Probabilités

Probabilités élémentaires

L'univers Ω est l'ensemble des résultats possibles (éventualités) d'une expérience aléatoire.

Un évènement est une partie de l'univers Ω.

Un événement élémentaire est une partie de Ω, comportant un et un seul élément.

$\varnothing$ est l'événement impossible Ω est l'événement certain

$A \cup B$ est l'événement "**A ou B**"

$A \cap B$ est l'événement "**A et B**"

Si $A \cap B = \varnothing$, on dit que A et B sont incompatibles (ou disjoints).

On note $\overline{A}$ **l'événement contraire de A**.

On définit une loi de probabilité p sur $\Omega = \{\omega_1 ; \omega_2 ;...; \omega_n\}$ en associant à chaque événement élémentaire $\{\omega_i\}$ un nombre réel p_i tel que :

pour tout $i \in \{1 ; 2 ; \cdots ; n\}$ $0 \leq p_i \leq 1$ et $\mathbf{p_1 + p_2 + p_3 + ... = 1}$

p_i est la probabilité de l'événement élémentaire $\{\omega_i\}$. On note aussi $p_i = p(\omega_i)$

Pour tout événement $A = \{a_1 ; a_2 ; \cdots ; a_k\}$, $p(A) = p(a_1) + p(a_2) + \cdots + p(a_k)$.

Propriétés

- Pour tout événement A, $p(A) \in [0 ; 1]$
- Si A et B sont disjoints, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
- Si A et B sont quelconques, $\mathbf{P(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)}$
- Si A est contenu dans B, $p(A) \leq p(B)$
- Si $A_1, A_2, ... , A_k$ sont des événements deux à deux disjoints,

  $p(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k) = p(A_1) + p(A_2) + \cdots + p(A_k)$
- $\overline{A}$ étant le contraire de A, $\mathbf{p(\overline{A}) = 1 - p(A)}$

Cas particulier

Si tous les événements élémentaires ont la même probabilité, la probabilité de chacun d'eux est alors $p = \dfrac{1}{\text{card}(\Omega)}$. (événement élémentaires équiprobables)

Dans ce cas, pour tout événement A, $p(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$

Dénombrement

✓ P-listes : Il s'agit de compter toutes les listes possibles de p éléments parmi n en tenant compte de l'ordre et avec répétitions des éléments. Le nombre de ces listes est n^p.

✓ Arrangements : On choisit p éléments parmi n **en tenant compte de l'ordre mais sans répétitions**.

$$A_n^p = n(n-1)\ldots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

✓ Combinaisons : Une combinaison de p éléments de E est une partie de E qui contient p éléments.

On choisit p éléments parmi n mais **sans tenir compte de l'ordre et sans répétitions**.

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!} \quad avec\ C_n^0 = 1$$

Formules :

$$C_n^{n-p} = C_n^p \ et\ C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p \ (Triangle de Pascal)$$

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p \ (Binôme de Newton)$$

Dénombrements : quelles méthodes ?

Typesde tirages	Ordre	Répétitions d'éléments	Dénombrement
Successifs Avec remise	On tient compte de l'ordre	Un élément peut être tiré plusieurs fois	n^p p-listes
Successifs Avec remise		Un élément n'est tiré qu'une seule fois	A_n^p arrangements
Simultanés	L'ordre n'intervient pas		C_n^p combinatoires

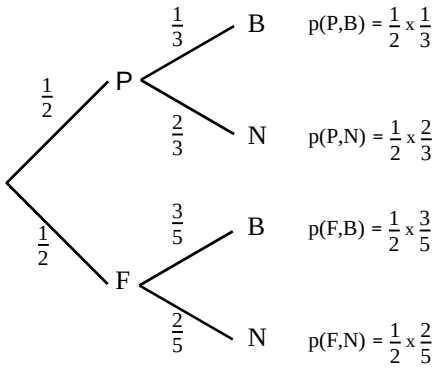
Arbres Pondérés

Règles de construction

La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est 1.
La probabilité de l'événement correspondant à un trajet est le produit des probabilités des différentes branches composant ce trajet.

Exemple

On jette une pièce.
Si on obtient pile, on tire une boule dans une urne contenant 1 boule blanche et 2 boules noires.
Si on obtient face, on tire une boule dans une urne contenant 3 boules blanches et 2 boules noires.
On peut représenter cette expérience par l'arbre pondéré ci-contre :



Variables Aléatoires

Une variable aléatoire est une application X de l'univers Ω dans $\mathbb{R}$.

On détermine la loi de probabilité d'une variable aléatoire X, en donnant les probabilités $p(X = x_i)$, pour toutes les valeurs x_i prises par X.
(la somme de ces probabilités est égale à 1)

L'espérance mathématique de X (ou moyenne) est le nombre réel

E(X) = $x_1.p(X=x_1) + \cdots + x_n.p(X=x_n)$ c'est-à-dire **E(X) =** $\sum_{i=1}^{i=n} x_i.p(X=x_i)$ **.**

La variance de X est le nombre réel (positif)

V(X) = $(x_1 - E(X))^2.p(X=x_1) + \cdots + (x_n - E(X))^2.p(X=x_n) = \sum_{i=1}^{i=n} (x_i - E(X))^2.p(X=x_i)$

On a aussi **V(X) =** $\sum_{i=1}^{i=n} (x_i)^2.p(X=x_i) - [E(X)]^2$

L'écart type de X est le nombre réel (positif) **σ(X) =** $\sqrt{V(X)}$ **.**

La fonction de répartition de X, est définie pour tout réel x par $F(x) = p(X \leq x)$.
La fonction de répartition de X est une fonction en escalier, croissante, dont la valeur minimale est 0 et la valeur maximale 1.

Probabilités

Vocabulaire :

- ✓ Univers : Ensemble des résultats possibles lors d'une expérience.
- ✓ Evènement élémentaire : 1 résultat possible. (Souvent noté e_i)
- ✓ Probabilité : Nombres associés aux e_i tels que $0 < p(e_i) \leq 1$ et $\sum p(e_i) = 1$.
- ✓ Equiprobabilité : Lorsque tous les $p(e_i)$ sont égaux. Dans ce cas, si CardE = n, $p(e_i) = \frac{1}{n}$.

Variables aléatoires :

Ce sont des nombres x, réels, associés aux e_i. (Souvent des gains ou des pertes).

- ✓ Loi de probabilité : Tableau donnant toutes les valeurs des $p_i = p(\{X = x_i\})$.
- ✓ $E(X) = \sum x_i . p_i \quad V(X) = \sum (x_i - E(X))^2 . p_i \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Evènements indépendants :

- ✓ 2 évènements A et B sont indépendants si : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

Probalités conditionnelles :

Sachant que A est réalisé, on calcule la probabilité de B, notée : $p_A(B)$.

- ✓ On obtient la relation : $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B$

Dénombrement

Schémas type :

✓ P-listes :Il s'agit de compter toutes les listes possibles de p éléments parmi n en tenant compte de l'ordre et avec répétitions des éléments. Le nombre de ces listes est n^p.

✓ Arrangements :On choisit p éléments parmi n en tenant compte de l'ordre mais sans répétitions.

✓ Combinaisons :On choisit également p éléments parmi n mais sans tenir compte de l'ordre et sans répétitions.

Formules :

$$A_n^p = n(n-1)\ldots(n-p+1) \quad \text{ou} \quad \frac{n!}{(n-p)!} \qquad P_n = n!$$

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} \quad \text{avec} \quad C_n^0 = 1$$

$$C_n^{n-p} = C_n^p \quad \text{et} \quad C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p \quad \text{(Triangle de Pascal)}$$

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p \quad \text{(Binôme de Newton)}$$

Schéma de Bernoulli : On l'applique lorsqu'on répète des épreuves dont les résultats sont indépendants des épreuves précédentes :

$$C_n^k . p^k . (1-p)^{n-k} \quad \text{où} \quad \begin{cases} p = \text{probabilité de } A \\ k = \text{Nbre de réalisations} \\ n = \text{Nbre d'épreuves} \end{cases}$$