

Chap 9 : La mesure : longueur, aire et volume

✓ Apports théoriques

1. Grandeurs

1.1 Grandeurs repérables, grandeurs sommables

- **Grandeur non repérable** : ex : la gentillesse.
- **Grandeur repérable** : ex : la température : on peut comparer objectivement la température de 2 objets à l'aide d'un thermomètre.
- Quand on mélange 2 liquides qui ont 2 températures différentes, les températures en sont pas additionnables car cela dépend aussi du volume de chaque liquide : les températures ne sont pas des **grandeurs sommables**.

1.2 Grandeurs mesurables

Par exemple, si on prend des baguettes de longueurs différentes, on peut les comparer entre elles.

On peut définir une relation d'équivalence (si la baguette x est égale à la baguette z alors $x + y = z + y$), une relation d'ordre, une addition et une multiplication compatible avec ces relations.

→ **cette grandeur est mesurable.**

1.3 Méthodes de comparaison de grandeurs mesurables

- Comparaison directe.
- Comparaison en utilisant un objet intermédiaire.
- Comparaison par une transformation licite (ex : en reportant les différentes longueurs des segments qui forment une ligne brisée sur une droite).

→ ces différentes méthodes ne sont pas toujours utilisables (irréalisables ou trop lourdes). Une autre méthode a donc été mise en place : le mesurage.

2. Le mesurage

2.1 Définition

Mesurer une grandeur a c'est tout d'abord choisir une grandeur unité u et déterminer le réel x tel que $a = x \times u$.

x est appelé la mesure de a avec l'unité u .

- **Pour mesurer l'aire d'une surface**, on choisit comme unité l'aire d'une surface donnée. La mesure d'une aire est alors le nombre d'unités nécessaires pour recouvrir exactement et sans chevauchement la surface en question.
- **Pour mesurer un volume**, on prend comme unité le volume d'un solide donné. Très souvent il s'agit d'un cube de côté 1cm.
- **Pour mesurer un angle**, on choisit comme unité un angle donné.

2.2 Propriétés des mesures

- Une mesure est toujours positive.
- Si S_1 et S_2 sont 2 objets disjoints alors $\text{mes}(S_1 \cup S_2) = \text{mes}(S_1) + \text{mes}(S_2)$.

NB : $\cup =$ « réunion ».

2.3 Changement d'unités

La mesure de a quand on prend c pour unité est égale au produit de la mesure de a quand on prend b comme unité par la mesure de b quand on prend c comme unité :

$$\text{mes}_c(a) = \text{mes}_b(a) \times \text{mes}_c(b).$$

- Si on n'utilise que des entiers naturels pour mesurer des grandeurs : utilisation des sous-multiples de l'unité de départ (souvent sous multiples de 10). Ex : 3 m 25 cm.
- Si on utilise les décimaux : une seule unité suffit : 3 m 25 cm = 3,25m.

3. Longueur et périmètre

3.1 Unités de longueur

Le système métrique actuel s'est imposé à partir de 1790 : le mètre, ses sous-multiples et ses multiples.

3.2 Périmètre de surfaces

- Rectangle : $(L + l) \times 2$.
- Carré - losange : $4 \times c$.
- Cercle : $2 \times \pi \times r = D \times \pi$.

4. Aire

4.1 Unités d'aire

- Pour mesurer l'aire d'une surface il est possible de prendre n'importe quelle grandeur comme unité.
- L'unité usuelle est l'aire d'un carré de 1 m de côté appelé « mètre carré » et noté m^2 .
- $1 \text{ dam}^2 = 1 \text{ are}$ (noté a).
- $1 \text{ hm}^2 = 1 \text{ hectare}$ (noté ha).

4.2 Mesures d'aire de figures usuelles

- Rectangle : $A = L \times l$.
- Carré : $A = c^2$.
- **Losange : $A = (D \times d) / 2$**
où D est la mesure de la grande diagonale et d la mesure de la petite diagonale.
- **Parallélogramme : $A = c \times h$**
où c est la mesure d'un des côtés et h la mesure de la hauteur correspondant à ce côté.
- **Triangle : $A = c \times h / 2$**
où c est la mesure d'un côté et h la hauteur correspondant à ce côté.
- **Triangle rectangle : $A = a \times b / 2$**
où a et b sont les mesures des côtés de l'angle droit.
- **Trapèze : $A = (B + b) \times h / 2$**
où B est la mesure de la grande base, b la mesure de la petite base et h la mesure de la hauteur.
- **Disque : $A = \pi \times r \times r = \pi \times r^2$** .

5. Volume

5.1 Unités

2 types d'unités :

- Les unités en « cube » : le m^3 et ses sous-multiples. Le m^3 est le volume d'un cube de 1 m de côté.
- Les unités en « litre » : Le litre (L) et ses multiples et sous-multiples : hectolitre (hL), décalitre (daL), décilitre (dL), centilitre (cL), millilitre (mL).

Pour passer d'un type d'unité à l'autre : $1 L = 1 dm^3$.

5.2 Volume des solides usuels

- **Pavé droit** : (ou parallélépipède rectangle) :

$$V = L \times l \times h$$

- **Cube** :

$$V = c^3$$

- **Prisme droit, cylindre** :

$$V = A \times h$$

- **Pyramide, cône** :

$$V = \frac{1}{3} A \times h$$

- **Sphère** :

$$V = \frac{4}{3} \pi \times r^3$$

6. Autres grandeurs

6.1 La durée

- L'unité de base est la seconde.
- Système non décimal d'où 2 difficultés spécifiques :
 - o Difficulté pour additionner les mesures : ex : 2 h 52 min + 3 h 53 min.
 - o Difficulté liée à l'utilisation des nombres décimaux pour noter des durées : 2,5 min est différent de 2 minutes et 5 secondes.

6.2 Les masses

L'unité de masse est le kilogramme noté kg.

Multiples et sous-multiples : tonne (t), quintal (q), kilogramme (kg), hectogramme (hg), décagramme (dag), gramme (g), décigramme (dg), centigramme (cg), milligramme (mg).

$$1 t = 1000 \text{ kg.}$$

$$1 q = 100 \text{ kg.}$$

6.3 Les angles

L'unité d'angle utilisée à l'école primaire est le degré.

✓ Aspects didactiques

1. Longueur et périmètre

1.1 Principales compétences et difficultés

Compétences	Principales difficultés ou erreurs
<p>L'élève doit savoir comparer des objets par rapport à leur longueur :</p> <ul style="list-style-type: none"> - en les superposant. - en utilisant un objet intermédiaire. - en effectuant des transformations licites : par ex en reportant les différentes longueurs des segments qui forment une ligne brisée sur une droite. - en utilisant une unité de grandeur donnée. 	<ul style="list-style-type: none"> - Certains élèves sont « non conservants » : ils sont dans l'incapacité de repérer les transformations licites (déplacement, déformation...). - Des difficultés de manipulation : ex : dans le cas de l'utilisation d'une ficelle.
<p>L'élève doit savoir mesurer un segment avec un double décimètre.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Erreurs liées au positionnement du double-décimètre. - Erreurs liées à la lecture des millimètres.
<p>L'élève doit savoir calculer le périmètre de figures soit à partir de mesures qu'il peut effectuer, soit en utilisant une ficelle ou un quadrillage.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - L'élève a une représentation du périmètre comme étant le résultat obtenu par un calcul à partir d'une formule. - L'élève pense que pour calculer un périmètre il faut ajouter toutes les dimensions qui lui sont données. - Si la figure est représentée sur un quadrillage, l'élève compte les carreaux « intérieurs » ou « extérieurs ». - Si la figure est formée de la réunion de 2 figures dont on connaît le périmètre, l'élève aura tendance à ajouter els périmètres de chacune des figures. - Dans le cadre d'activités de comparaison de périmètres, l'élève peut comparer les aires et induire la comparaison des périmètres en appliquant le théorème en acte : « plus l'aire d'une figure est grande, plus son périmètre est grand ». - L'élève pense que 2 figures superposables ne peuvent avoir même périmètre.
<p>L'élève doit savoir estimer la longueur d'un objet</p>	<p>Par manque d'expériences sociales ou scolaires, l'élève n'a aucune idée des mesures de certaines longueurs (terrain de foot, chambre...)</p>
<p>L'élève doit savoir effectuer des conversions d'unités</p>	<p>Erreurs liées à l'écriture décimale des nombres ou à la méconnaissance des relations entre les différentes unités.</p>
<p>L'élève doit savoir résoudre els problèmes faisant intervenir le périmètre et présenter els résultats avec une approximation convenable.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - L'élève ne sait pas si la grandeur qui intervient dans le problème est l'aire ou le périmètre. - Si utilisation de la calculatrice, l'élève est tenté d'indiquer tous les nombres affichés.

1.2 Variables didactiques

Pour les activités de comparaison de longueurs

- **La nature des objets** dont il faut comparer les longueurs : objets physiques ou dessins, objets rectilignes ou courbes.
- **La taille de ces objets.**
- Ces objets sont-ils **déplaçables ou non** ? **transformables ou non** ?
- **Le matériel** dont dispose l'élève : règle graduée ou non, compas, ficelle.

Pour les activités de recherche de périmètre

- **La nature de la figure** : figure simple, rectangle, carré, losange... pour lesquelles une formule peut être appliquée directement ou figure complexe.
- **La taille de la figure.**
- Le fait que **l'élève puisse mesurer ou non** certaines dimensions.
- **Le matériel** dont dispose l'élève : ficelle, règle graduée...
- Le fait que les **dimensions inutiles figurent ou non** sur le dessin.
- Le fait que certaines diagonales de la figure soient tracées.
- Le fait que la figure soit tracée sur du **papier quadrillé ou non.**

2. Aires de figures planes

Le fait que l'aire et le périmètre soient 2 grandeurs d'un même objet va être à l'origine de nombreuses erreurs renforcées par le fait que :

- Les unités d'aire : cm^2 , m^2 ... rappellent celles du périmètre : cm, m...
- Les méthodes de changement d'unités sont souvent très proches.
- Pas d'instrument qui permette de mesurer directement des aires.
- Une surface est d'abord caractérisée par son contour, ligne qui a une longueur.

L'aire doit être abordée sous 2 aspects :

- L'aspect unidimensionnel : quand on demande de comparer des aires par pavage, par recoupage, recollement...
- L'aspect bidimensionnel : quand on calcule des aires en effectuant des produits de longueurs.

2.1 Principales compétences et difficultés

Compétences	Difficultés ou erreurs
<p>L'élève doit savoir comparer des aires :</p> <ul style="list-style-type: none"> - soit directement par superposition. - soit par découpage et recollement. - soit en utilisant une unité de mesure (aspect unidimensionnel de l'aire). 	<ul style="list-style-type: none"> - L'élève n'est pas conservant des surfaces. - Suite à une comparaison de périmètres, l'élève peut induire la comparaison des aires en référence au théorème en acte : « plus le périmètre d'une figure est grand, plus son aire est grande ». - L'élève pense que seul le carré peut être une unité acceptable. - L'élève pense qu'on ne peut pas mesurer l'aire d'un triangle avec une unité carrée car celle-ci ne permet pas de recouvrir exactement cette surface. - L'élève pense que des figures qui ne sont pas directement superposables ne peuvent pas avoir la même aire. - L'élève assimile l'aire à l'encombrement. - L'élève rencontre des difficultés de manipulation

	pour paver une figure avec une grandeur unité donnée. - L'élève est tenté de « fermer » les figures concaves pour comparer leur aire.
L'élève doit savoir déterminer l'aire d'une figure à partir de ses dimensions : - soit en appliquant une formule (aspect bidimensionnel de l'aire). - soit en décomposant la figure en figures simples. - soit en procédant par soustraction.	- L'élève applique une formule erronée qui peut être induite par les formules du calcul du périmètre. - Cette technique nécessite de réaliser une analyse de la figure. - Souvent cette technique nécessite un repérage de sur-figures.
L'élève doit savoir exprimer l'aire d'une figure avec une unité convenablement choisie.	Le calcul d'aire passe par l'utilisation d'unités de longueur. L'élève conserve donc souvent ces unités pour présenter son résultat.
L'élève doit savoir effectuer des conversions.	L'élève utilise les techniques de conversion qu'il connaît pour les unités de longueur.
L'élève doit savoir estimer la mesure de l'aire d'une surface.	Les expériences sociales des élèves sont souvent insuffisantes : il est difficile d'estimer l'aire d'une pièce sans faire une estimation de ses dimensions.
L'élève doit savoir résoudre des problèmes faisant référence au calcul de mesure d'aire	- L'élève ne sait pas si la grandeur qui intervient dans le problème est l'aire ou le périmètre.

2.2 Les variables didactiques

Pour les activités de comparaison d'aires :

- **La nature des objets** dont on demande de comparer les aires : objets physiques ou objets représentés.
- **La taille de ces objets.**
- **La possibilité de superposition directe ou non** de ces objets.
- La présence de **quadrillage ou non** dans le cas de figures.
- La **possibilité ou non de décomposer un objet** pour reconstituer l'autre.

Pour les activités de calcul de la mesure d'aires de figures :

- **La nature de la figure** : figure simple (rectangle, carré, disque) ou figure composée.
- La **possibilité ou non de décomposer la figure en éléments simples.**
- Le fait que les **dimensions utiles sont données ou non.**
- La mise à disposition ou pas d'un formulaire.

3. Autres grandeurs

- **Les volumes** : toute première approche faite à l'école primaire à travers des travaux de comparaison des volumes par transvasement de liquide. Les seules unités étudiées sont le litre, ses multiples et ses sous-multiples.
- **Les durées** : les principales difficultés sont liées au fait que les unités utilisées ne sont pas en base dix mais en base soixante.

- **Les angles** : seule la comparaison d'angles et la mesure d'angles avec des gabarits donnés est au programme de l'école primaire.
- **Les masses** : commencer par un travail de comparaison des masses, les unités étant introduites ensuite.

→ **Le travail sur la mesure permet de renforcer les connaissances sur les décimaux.**