 = 7 \times 3$
$7 + 7 + 7 = 3 \times 7$

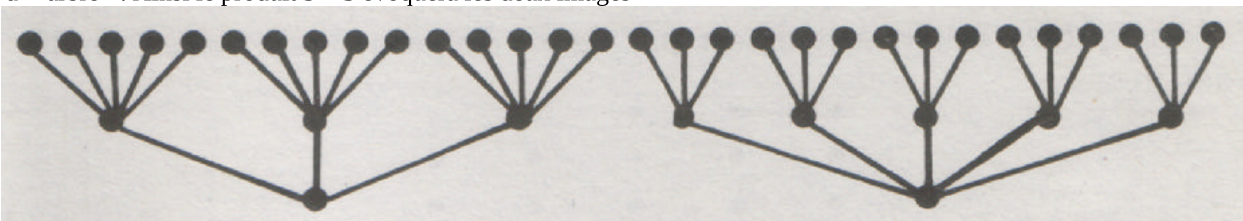
Nous pouvons encore, par le passage implicite au produit, remplacer une somme de naturels égaux par une autre somme, par exemple :
$7 + 7 + 7$ par $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 +3$
$7 + 7 + 7 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$

Dans tout ce qui précède, la notion de produit se réfère à l'image mentale d’une collection d’objets disposés en lignes et colonnes. Ainsi en lisant :

5×3

nous voyons mentalement 5 lignes de 3 ou 5 colonnes de 3.

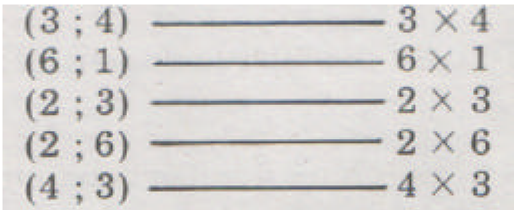
Il nous a été utile, pour l'étude de certaines propriétés du produit, de lier cette notion à un autre type d'image mentale, celle d'« arbre ». Ainsi le produit 5 × 3 évoquera les deux images



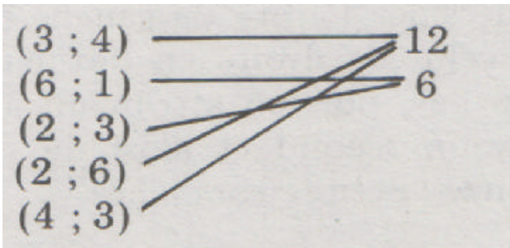
Ces deux arbres ont quinze branches, mais le premier est fait de trois bouquets de cinq tandis que le second est construit avec cinq bouquets de trois.

Si nous nous reportons à notre première image mentale, les « grosses » branches de l'arbre de gauche représentent les lignes, tandis que celles de l'arbre de droite figurent les colonnes.

La multiplication dans N peut maintenant être définie comme une loi de composition interne qui, à tout couple de naturels, donne pour image leur produit.
Prenons une liste de quelques couples et celle de leurs images



ou encore



La multiplication dans **N** peut donc être décrite à partir de trois constituants :

L'ensemble de tous les couples de naturels,
L'ensemble des naturels,
L'ensemble de tous les traits qui relient un couple à son image.

Comme tout couple possède une image, c'est une loi de composition interne. On peut toujours écrire le produit de deux naturels.

Notes de fin

[i] http://www.cafepedagogique.net/dossiers/contribs/brissiaud2.php?p=40

[ii] *The Mathematics of Physical Quantities*
Part I: Mathematical Models for Measurement, February 1968
Part II: Quantity Structures and Dimensional Analysis, July 1968
In American Mathematical Monthly. Vol. 75.
Introduction : http://michel.delord.free.fr/h_whitney.pdf

[iii] Exercice de la page 108 de : Louis Postel, Roland Moujan, *Mathématique au CE*, classiques Sudel, 1970.

[iv] http://michel.delord.free.fr/comp-pp-01.pdf

[v] http://michel.delord.free.fr/nb-cps.pdf

[vi] Rémi Duvert, *Faut-il mettre les unités dans les calculs ?*, Bulletin de l'APMEP. N° 436. p. 603-609. 2001.

[vii] G. Bey, Ch. Maillary, *Remarques sur l'enseignement de la multiplication et de la division, Editions Bourrelier*, 1959.

[viii] http://smf.emath.fr/VieSociete/Rencontres/France-Finlande-2005/DelordF.pdf

[ix] http://michel.delord.free.fr/txt1999/calc-index.html

[x] http://michel.delord.free.fr/txt1999/9_%20Conclusion.html

[xi] http://michel.delord.free.fr/slecc-juin2005.pdf

[xii] http://www.cndp.fr/textes_officiels/college/programmes/acc_prg3/acc_prg3_maths.pdf

[xiii] http://www.eduscol.education.fr/D0048/Grandeurs.pdf