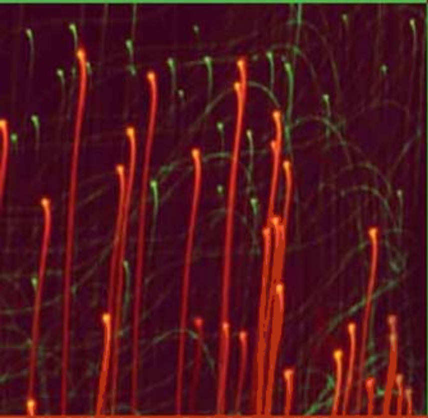
Auteurs Mengeulti Ali



Université Mouloud Mammeri Tizi-Ouzou

Faculté des sciences

Cours d'analyse 1

1-Les nombres réels et complexes
2-Suites numériques
3-Fonctions d'une variable réelle
4-Des exercices avec solutions

edo.eklablog.net

Année scolaire 2015-2016

Table des matières

Menguelti Ali

Chapitre 1

Les nombres réels et complexes

1.1 Entiers naturels et Nombres rationnels

On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$$

Comme chaque entier naturel n admet un successeur $n+1$, on se convainc sans peine que $\mathbb{N}$ est un ensemble infini. On note $\mathbb{N}^*$ l'ensemble $\mathbb{N}\backslash \{0\}$, c'est-à-dire l'ensemble des entiers naturels non nuls. Etant donné deux entiers naturels x et y on sait définir les nombres

$$x + y \ , \ x - y \ , \ x \cdot y, \ \frac{x}{y} \quad y \neq 0$$

On remarque que l'addition et la multiplication sont des opérations qui ont leur résultat dans $\mathbb{N}$. Par contre le résultat d'une soustraction ou d'une division n'est pas toujours un entier naturel. On crée ainsi de nouveaux nombres

$$\mathbb{Z} = \{\ldots\ldots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\ldots\}$$

Les éléments de $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N})$ sont appelés entiers relatifs. On note $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}/ \{0\}$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \ \frac{a}{b} \ \middle| \ a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

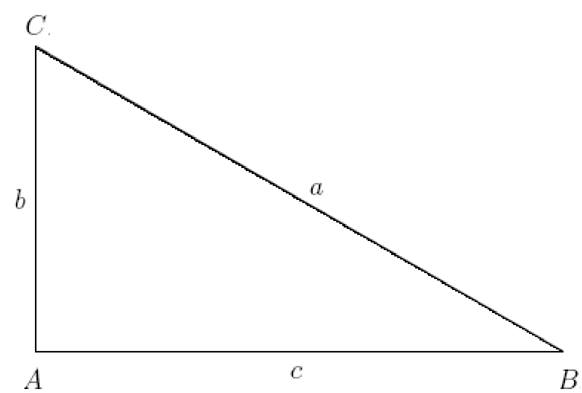
l'ensemble des nombres rationnels dans le quel on identifie la fraction

$$\frac{a}{b} \ = \frac{na}{nb}, \qquad \forall b, n \in \mathbb{Z}^*$$

On a bien entendu les inclusions suivantes

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

et les quatre opérations élémentaires $+, -, \times$ et $/$ peuvent s'étendre à l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels. Les Grecs classiques ont cru longtemps que toutes les quantités s'exprimaient par des nombres rationnels. Ils se sont aperçu que ce n'est pas toujours le cas. En effet on peut construire des nombres qui ne sont pas rationnels. Considérons par exemple un triangle ABC rectangle en A



Si on note a la longueur du segment BC, b celle de CA et c celle de AB, alors le théorème de Pythagore dit qu'on a la relation

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Ainsi on obtient que la longueur de la diagonale d'un carré de côté $b = c = 1$ est égale à $a = \sqrt{2}$.

Proposition 1.1.1 *Le nombre $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel*

Démonstration : Nous allons faire une démonstration par l'absurde. Supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel. Il existe alors deux entiers positifs a, b tel que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Si a et b sont pairs, on peut simplifier la fraction $\frac{a}{b}$ par 2. En simplifiant par 2 autant que possible, on arrive au cas où au moins un des deux entiers a ou b est impair on suppose pour simplifie que *a et b est* irréductible (que ne pouvons pas simplifie comme 6 *et* 5). En élevant au carré l'égalité $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. et en chassant le dénominateur, on arrive à

$$2b^2 = a^2$$

donc a^2 pair alors a est paire. En effet si a est inpair $a = 2a'+1, a^2 = 4a'^2+4a'+1$ est inpair.On en déduit donc que a est pair, donc on peut écrire

$$a = 2a'$$

ce qui donne

$$2b^2 = 4a'^2$$

et en simplifiant par 2, on obtient

$$b^2 = 2a'^2$$

C'est la même équation que ci-dessus avec a' à la place de b et b à la place de a. Le même raisonnement montre alors que b est aussi pair. On a donc une contradiction et $\sqrt{2}$ ne peut pas être rationnel.

Au passage, il est important de s'interroger sur ce que signiè cette "preuve", ou plus prècisèment sur ce que l'on entend en mathématique lorsque l'on parle de "démonstration" : a partir de propriétés déjà établies (des théorèmes) et de notions déjà définies, on déduit une nouvelle propriété en utilisant les régles de la logique mathématique. Ici par exemple, on a utilisé les notions de fraction irréductible et de nombre pair, on a utilisé la propriété "si n^2 est pair alors n est pair"... Dans ce "jeu de construction" que sont les mathématiques, il faut bien sûr avoir un socle : c'est le rôle de ce que l'on nomme axiomes. Un axiome est un enoncé mathématique admis une fois pour toutes, et qui n'a pas pour vocation d'être démontré. Vous avez par exemple certainement entendu parler des axiomes d'Euclide, qui fondent la géométrie euclidienne, dont le célébre "par un point passe une et une seule droite paralléle a une droite donnée". La démarche mathématique telle que l'on vient de l'esquisser peut paraître fastidieuse. Mais il faut avoir en tête l'une des spécificités importantes des mathématiques par rapport aux autres sciences : une fois que vous avez démontré un théorème, celui-ci est vrai pour l'éternité en mathématique !

Au niveau où se situe ce cours, on va voir affleurer quelques axiomes de l'analyse concernant les nombres réels : les théorèmes que nous établirons ensuite reposeront parfois directementé sur ce socle. La propriété de la borne supérieure est l'un de ces axiomes.

La proposition (1.1.1) dit que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel, c'est-à-dire ne peut pas s'écrire comme quotient de deux entiers. Cependant nous savons que le nombre $\sqrt{2}$ peut s'écrire sous forme d'un développement décimal infini

$$1.4142135623730950\ldots$$

Dans ce cours nous prenons cette représentation décimale comme définition d'un nombre réel.

Définition 1.1.2 (nombre réel) *Un nombre réel est une collection de chiffres* $\{c_0, ..., c_m\}$ *et* $\{d_1, d_2, ...\}$ *compris entre* 0 *et* 9*. Les chiffres* c_i *sont en nombre fini et les chiffres* d_j *peuvent être en nombre infini. On fait correspondre à cette collection le nombre donné par le développement décimal*

$$x = c_m \ldots c_2 c_1 c_0, d_1, d_2, ...d_n$$

Exemples.

1. Les décimales du nombre π sont
$$c_0 = 3, d_1 = 1, d_2 = 4, d_3 = 1, ...$$
2. S'il n'y a qu'un nombre fini de décimales d_j non nulles, alors le réel x est un rationnel et
$$x = c_m 10^m + c_{m-1} 10^{m-1} + \cdots + c_1 10 + c_0 + d_1 10^{-1} + \cdots + d_n 10^{-n}$$
(x est rationnel, car c'est une somme de rationnels).
3. Un nombre rationnel admet un développement décimal, donc est réel. On a par exemple
$$\frac{1}{3} = 0.33333\ldots (\textit{que des } 3)$$

1.2 Régles de calcul dans $\mathbb{R}$

Addition : L'addition des réels possède les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \textbf{Commutativité} : \ \forall\, x, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x. \\ \textbf{Associativité} \ : \forall\, x, y, z \in \mathbb{R} : x + (y + z) = (x + y) + z. \\ 0 \textbf{ est élément neutre } : \forall\, x \in \mathbb{R} : x + 0 = 0 + x = x \\ \textbf{Tout réel a un opposé} : \ x + (-x) = (-x) + x = 0. \end{cases}$$

On résume ces propriétés en disant que (R, +) est un groupe commutatif

Multiplication : La multiplication des réels possède les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \textbf{Commutativité} : \ \forall\, x, y \in \mathbb{R} : xy = yx. \\ \textbf{Associativité} \ : \forall\, x, y, z \in \mathbb{R} : x\,(yz) = (xy)\,z. \\ 1 \textbf{ est élément neutre } : \forall\, x \in \mathbb{R} : x\ 1 = 1\ x = x \\ \textbf{Tout réel non nule a un inverse} : \ x\frac{1}{x} = \frac{1}{x}x = 1. \end{cases}$$

De plus, les deux opérations sont liées par la propriété suivante :

Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition :

$$\forall\, x, y, z \in \mathbb{R} : x(y + z) = xy + xz; (y + z)x = yx + zx.$$

On résume toutes ces propriétés en disant que $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif([1]).

Remarques et notations : Pour tous réels x et y, on note $y - x$ plutôt que $y+(-x)$. On définit ainsi une nouvelle opération sur $\mathbb{R}$ (soustraction) qui ne présente que très peu d'intérêt : elle n'est ni commutative, ni associative, et il n'y a pas d'élément neutre. On vérifie la propriété :

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R} : (-x - y) = -\,(x + y)$$

Pour toute partie A de $\mathbb{R}$, on note

$$-A = \{-x,\ x \in A\}$$

La commutativité et l'associativité des deux lois $+$ *et* $\times$ ont pour conséquence qu'on peut envisager des sommes $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ et des multiplication $x_1 \times x_2 ...... \times x_n$

[1]Pour les notions groupe et corps voirs le cours d'algébre.

sans parenthéses et sans se préoccuper de l'ordre des termes. De plus la somme est notée

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{k=1}^{k=n} x_k$$

et la multiplication est notée

$$x_1 \times x_2 ...... \times x_n = \prod_{k=1}^{k=n} x_k \tag{1.1}$$

en particulier si on suppose que $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ on obtien

$$\begin{aligned} x_1 + x_1 + \cdots + x_1 &= \sum_{k=1}^{k=n} x_1 = x_1 \sum_{k=1}^{k=n} 1 = x_1 n \\ x_1 \times x_1 ...... \times x_1 &= \prod_{k=1}^{k=n} x_1 = (x_1)^n \end{aligned}$$

Si on pose dans la produit (1.1)

$$x_n = n$$

on obtien

$$\prod_{k=1}^{k=n} x_k = 1 \times 2 \times 3 ...... (n-1) \times n$$

On appelle ce produit n factorielle note $n!$

Définition 1.2.1 *Pour* $n \in \mathbb{N}$, *on définit*

$$n! = \begin{cases} 1 \ si \ n = 0 \\ \\ n \ \ (n-1)! \end{cases}$$

Définition 1.2.2 *On pose pour tout couple* $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ *de nombres entiers naturels*

$$\begin{aligned} C_n^k &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, pour \quad 0 \leq k \leq n \\ \\ C_n^k &= 0 \quad pour \quad k > n \end{aligned}$$

Ce nombre C_n^k, *noté aussi* $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ *est appelé coefficient binominal d'indices* n *et* k.

On vérifie sans peine que :

$$C_n^0 = 1, C_n^1 = n$$

et on a :

$$C_n^{(n-k)} = C_n^k \textit{ et } C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$$

À titre d'exemple, la seconde de ces relations peut s'établir comme suit pour

$$\begin{aligned} C_n^k + C_n^{k+1} &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!} \\ &= \frac{(k+1)\,n!}{(k+1)!\,(n-k)!} + \frac{(n-k)\,n!}{(k+1)!\,(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k)!}\,((k+1)+(n-k)) \\ &= \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k)!}\,(1+n) = C_{n+1}^{k+1} \end{aligned}$$

On peut ainsi ranger les coefficients binomiaux non nuls dans le « **Triangle de Pascal** », la relation montre que, en additionnant sur la $n^{ième}$ ligne les deux éléments des $k^{ième}$ et $k+1^{ième}$ colonnes, on obtient l'élément situé en $n+1^{ième}$ ligne et $j+1^{ième}$ colonne.

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$
$n=0$	1						
$n=1$	1	1			$C_n^k + C_n^{k+1}$		
$n=2$	1	2	1		$= C_{n+1}^{k+1}$		
$n=3$	1	3	3	1			
$n=4$	1	4	6	4	1		
$n=5$	1	5	10	10	5	1	
$n=6$	1	6	15	20	15	6	1

Proposition 1.2.3 (principe de récurrence) *Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $E(n)$ un énoncé.*

Alors : tous les énoncés $E(n)$ $(n \in \mathbb{N})$ sont vrais, si :

1- *$E(0)$ est vrai (**ancrage** de la récurrence).*

2- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : si $E(n)$ est vrai, alors $E(n+1)$ est vrai (passage de récurrence, symboliquement : $n \to (n+1)$*

Proposition 1.2.4 (formule du binôme de Newton) *On a pour tout nombre entier naturel n et tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$*

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \ x^k y^{n-k} \\ &= C_n^0 \ y^n + C_n^1 \ xy^{n-1} + C_n^2 \ x^2 y^{n-2} + \ldots C_n^n \ x^n\end{aligned}$$

<u>**Démenstration**</u> Nous démenstrons la formule du binôme de Newton par récurrence sur n

On a pour $n = 0$

$$(x+y)^0 = 1 = C_0^0 \ x^0 y^{0-0} = 1$$

$\boxed{n \to n+1}$

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n = x \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \ x^k y^{n-k} + y \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \ x^k y^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \ x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \ x^k y^{n-k+1} = \sum_{k=1}^{k=n+1} C_n^{k-1} \ x^k y^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \ x^k y^{n-k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{k=n} C_n^{k-1} \ x^k y^{n-k+1} + \sum_{k=1}^{k=n} C_n^k \ x^k y^{n-k+1} + C_{n+1}^{n+1} \ x^{n+1} y^0 + C_n^0 \ x^0 y^{n+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{k=n} \underbrace{\left(C_n^{k-1} + C_n^k\right)}_{C_n^k} x^k y^{n-k+1} + C_{n+1}^{n+1} \ x^{n+1} y^0 + C_n^0 \ x^0 y^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n+1} C_n^k \ x^k y^{n-k}$$

Exemple. Si on pose $x = y = 1$ dans la formule du binôme de Newton on obtien

$$2^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k$$

de même si on pose $x = -1$ $y = 1$ on obtien

$$\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \ (-1)^k = 0$$

Calculons les deux sommes suivantes :

$$\begin{aligned} S &= C_n^1 + 2C_n^2 \ + 3C_n^3 \ldots + nC_n^n \ = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k \\ T &= C_n^1 + 4C_n^2 \ + 3C_n^3 \ldots + n^2C_n^n \ = \sum_{k=0}^{n} k^2C_n^k \end{aligned}$$

Première méthode : On utilise les propriétés des coefficients binomiaux que nous

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} kC_n^k &= \sum_{k=0}^{n} \frac{kn!}{k!\,(n-k)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!n}{(k-1)!\,(n-k)!} \\ &= n\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} = n\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} \end{aligned}$$

on pose $j = k - 1$ donc

$$n\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} = n\sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^{j} = n2^{n-1}$$

Seconde méthode : On utilise les propriétés des fonctions d'une variable réelle et la formule du binôme :

$$\frac{d}{dx}(x+1)^n = \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \ x^k$$

alors

$$n\,(x+1)^{n-1} = \sum_{k=1}^{k=n} kC_n^k \ x^{k-1}$$

si je prends $x = 1$

$$n2^{n-1} = \sum_{k=1}^{k=n} kC_n^k$$

Pour

$$T = C_n^1 + 4C_n^2 \ + 3C_n^3 \ldots + n^2 C_n^n \ = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k$$

On a

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k = \sum_{k=0}^{n} \left[k\,(k-1)\,C_n^k + kC_n^k\right] = \sum_{k=0}^{n} k\,(k-1)\,C_n^k + \sum_{k=0}^{n} kC_n^k$$

de la même manière

$$\frac{d^2}{dx}\,(x+1)^n = \frac{d^2}{dx}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \ x^k$$

alors

$$n\,(n-1)\,(x+1)^{n-2} = \sum_{k=0}^{k=n} k\,(k-1)\,C_n^k \ x^{k-2}$$

En faisant alors $x = 1$, on obtient l'égalité

$$n\,(n-1)\,2^{n-2} = \sum_{k=0}^{k=n} k\,(k-1)\,C_n^k$$

alors

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k = n\,(n-1)\,2^{n-2} + n2^{n-1}$$

Proposition 1.2.5 (Inégalité de Bernoulli)

$$(1+h)^n \geq 1 + nh$$

pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $h > -1$

Démenstration (par récurrence sur n)

On a pour $n = 0$

$$(1+h)^0 = 1 = 1$$

$\boxed{n \to n+1}$

$$\begin{aligned}(1+h)^{n+1} &= (1+h)^n\,(1+h) \geq (1+h) + nh\,(1+h)\\ &\geq h\,(1+n) + h^2 n + 1 \geq h\,(1+n) + 1\end{aligned}$$

1.2.1 Relation d'ordre

Définition 1.2.6 (Relation) *Soit E un ensemble. Une relation $\mathcal{R}$ dans E est un sous-ensemble de $E \times E$.*

Exemple : Soit la relation $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{Z}$ définie par :

$$x\mathcal{R}y = \left\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2, 4 \text{ } dinise \text{ } x - y\right\}$$

on a $12\mathcal{R}4$ mais $25\not\mathcal{R}6$

Définition 1.2.7 (Relation d'ordre) *On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E si :*

1- *$\mathcal{R}$ est réflexive, c'est-à-dire*

$$\forall x \in E \qquad x\mathcal{R}x$$

2- *$\mathcal{R}$ est anti-symétrique, c'est-à-dire*

$$\forall x, y \in E \qquad x\mathcal{R}y \text{ } et \text{ } y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$$

3- *$\mathcal{R}$ est transitive, c'est-à-dire*

$$\forall x, y, z \in E \qquad x\mathcal{R}y \text{ } et \text{ } y\mathcal{R}z \Rightarrow \text{ } x\mathcal{R}z$$

Définition 1.2.8 (Relation d'ordre totale) *Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur E. On dit que $\mathcal{R}$ est totale (ou E est totalement ordonné si on peut comparer deux éléments quelconques de E, c'est-à-dire :*

$$\forall x, y \in E \qquad x\mathcal{R}y \text{ } ou \text{ } y\mathcal{R}x$$

Exemple

Soient E un ensemble et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Par exemple, si

$$E = \{1, 2, 3\}$$

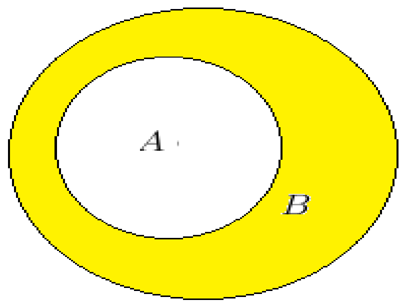
alors :

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset \text{ } \{1;2;3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}\}$$

On munit $\mathcal{P}(E)$ de la relation dite « inclusion d'ensembles », c'est-àdire si A et B sont deux sous-ensembles de E alors

$$A\mathcal{R}B = \left\{(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2, A \subset B\right\}$$

nous représente deux ensembles inclus l'un dans l'autre.



$A \subset B$

On montre que est une relation d'ordre :

Réflexivité Si $A \in \mathcal{P}(E)$, on a bien $A \subset A$ car tout élément de A sont trivialement dans A.

Anti-symétrie Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Si $A \subset B$ alors tous les éléments de A sont dans B. Si $B \subset A$ alors tous les élément de B sont dans A. On suppose qu'on a les deux assertions simultanément, c'est-à-dire tous les éléments de A sont dans B et vice-versa. D'où : $A = B$.

Transitivité Soient $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. On suppose que $A \subset B$ donc tous les éléments de A sont dans B et que $B \subset C$ alors tous les éléments de B sont dans C. Ainsi tous les éléments de A sont dans B donc dans C, d'où $A \subset C$. Conclusion faite, la relation «$\subset$ » est une relation d'ordr e. Par contre, elle n'est pas totale car on ne peut pas comparer des singletons de $\mathcal{P}(E)$.

Proposition 1.2.9 ***La relation*** $\mathcal{R}$ *définie par*

$$x\mathcal{R}y = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leq y\right\}$$

est une relation d'ordre totale dans $\mathbb{R}$.

Le fait que l'ordre sur $\mathbb{R}$ soit total entraîne que tout ensemble fini de réels admet un plus petit élément et un plus grand élément. Si $\{a_1, ..., a_n\}$ est un ensemble fini de réels, nous noterons $\min\{a_1, ..., a_n\}$ le plus petit et $\max\{a_1, ..., a_n\}$ le plus grand élément. Un ensemble infini de réels n'admet pas nécessairement de plus petit ou de plus grand élément. Voici quelques exemples.

Ensemble		**Plus petit élément**	**Plus grand élément**
$\mathbb{N}$		0	Non
$\mathbb{Z}$		Non	Non
$\{1/n, n \in \mathbb{N}^*\}$		Non	1
$\{(-1)^n (1-1/n), n \in \mathbb{N}^*\}$		Non	Non
$\{(-1)^n (1+1/n), n \in \mathbb{N}^*\}$		-2	$3/2$
$\{(-1)^n + 1/n, n \in \mathbb{N}^*\}$		Non	$3/2$
$\{(-1)^n - 1/n, n \in \mathbb{N}^*\}$		-2	Non

1.2.2 Majorant, minorant, borne infférieure et supérieure

Définition 1.2.10 (majorant, minorant, partie bornée) *Soit A une partie de $\mathbb{R}$.*

1. *Le réel M est un majorant de A si*

$$\text{pour tout } a \in A \text{ on a } a \leq M.$$

On dit que A est majorée si A a un majorant.

2. *Le réel m est un minorant de A si*

$$\text{pour tout } a \in A \text{ on a } a \geq m.$$

On dit que A est minorée si A a un minorant.

3. *Si la partie A est majore et méinorée, on dit que A est bornée.*

Définition 1.2.11 (Borne inférieure et supérieure) *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ (ou plus généralement d'un ensemble E muni d'un ordre total). On appelle borne supérieure de A le* ***minimum de l'ensemble des majorants*** *de A et borne inférieure de A le* ***maximum de l'ensemble des minorants*** *de A*

Définition 1.2.12 (Borne supérieure et inférieure) *M est la borne supérieure de A si et seulement si*

1. $\forall x \in A,\ x \leq M$
2. $\forall \lambda, \lambda < M,\ alors\ \ \exists x \in A,\ \lambda < x.$

m est la borne inférieure de A si et seulement si

1. $\forall x \in A,\ m \leq x$
2. $\forall \lambda, m < \lambda,\ alors\ \ \exists x \in A,\ x < \lambda.$

La première relation exprime que M est un majorant de A. La deuxième signifie qu'un nombre strictement plus petit que M n'est pas majorant de A. Cela équivaut à dire que tout majorant de A est supérieur ou égal à M.

Exemple

$$D = \left\{x \in \mathbb{R}, x^2 - 3x + 2 \leq 0\right\}$$

On a

$$\triangle = 3^2 - 8 = 1$$

donc

$$x_1 = \frac{3+1}{2} = 2, x_2 = \frac{3-1}{2} = 1$$

alors

$$D = \{x \in \mathbb{R}, (x-2)(x-1) \leq 0\} = [1, 2]$$

D est bornée avec

$$\inf D = \min D = 1 \ et \ \sup D = \max D = 2$$

Reprenons comme exemples les 6 ensembles

Ensemble	inf	sup
$\mathbb{N}$	0	$+\infty$
$\mathbb{Z}$	$-\infty$	$+\infty$
$\{1/n, n \in \mathbb{N}^*\}$	0	1
$\{(-1)^n (1 - 1/n), n \in \mathbb{N}^*\}$	-1	1
$\{(-1)^n (1 + 1/n), n \in \mathbb{N}^*\}$	-2	$3/2$
$\{(-1)^n + 1/n, n \in \mathbb{N}^*\}$	-1	$3/2$
$\{(-1)^n - 1/n, n \in \mathbb{N}^*\}$	-2	1

Avant d'énoncer le théorème d'existence de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$, montrons que la borne supérieure n'existe pas toujours. On se place dans $\mathbb{Q}$ muni de l'ordre naturel.

Théorème 1.2.13 (propriété de la borne supérieure,) *1. Toute partie de $\mathbb{R}$ majorée (resp. minorée) possède une borne supérieure (resp. inférieure).*

2. Les bornes supérieure et inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$, si elles existent, sont uniques

Proposition 1.2.14 *Considérons la partie $A = \{x \in \mathbb{Q},\ x^2 < 2\}$ Alors A n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.*

Démonstration. Soit M un majorant de A dans $\mathbb{Q}$. Posons

$$M' = \frac{M^2+2}{2M}$$

Nous allons vérifier que M' est un autre majorant (dans $\mathbb{Q}$) et que $M' < M$, ce qui prouve qu'il n'y a pas de plus petit majorant. Montrons que M' est un majorant : il suffit de voir que $M'^2 > 2$. On calcule

$$M'^2 - 2 = \left(\frac{M^2+2}{2M}\right)^2 - 2 = \frac{\left(M^2-2\right)^2}{4M^2}$$

qui est bien strictement positif. En effet $M^2 - 2 \neq 0$ car sinon $\sqrt{2}$ serait rationnel voir proposition (1.1.1) . Vérifions que

$$M' < M$$

On calcule

$$M - M' = M - \frac{M^2+2}{2M} = M - \frac{M^2+2}{2M} = \frac{M^2-2}{2M}$$

qui est bien strictement positif puisque M est un majorant rationnel de A.

Théorème 1.2.15 *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$*

1. *Si A est majorée, alors A admet une borne supérieure, notée* $\sup A$*.*

2. *Si A est minorée, alors A admet une borne inférieure, notée* $\inf A$

Proposition 1.2.16 (Caractérisation de la borne supérieure) *La borne supérieure M d'une partie A de $\mathbb{R}$ est caractérisée par :*

$$\forall x \in A, x \leq M \ \ et \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A \ , M - \varepsilon \leq x_\varepsilon \leq M$$

Proposition 1.2.17 (Caractérisation de la borne inférieure) *La borne inférieure m d'une partie A de $\mathbb{R}$ est caractérisée par :*

$$\forall x \in A, x \geq m \ \ et \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x_\varepsilon \in A \ , \ m \leq x_\varepsilon \leq m + \varepsilon$$

Remarque 1.2.18 *On dit que A admet un élément maximal s'il admet un majorant qui appartient a A. Autrement dit*

$$\exists a_0 \in A \ tel \ que \ a \leq a_0 \ \forall a \in A$$

Un tel a_0 est forcement unique, on le note

$$\max A$$

. De même on dit que A admet un élément minimal s'il admet un minorant qui appartient a A.Autrement dit

$$\exists a_1 \in A \ tel \ que \ a \leq a_1 \ \forall a \in A$$

Un tel a_1 est forcement unique , on le note

$$\min A.$$

Nous allons souvent rencontrer dans ce cours des réels ε strictement positifs arbitrairement petits. On peut s'en faire une idée concrète en pensant $\varepsilon = 0.001$, ou bien $\varepsilon = 10^{-6}$. Prenons comme exemple

$$A = \left\{1/n^2, n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

La borne inférieure est $\inf(A) = 0$. La proposition (1.2.17) permet d'affirmer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément de l'ensemble inférieur à ε. Et d'ailleurs l'équivalence ci-dessous permet de l'exhiber.

$$\frac{1}{n^2} \leq \varepsilon \Leftrightarrow n \geq \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$$

pour $\varepsilon = 0.001$ *on a*

$$n \geq \sqrt{\frac{1}{0.001}} = 31.623 \Rightarrow n = 32$$

Les propositions (1.2.16) *et* (1.2.17) admettent les réciproques suivantes.

Proposition 1.2.19 *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ si M est un majorant de A tel que*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_\varepsilon \in A \ , M - \varepsilon \leq x_\varepsilon$$

alors $M = \sup(A)$

Proposition 1.2.20 *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ si m est un minorant de A tel que*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_\varepsilon \in A \ , x_\varepsilon \leq m + \varepsilon$$

alors $m = \inf(A)$

Remarque 1.2.21 (Raisonner avec des bornes supérieures) *Pour montrer qu'un réel est la borne supérieure d'une partie, il faut montrer :*

1- *que c'est un majorant de cette partie ;*

2- *qu'il est inférieur ou égal à n'importe quel majorant de la partie*

Exemple

Soit A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$. On pose

$$A + B = \{c \in \mathbb{R}, \exists (a, b) \in A \times B \text{ tel que } c = a + b\}$$

Montrer que $A + B$ possède une borne supérieure qui est

$$\sup A + \sup B$$

Montrer que $A + B$ possède une borne inférieure qui est

$$\inf A + \inf B$$

Soit $a0$ et b_0 des éléments de A et B, $a_0 + b_0 \in A + B$, donc $A + B$ est non vide. Par ailleurs, A et B sont non vides et majorées, elles possèdent donc des bornes supérieures et :

$$\forall c \in A + B, \exists (a, b) \in A \times B$$

$$c = a + b \leq \sup A + \sup B$$

Donc $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A + B$. Cette partie est donc non vide et majorée, elle possède une borne supérieure.

Soit M un majorant quelconque de $A + B$. Pour tout $(a, b) \in A \times B$:

$$a + b \leq M \Rightarrow a \leq M - b$$

Ce qui signifie que

$$M - b \; majore \; A :$$

il est par conséquent supérieur ou égal à $\sup A$, qui est le plus petit des majorants de A :

$$M - b \geq \sup A$$

c'est-à-dire

$$b \leq M - \sup A$$

$M - \sup A$ majore B, il est donc supérieur ou égal à $\sup B$, qui est le plus petit majorant de B :

$$M - \sup A \geq \sup B \Rightarrow M \geq \sup A + \sup B$$

Ainsi, tout majorant de $A + B$ est supérieur ou égal à $\sup A + \sup B$, qui est donc le plus petit majorant de $A + B$, c'est-à-dire sa borne supérieure.

$$\sup (A + B) = \sup A + \sup B$$

Proposition 1.2.22 *Soient $F \subset \mathbb{R}$ non vide et majoré et $a \in \mathbb{R}$*

$$\sup (a + F) = a + \sup F \;\; \forall a \in \mathbb{Q}, \sup (aF) = a \sup F \;\; a > 0$$

<u>**Démonstration**.</u> Vérifions que $a+\sup F$ satisfait la caractérisation précédente. Soit

$$x \in a + \sup F$$

il existe $y \in F$ tel que $x = a + y$. Puisque

$$y < \sup F \ \Rightarrow x = a + y < a + \sup F.$$

De même, soit $\varepsilon > 0$. Par la caractérisation de $\sup F$, il existe $z \in F$ tel que $\sup F$ $-\varepsilon < z$. Ainsi,

$$a + \sup F - \varepsilon < a + z$$

ce qui permet de conclure. La preuve pour aF suit les mêmes lignes

Définition 1.2.23 *L'ensemble E est dit borné s'il est borné à la fois supérieurement et inférieurement.*

1.2.3 Principe d'Archimède

Théorème 1.2.24 *L'ensemble $\mathbb{N}$ n'est pas majorée dans $\mathbb{R}$.*

<u>**Démonstration**.</u>

Si $\mathbb{N}$ était majoré, il aurait une borne supérieure α ; α majorerait $\mathbb{N}$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ on aurait $n+1 \in \mathbb{N} \Rightarrow n+1 \leq \alpha$; ceci entraînerait donc que $\alpha - 1$ majore aussi $\mathbb{N}$, ce qui contredit le fait que α est le plus petit majorant : on aboutit à une contradiction, α ne peut pas exister.

Proposition 1.2.25 (Propriété d'Archiméde) *Soient $x, y \in \mathbb{R}$, avec $x > 0$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que*

$$nx > y$$

<u>**Démonstration**.</u>

On a y/x ne peut majorer $\mathbb{N}$, il existe donc un $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > y/x$, d'ou

$$nx > y.$$

Définition 1.2.26 (Partie entière) *Soit $x \in \mathbb{R}$ alors il existe un unique entier k tel que*

$$k \leq x < k+1$$

Cet entier s'appelle la partie entière de x et se note $E(x)$ ou $[x]$

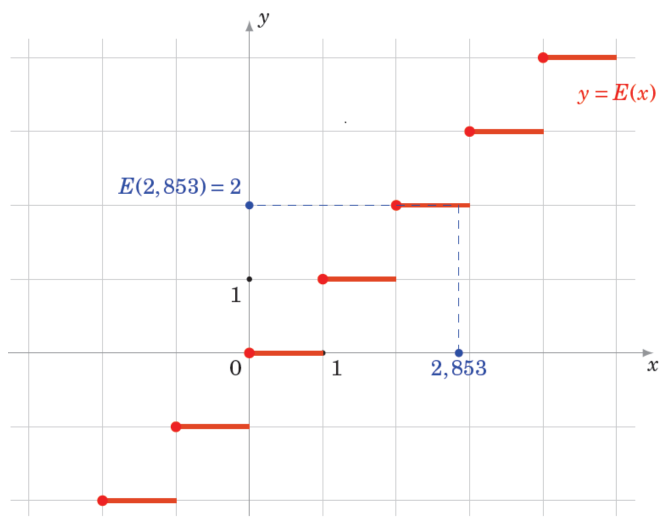
Exemples :

$$E(\pi) = 3, \quad E\left(\sqrt{2}\right) = 1, \; E(-2;713) = -3.$$

La justification de la définition provient du fait que $\{n \in \mathbb{N} \; n \leq x\}$ est majoré et possède donc un plus grand élément. Nous portons votre attention sur le fait que l'inégalié de gauche est large $(\leq)$ alors que celle de gauche est stricte $(<)$

Propriétés : Pour tous réels x et$y$, et tout entier relatif m :

- $[x] = m \Leftrightarrow x \in [m, m+1[$
- $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$
- $[x+m] = [x] + m$
- Si $x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow [-x] = -[x] - 1$
- $[x+y] \in \{[x]+[y], [x]+[y]+1\}$
- La fonction $f(x) = [x]$ est croissante et le graphe de cette fonction est



Exercice : Soit E la partie de $\mathbb{R}$ définie par

$$E = \left\{1 - \frac{2}{n^2+1}\right\}$$

1. Montrez que E est infinie et bornée.
2. Déterminez, si elles existent, la borne supérieure et la borne inférieure de E
3. Étudiez l'existence d'un plus petit élément, d'un plus grand élément, de E.

Solution Notons

$$u_n = 1 - \frac{2}{n^2+1}$$

Montrons que les éléments de E sont tous distincts, ce qui prouvera que E est infinie. Raisonnons par l'absurde en supposant deux éléments égaux pour deux entiers strictement positifs n_0 et p_0

$$u_{n_\circ} = 1 - \frac{2}{n_0^2+1} \ et \ u_{p_0} = 1 - \frac{2}{p_0^2+1}$$

Alors

$$1 - \frac{2}{n_0^2+1} = 1 - \frac{2}{p_0^2+1} \Rightarrow n_0 = p_0$$

On a

$$u_n = 1 - \frac{2}{n^2+1} \leq 1 \ et \ u_n \geq 0$$

donc E est minorée par 0 et majorée par 1, admet une borne inférieure m et une borne supérieure M qui vérifient :

$$m \geq 0 \quad et \quad M \leq 1$$

.Comme $u_1 = 0$, on a $m = 0$ et 0 est le plus petit élément de E. Montrons que $M = 1$ en montrant que, pour tout $\varepsilon > 0$, $1 - \varepsilon$ n'est pas un majorant de E. Pour ceci, il faut trouver $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$1 - \varepsilon < 1 - \frac{2}{n^2+1} \Leftrightarrow \frac{2}{n^2+1} < \varepsilon \Rightarrow n^2 + 1 > \frac{2}{\varepsilon}$$

alors

$$n^2 > \frac{2}{\varepsilon} - 1$$

Si $\varepsilon > 1$, tous les éléments de E sont supérieurs à $1 - \varepsilon$. Si $\varepsilon \leq 1$, il suffit de choisir

$$n > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon} - 1}$$

pour montrer que $1 - \varepsilon$. n'est pas un majorant de E. On a donc bien$M = 1$. Et comme 1 n'appartient pas à E car

$$\frac{2}{n^2 + 1} \neq 0$$

la partie E n'a pas de plus grand élément.

1.2.4 Distance dans $\mathbb{R}$ valeur absolue

Voici pour finir une notion trés utile, que l'on peut définir sans ajouter de nouvel axiome. Disons d'abord que $\max \{a; b\}$ désigne le nombre a si $b < a$ et le nombre b sinon.

Définition 1.2.27 *Pour x dans $\mathbb{R}$, on note $|x|$ le nombre réel défini par* $\max \{-x; x\}$

La définition même de $|x|$ nous indique comment prouver que $|x| \leq a$. Il faut montrer que

$$x \leq a \text{ et } -x \leq a$$

Cette astuce utile est à retenir : une inégalité invoquant une valeur absolue se montre en montrant deux inégalités. On peut définir la valeur absolue de façon alternative en posant

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ \\ -x \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

Ainsi, les valeurs absolues amènent parfois à faire des raisonnements par distinction de cas.

Proposition 1.2.28 *Soient x et y deux réels. On a*

$$\begin{cases} |x| = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \\ |x|\,|y| = |xy| \\ \\ ||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y| \quad \textit{Inégalité triangulaire} \end{cases}$$

Démonstration. (Inégalité triangulaire)

Commençons par l'inégalité de droite. Les inégalités

$$x \leq |x| \;\; et \;\; y \leq |y|$$

alors

$$x + y \leq |x| + |y|$$

De même

$$-x \leq |x| \;\; et \;\; -y \leq |y|$$

alors

$$-(x+y) \leq |x| + |y|$$

Ansi

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

Pour l'inégalité de gauche, appliquons l'inégalité de droite à

$$x' = -x \; et \;\; y' = x + y$$

donc

$$|x' + y'| \leq |x'| + |y'|$$

on remplace on obtient

$$|-x + x + y| \leq |-x| + |x+y| \Leftrightarrow |y| - |x| \leq |x+y|$$

d'ou

$$|y| - |x| \leq |x+y|$$

Définition 1.2.29 *On appelle distance entre deux réels a et b le nombre*

$$d(a,b) = |b-a|$$

Exercice : Montrer, en revenant a la définition de la valeur absolue, que

$$|x-a| \leq \varepsilon \Leftrightarrow x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$$

On a par

$$|x-a| \leq \varepsilon \Rightarrow \max\{-x+a; x-a\} \leq \varepsilon$$

donc

$$-x+a \leq \varepsilon \text{ et } x-a \leq \varepsilon \Rightarrow x \geq -\varepsilon+a \text{ et } x \leq a+\varepsilon$$

d'ou

$$x \in [-\varepsilon+a, +\infty[\cap]-\infty, a+\varepsilon] = [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$$

1.2.5 Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 1.2.30 (Intervalle) *On appelle intervalle, un ensemble de nombres délimité par deux bornes qui sont des nombres réels. Cet intervalle contient tous les nombres réels compris entre ces deux bornes.*

Définition 1.2.31 (Les différents types d'intervalles) – *Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. On appelle intervalle fermé, tout intervalle de type*

Intervalle fermé

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$$

et

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x\}$$

et

$$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq b\}$$

Intervalle ouvert

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$$

et

$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, a > x\}$$

et

$$]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R}, x < b\}$$

Intervalle semi-ouvert

$$[a,b[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$$

et

$$]a,b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$$

Proposition 1.2.32 (Caractérisation des intervalles) *Soit A une partie non-vide de $\mathbb{R}$. Les enoncés suivants sont équivalents :*

1) *A est un intervalle.*

2) *Pour tous a, b de A, l'intervalle $[a, b]$ est inclus dans A.*

Exemple

$$I = [0;1] \cap \mathbb{Q}$$

n'est pas un intervalle

Définition 1.2.33 (Densité d'un ensemble dans $\mathbb{R}$) *Soit $A \subset \mathbb{R}$, A est dense dans $\mathbb{R}$ si pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe $a \in A$ tel que*

$$|x - a| \leq \varepsilon$$

En quelques mots, être dense signifie que pour tout élément x de $\mathbb{R}$, il existe des éléments de A arbitrairement proches de x.

Exemple: $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Exemple : Si A est dense dans $\mathbb{R}$ et $A \subset B$, alors B est dense dans $\mathbb{R}$

Proposition 1.2.34

Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

$(i)-$ *A est dense dans $\mathbb{R}$*

$(ii)-$ *Pour tout $x < y \in \mathbb{R}$, il existe $r \in A$ tel que $x < r < y$.*

Théorème 1.2.35 *Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration.

1. Montrons que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Nous pourrons nous inspirer de la figure suivante.

Soit $x < y$. Le principe d'Archimède appliqué à $\varepsilon = y - x$ implique l'existence de $n \in \mathbb{N}$ tel que
$$0 < \frac{1}{n} < y - x$$
En posant
$$r = \frac{[nx]+1}{n}$$
nous obtenons
$$x = \frac{nx}{n} < \frac{[nx]+1}{n} \leq \frac{nx+1}{n} = x + \frac{1}{n} < x + y - x = y$$
Ainsi,
$$x < \frac{[nx]+1}{n} < y$$

2. Montrons que $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$ Soit β un nombre irrationnel, par exemple $\sqrt{2}$. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On applique la proposition (1.2.34) *et* la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ à $]a-\beta, b-\beta[$: il existe un rationnel r tel que $a - \beta < r < b - \beta$. Alors $a < r + \beta < b$. Le nombre $x = r + \beta$ est irrationnel, sinon $r = x - \beta$ serait rationnel contrairement à l'hypothése. Le thèorème est donc démontré.

Théorème 1.2.36 ($\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$) *Si I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ alors $I \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$ ou de façon équivalente, $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$*
$$\forall x \in \mathbb{R}; \forall \varepsilon > 0, \ \exists r \in \mathbb{Q}, \ |x - r| \leq \varepsilon$$

1.3 Des notions de la topologie

Introduction

La topologie est l'étude des propriétés invariantes dans la déformation géométrique des objets et dans les transformations continues appliquées à des êtres mathématiques. Structure où interviennent ces propriétés dans un ensemble. La topologie a d'abord été appelée géométrie de situation ou analysis situs. Topologie générale (ou des ensembles). Topologie combinatoire (ou algébrique).

La topologie qui étudie celles des propriétés des figures géométriques qui demeurent invariantes sous l'effet des transformations biunivoques et continues est une création de notre siècle (...) Mais la topologie ne s'est véritablement développée comme discipline autonome qu'après la publication à la fin du XIX^e siècle de profonds mémoires d'Henri Poincaré sur la topologie combinatoire (étude de propriétés algébriques et géométriques qui lui sont liées) et après la large diffusion de la théorie des ensembles qui permit d'en concevoir une nouvelle branche très vaste, la topologie ensembliste ou topologie générale.

Le Grand Robert : *René Taton, in Encycl.Pl., Hist.de la science, p.*704.

Définition 1.3.1 (Ensemble dénombrable) *On appelle ensemble dénombrable tout ensemble dont les éléments peuvent être mis en correspodance binivoque* (**une Bijection**) *avec les entiers naturels. En dautres termes un ensemble dénombrable est un ensemble dont les éléments peuvent être numérotés sous forme d'une suite infini.*

Propriétés des ensembles dénombrables

1. Tout sous-ensemble d'un ensemble dénombrable est finie ou dénombrable
2. Tout réunion finie ou dénombrable d'ensembles dénombrables est un ensemble dénombrable

Définition 1.3.2 (Équipotent) *Deux ensemble M et N sont dits équipotents (notation $M \sim N$) s'il est possible d'établir une correspodance binivoque entre leurs éléments.*

Point d'accumulation, point adhérent et point intérieur

La notion d'espace topologique a mis trés longtemps à prendre sa forme axiomatique actuelle. Le but est de formaliser les concepts intuitifs de proximité et de continuité de la façon la plus générale et la plus simple possible. Il n'est pas nécessairement évident que ce but soit atteint quand on lit la définition qui suit pour la premiére fois de sa vie. L'expérience montre pourtant que c'est bien le cas.

Définition 1.3.3 - *Soit X un ensemble. On appelle topologie sur X la donnée d'un sous-ensemble $\mathcal{O}$ de l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties de X, $\mathcal{O}$ devant vérifier les trois conditions suivantes :*

H1- $X \in \mathcal{O}$, $\varnothing \in \mathcal{O}$

H2- Soit $(U_\lambda)_{\lambda \in I}$ une famille (I finie ou infinie) : d'éléments de $\mathcal{O}$, alors

$$\bigcup_{\lambda \in I} U_\lambda \in \mathcal{O} \qquad (\textit{stabilité par union finie ou infinie}).$$

H3- Soit $(U_j)_{1 \leq j \leq N}$ une famille finie d'éléments de O, alors

$$\bigcap_{j=1}^{N} U_j \in \mathcal{O} \qquad (\textit{stabilité par intersection finie}),$$

Les éléments de l'ensemble $\mathcal{O}$ sont appelés ouverts (pour la topologie $\mathcal{O}$). Le complémentaire d'un ouvert est appelé fermé.

Définition 1.3.4 *Un couple $(X, \mathcal{O})$ tel que $\mathcal{O}$ vérifie les trois propriétés ci-dessus est appelé espace topologique*

Remarque 1.3.5 *Donc un ouvert est un sous-ensemble de X qui appartient à une topologie $\mathcal{O}$ sur X.*

Exemples d'espaces topologiques. Prenons $X = \mathbb{R}$ et désignons par $\mathcal{O}$ l'ensemble des parties U de $\mathbb{R}$ telles que, pour tout point x de U, il existe un intervalle ouvert (au sens usuel, c'est-'a-dire de la forme $]a, b[$) contenant x et inclus dans U. On a ainsi défini une topologie sur $\mathbb{R}$ (exercice : vérifiez-le!) qui est la topologie usuellement utilisée sur $\mathbb{R}$. Deux curiosités : soit X un ensemble quelconque, on définit $\mathcal{O}_0 = \{\varnothing; , X\}$ et $\mathcal{O}_0 = \mathcal{P}(X)$. Dans les deux cas, nous avons défini une topologie sur X. La premiére topologie s'appelle la topologie grossière sur X et la seconde la topologie discrète sur X. Ces deux topologies n'ont guère d'intérêt pratique en général, si ce n'est celui de nous convaincre que la définition n'est pas absurde, puisqu'il existe toujours au moins une topologie sur tout ensemble X !. La vraie question pour les applications est de savoir s'il existe une topologie intéressante sur X, une topologie qui soit bien adaptée à tel ou tel problème que l'on a à résoudre, ce qui est une autre histoire. Le langage des voisinages est souvent utilisé dans la littérature. Voici la définition d'un voisinage d'un point dans le cadre de la topologie usuel sur $\mathbb{R}$

Définition 1.3.6 *On appelle intervalle de $\mathbb{R}$ toute partie I de $\mathbb{R}$ vérifiant :*

$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, (a \in I, b \in I \text{ et } a \leq c \leq b) \Rightarrow c \in I$$

Définition 1.3.7 ($\overline{\mathbb{R}}$) *On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$ et on l'appelle droite réelle achevée.*

Définition 1.3.8 *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On appelle voisinage de x_0, toute partie de $\mathbb{R}$ contenant un ouvert contenant x_0. Où encore, on appelle voisinage de x_0 toute partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle ouvert centré en x_0. C'est à dire*

$$V \in V(x_0) \Longleftrightarrow \exists \varepsilon > 0, x_0 \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset V$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $V(x)$ l'ensemble des voisinages de x.

Définition 1.3.9 (Voisinage) *Soit $a \in \mathbb{R}$ et V une partie non vide $\mathbb{R}$. On dit que V est un voisinage de a si :*

- *dans le cas où a est fini (c'est-à-dire si $a \in \mathbb{R}$ V contient un intervalle ouvert contenant a,*
- *dans le cas où a est infini, V continent un intervalle du type $[b; +\infty[$ ou $]-\infty, b]$ avec $b \in \mathbb{R}$*

Exemples Soit $a = 5$ et on définit les intervalles

$$V_1 = [4; 6] \text{ et } V_2 = [4; 10] \cup \mathbb{Q},$$

Menguelti Ali

D'où les intervalles V_1 et V_2 sont des voisinages de a car a appartient bien aux intervalles. Si

$$V_0 = [4; 10] \cap \mathbb{Q}$$

n'est pas un voisinage car il ne contiennt aucun intervalle, V' ne peut être au voisinage d'aucun point de $\mathbb{R}$.

Le plus simple de tous les ensembles infinis est l'ensembles des entiers naturels

Définition 1.3.10 *Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $a \in A$. On dit que a est un point d'accumulation si tout voisinage de a contient un point de A autre que a. C'est à dire*

$$\forall V \in V(a), \; V \cap A \backslash \{a\} \neq \varnothing$$

où bien

$$\forall r > 0, \quad]a - r, a + r[\cap (A \backslash \{a\}) \neq \varnothing$$

Définition 1.3.11 *Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $a \in A$. On dit que a est un point adhérent si tout voisinage de a contient un point de A. C'est à dire*

$$\forall V \in V(a) \;\; V \cap A \neq \varnothing$$

où bien

$$\forall r > 0, \quad]a - r, a + r[\cap A \neq \varnothing$$

Remarque

1. Tout point de A est adhérent à A.
2. Tout point d'accumulation de A est un point adhérent à A.
3. Un point adhérent à A n'est pas nécéssairement un point d'accumulation de A.

Définition 1.3.12 *Un point adhérent qui n'est pas un point d'accumulation est appelé un point* ***isolé****. a isolé.si il existe un voisinage V de a telque*

$$V \cap A = \{a\}$$

Définition 1.3.13 *L'ensemble des points adhérents est appelé adhérence ou fermeture de A, on le note par $\bar{A}$.*

Définition 1.3.14 *Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $a \in A$. On dit que a est un point* ***intérieur*** *à A s'il exister $r > 0$ tel que $]a - r, a + r[\subset A$.*

Définition 1.3.15 *L'ensemble des points intérieur à A est appelé* ***intérieur*** *de A et il est noté $\mathring{A}$. Autrement dit l'intérieur de A est la réunion de tous les ouverts contenus dans A*

$$\mathring{A} = \bigcup_{U \in O; U \subset A} U$$

Proposition 1.3.16 *. Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $a \in A$. Pour que a soit un point d'accumulation, il faut et il suffit qu'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant les conditions suivantes :*

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \in A$
2. $a_n \to a$ *lorsque* $n \to +\infty$
3. $\forall n; m \in \mathbb{N}$ *si* $n \neq m$ *alors* $a_n \neq a_m$

Proposition 1.3.17 *Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $a \in A$. Pour que a soit un point adhérent, il faut et il suffit qu'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de A qui converge vers a lorsque n tend vers l'infini*

1.4 Nombres complexes

Définition 1.4.1 *Il existe un ensemble $\mathbb{C}$ et des opérations $+$ et $\times$ tels que*

(1) $\mathbb{C}$ *contient* $\mathbb{R}$.

(2) $\mathbb{C}$ *contient un élément noté $i \notin \mathbb{R}$ tel que $i \times i = -1$.*

(3) *Les éléments de $\mathbb{C}$ s'écrivent de façon unique de la forme $a + ib$, où $a; b \in \mathbb{R}$.*

(4) *Nous avons les règles de calcul pour deux nombres$z = a + ib$ et $w = c + id$, où $a; b$; $c; d \in \mathbb{R}$*

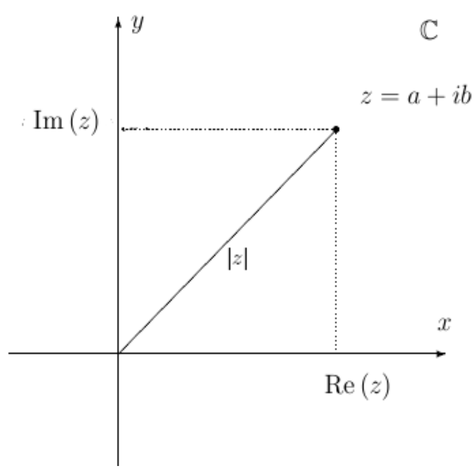
$$z + w = (a + c) + i(c + d) \quad \text{et} \quad z \times w = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

Définition 1.4.2

Pour un nombre complexe

$$z = a + ib,$$

où $a; b \in \mathbb{R}$, *le réel* a *est appelé* ***partie réelle*** *de* z, *notée également* $a = \mathrm{Re}\,(z)$, *et* b ***partie imaginaire***, *notée* $b = \mathrm{Im}\,(z)$. *Un nombre complexe est dit réel si* $\mathrm{Im}\,(z) = 0$. *Il est dit imaginaire (pur) si* $\mathrm{Re}\,(z)\,, = 0$. *L'ensemble* $\mathbb{C}$ *est appelé l'ensemble des nombres complexes,* $z \in \mathbb{C}$ *est un nombre complexe. L'ensemble des nombres imaginaires purs est noté* $i\mathbb{R}$, *celui des nombres réels est noté* $\mathbb{R}$



Chaque nombre complexe correspond à un point du plan (Gauss et Argand fûrent les premiers à utiliser cette interprétation en 1799). Ce point $(\mathrm{Re}\,(z)\,\mathrm{Im}\,(z))$ est appelé **affixe** de z. Les parties réelle et imaginaire de z sont l'abscisse et l'ordonnée de l'affixe de z.

Un avertissement avant de commencer L'intérêt principal des nombres complexes est le fait que tous les éléments possèdent une "racine carrée" (voir la prochaine section) et que les équations polynomiales possèdent toujours des solutions. Cette propriété a un prix. En effet, l'ordre $\leq$ sur $\mathbb{R}$ ne peut pas être étendu à $\mathbb{C}$ de telle sorte que la propriété $|x; y \geq 0 \Rightarrow xy \geq 0$ reste vraie. En effet, raisonnons par contradiction. Supposons que l'ordre puisse être étendu à $\mathbb{C}$. Si $i \geq 0 \Rightarrow (i)^2 \geq 0$, alors $-1 = (i)^2 \geq 0$ ce qui est absurde. Si $i \leq 0$, alors $-i \geq 0$ et le raisonnement précédent montre que $-1 \geq 0$ ce qui est également absurde.

Définition 1.4.3 *Soitz $\in \mathbb{C}$. Notons $z = a + ib$ avec $a; b \in \mathbb{R}^2$.*

1. *Le conjugué de z est le nombre complexe $\overline{z} = a - ib$.*
2. *Le module de z est le nombre réel positif $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.*
3. *Soit $z \in \mathbb{C}^*$ l'argument complexe pricipale de z est l''angle $\theta \in [0, 2\pi[$. il est noté* $\arg(z)$

Proposition 1.4.4 (Propriétés du conjugué) *Soient z et $z' \in \mathbb{C}$*

$$\overline{z' + z} = \overline{z'} + \overline{z} \qquad \mathrm{Re}(z) = \frac{\overline{z} + z}{2} \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2}$$

$$z \in \mathbb{R} \Rightarrow z = \overline{z}, \qquad z \in i\mathbb{R} \Rightarrow z = -\overline{z},$$
$$\overline{\overline{z}} = z \quad , \quad \overline{z'z} = \overline{z'}\,\overline{z}$$

Proposition 1.4.5 (Propriétés du module) *Soient z et $z' \in \mathbb{C}$*

$$|z| = 0 \Rightarrow z = 0 \qquad |zz'| = |z|\,|z'|$$

$$|z| = |\overline{z}| \qquad\qquad z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

$$\overline{\overline{z}} = z \quad , \quad |z|^2 = z\overline{z} \qquad\qquad |\mathrm{Re}(z)| \leq |z| \ \ \textit{et} \ \ |\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$$

$$\textit{Inégalité triangulaire} \ \ ||z| - |z'|| \leq |z' + z| \leq |z| + |z'|$$

Proposition 1.4.6 (Propriétés d'argument) *Soient z et $z' \in \mathbb{C}$*

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$$

$$\arg(xz) = \arg(z) \ \ \textit{si } x > 0$$

$$\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$$

Menguelti Ali

1.4.1 La fonction exponentielle complexe et écriture polaire

Nous aimerions écrire z en fonction de $\arg(z)$ et $|z|$ Pour cela, nous utilisons la fonction exponentielle, dont l'existence est justifiée par le théorème suivant.

Théorème 1.4.7 *Il existe une unique application* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ *telle que*

$$\forall z\ w \in \mathbb{C} \quad \exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$$

$$\forall z\ \in \mathbb{C} \quad \exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$$

$$\exp \ \textit{est continue}$$

De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$z = |z|\, exp[i \arg(z)]$$

Définition 1.4.8 *Un nombre complexe* $z \in \mathbb{C}$ *s'écrit donc de façon unique comme*

$$z = re^{i\theta}$$

où $r > 0$ *et* $\theta \in [0, 2\pi[$. *De façon plus générale, on appelle écriture polaire de* z *toute écriture de la forme*

$$z = re^{i\theta}$$

où $r > 0$ *et* $\theta \in \mathbb{R}$. *Nous avons alors que* $r = |z|$ *et que* $\theta = \arg(z)$.

Définition 1.4.9 *Soit* $z \in \mathbb{C}$. *Un nombre complexe* $w \in \mathbb{C}$ *est une racine n-ième de* z *si*

$$w^n = z.$$

Exemple

Soit $n \geq 2$, notons $U_n = \{z \in \mathbb{C}; z^n = 1\}$, l'ensemble des racines $n-$ième de l'unité. Alors

$$U_n = \left\{ e^{\frac{i2\pi k}{n}} \quad \textit{tel que} \ \ (k = 0 \ldots n-1) \right\}$$

Menguelti Ali

Chapitre 2

Suites numériques

Définition 2.0.10 *Une suite numérique est une application de* $\mathbb{N}$ *vers* $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\rightarrow \quad \mathbb{R} \\ n &\rightarrow \quad u(n)\,, \quad \textit{souvent noté } u_n \end{aligned}$$

La suite sera notée u_n *ou bien* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ou* $(u_n)_{n\geq 0}$

Alors une suite réelle est simplement une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Par contre, on la voit plutôt comme une famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indexée par $\mathbb{N}$ que comme une fonction $n \rightarrow u(n)$. Une suite est la donnée d'une série de nombres dans un ordre précis. En général, on note

u_0 le premier terme de la suite, u_1 le deuxième
u_2 le troisième u_n **le terme général**

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'ensemble des termes de la suite. Il y a deux façons de définire une suite

1. Une suite peut être définie comme une fonction explicite de n.

$$n \rightarrow (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{3}\sqrt{n}\right)$$

2. Par récurrence

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= au_n + b, \quad a, b \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} &= 3u_n^2 \\ v_{n+2} &= av_{n+1} + bv_n + c \qquad\qquad a, , c, b \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

En général

$$\begin{cases} u_0 \text{ } donné \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Récurrences de pas supérieur

$$\begin{cases} u_0, u_1 \text{ } donné \\ u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1}) \end{cases}$$

2.1 Quelques qualificatifs pour les suites réelles

Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite

Constante Si et seulement si tous ses termes ont la même valeur, c'est-à-dire si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n = u_0$$

Croissante Si et seulement si pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} \geq u_n$, c'est-à-dire si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$$

Strictement croissante Si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$$

Décroissante Si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$$

Strictement décroissante si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$$

Monotone Si et seulement si elle est croissante ou décroissante.

Remarque 2.1.1 *Une suite peut être ni croissante ni décroissante (c'est-à-dire elle n'est pas monotone). Par exemple, on peut considérer la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie de la manière suivante*

$$u_n = (-1)^n$$

Périodique Si

$$\exists p \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } u_{n+p} = u_n$$

Majorée si et seulement si tous ses termes sont inférieurs à un certain nombre, c'est-à-dire si et seulement

$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$$

Minorée Si et seulement si tous ses termes sont supérieurs à un certain nombre, c'est-à-dire si et seulement

$$\exists m \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$$

Bornée Si et seulement si u_n est minorée et majorée.

$$\exists m, M \in \mathbb{R}, \text{tel que } \forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M$$

Assez souvent, pour des raisons pratiques, on utilisera plutot la définition suivante

$$\exists A > 0 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq A$$

Il arrive qu'une suite ne soit définie que sur une partie de $\mathbb{N}$: par exemple $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ On sera également amené à réduire la suite aux indices au-delà d'un certain entier n_0 $(u_n)_{n\geq n_0}$. L'expression « à partir d'un certain rang » reviendra souvent dans ce qui suit. Dire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède la propriété P à partir d'un certain rang signifie que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ la possède pour un certain n_0. On dit aussi « P est vraie pour n assez grand ». Voici quelques exemples.

Définition 2.1.2 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de réels. On dit que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est*

1. *Constante à partir d'un certain rang (on dit aussi stationnaire) si*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0,\ u_{n+1} = u_n$$

2. *Croissante à partir d'un certain rang si*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0,\ u_{n+1} \geq u_n$$

3. *Périodique à partir d'un certain rang si*

$$\exists p \in \mathbb{N}^* \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0,\ u_{n+p} = u_n$$

Exemple, la suite

$$u_n = \left[\frac{7}{n+1}\right]$$

est constante à partir du rang $n_0 = 7$. La suite

$$u_n = |n-5|$$

est croissante à partir du rang $n_0 = 5$. La suite

$$u_n = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

est périodique, de période $p = 2$ à partir du rang $n_0 = 2$. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est « majorée à partir d'un certain rang », alors elle est majorée tout court. En effet si

$$u_n \leq M \quad \forall n \geq n_0$$

alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leq \max\{u_0, u_2, \ldots, u_{n_0-1}, u_{n_0}, M\}$$

ce qui montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. De même une suite minorée à partir d'un certain rang est minorée, une suite bornée à partir d'un certain rang est bornée.

2.1.1 Opérations algébriques sur les suites

Soient u_n et v_n deux suites réelles, et λ un nombre réel.

1- On appelle somme de u_n et v_n, et on note $u_n + v_n$, la suite réelle w_n définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = u_n + v_n$$

2- On appelle produit de u_n par le scalaire λ, et on note λu_n, la suite réelle w_n définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \lambda u_n$$

3- On appelle produit de u_n et de v_n, et on note $v_n u_n$, la suite réelle w_n définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = v_n u_n$$

4- Si on suppose de plus que v_n ne s'annule pas (c'est-à-dire que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \neq 0$), on appelle suite inverse de la suite v_n, et on note $\frac{1}{v_n}$, la suite réelle w_n définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \frac{1}{v_n}$$

5- On appelle alors suite quotient de u_n par v_n, la suite $u_n \times \frac{1}{v_n}$, notée

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \frac{u_n}{v_n}$$

2.2 Comportement asymptotique d'une suite réelle

2.2.1 Introduction

Pour un trajet au prix normal de $200DA$ on achète une carte d'abonnement de train à 500 DA et on obtient chaque billet à $100DA$. La publicité affirme

« 50% *de réduction* »

. Qu'en pensez-vous ? Pour modéliser la situation en termes de suites, on pose pour un entier $n \geq 1$

$$\begin{aligned} u_n &= 200n \\ v_n &= 100n + 500 \end{aligned}$$

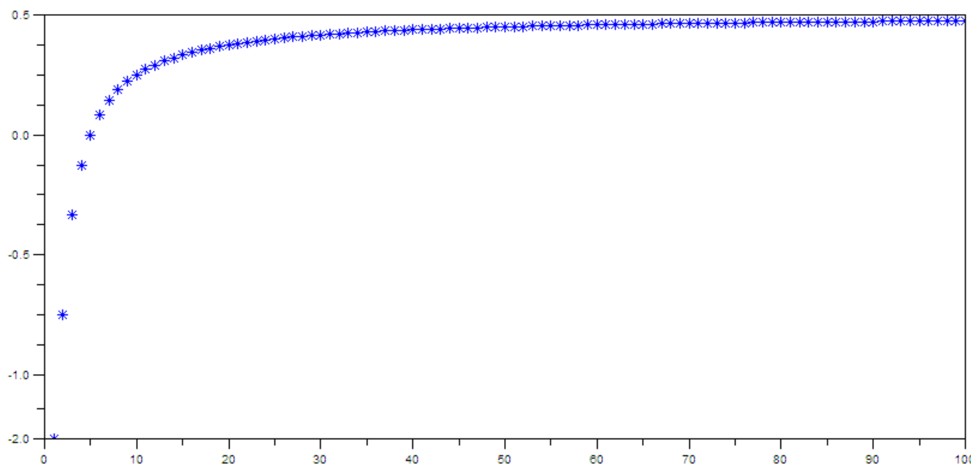
u_n est le prix payé au bout de n achats au tarif plein, et v_n celui au tarif réduit, y compris le prix de l'abonnement. La réduction est donc, en pourcentage :

$$1 - \frac{100n + 500}{200n} = 1 - \frac{n+5}{2n} = \frac{1}{2} - \frac{5}{2n}$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{2n}\right) = \frac{1}{2} \textit{ équivlant à } 50\%$$

Il faut donc une infinité de trajets pour arriver à 50% de réduction !



Nous citons D'Alembert (1765) : "On dit qu'une grandeur est la limite d'une autre grandeur, quand la seconde peut approcher de la première plus près que d'une grandeur donnée, si petite qu'on la puisse supposer." Intuitivement, D'Alembert explique qu'un nombre ℓ est dite limite d'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ si n est suffisamment grand les termes u_n sont aussi proches de ℓ qu'on le souhaite. Ce concept est important et nécessite des précisions. Tout d'abord, "aussi proches qu'on le souhaite" signifie "plus proche que tout nombre $\varepsilon > 0$, i.e. $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. D'autre part, "pour n suffisamment grand" veut dire qu'il existe n_0 tel que l'estimation précédente soit vraie pour tout $n \geq n_0$.

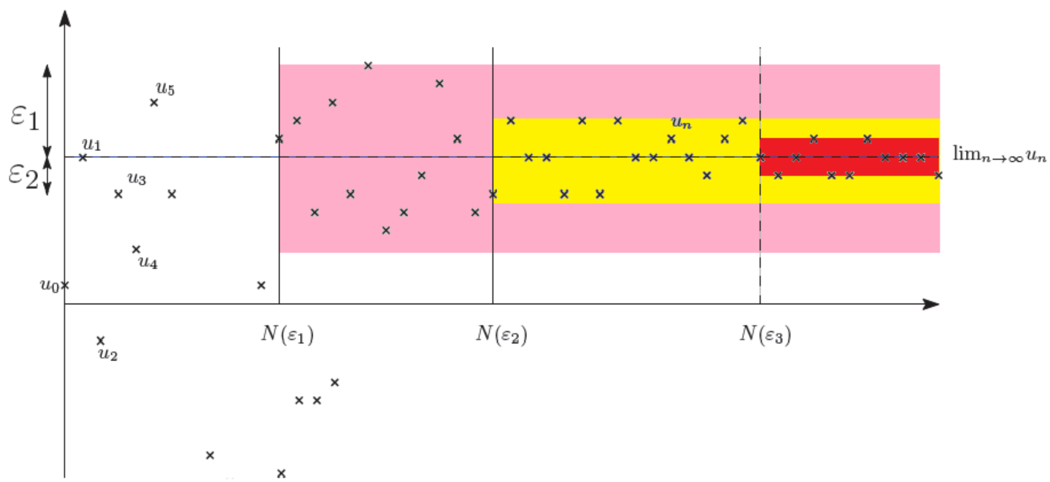
Limite finie

La définition rigoureuse du concept de limite est donc la suivante.

Définition 2.2.1 (D'Alembert 1765, Cauchy 1821) *Soit* $(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *et* $\ell \in \mathbb{R}$ *La suite* $(u_n)_{n\geq 0}$ *converge vers* ℓ *si*

$$\forall \varepsilon \geq 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ ,\forall n \geq n_\varepsilon \ , \ |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Le réel ℓ *est appelé la limite de* $(u_n)_{n\geq 0}$ *et est noté* $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$



Remarque 2.2.2 *Pour montrer que* $(u_n)_{n\geq 0}$ *tend vers* ℓ*, il faut montrer que pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* n_ε *tel que* $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *. Ainsi, on commencera toujours la preuve par la phrase suivante : Soit* $\varepsilon > 0$ *: Cherchons* n_ε *tel que* $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *. Le reste de la preuve consiste à prouver l'existence de* n_ε*. Notez qu'on ne demande pas de trouver le plus petit* n_ε*, ou même d'expliciter* n_ε *en fonction de* ε *mais simplement de prouver qu'il existe.*

Exemple : la suite

$$u_n = \frac{(-1)^n + 3}{n+4}$$

Montrons que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

Soit $\varepsilon \geq 0$ cherchons $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$.On a

$$\left|\frac{(-1)^n + 3}{n+4}\right| \leq \frac{4}{n+4} \leq \varepsilon$$

donc

$$n \geq \frac{\varepsilon}{4} - 4 \Rightarrow n_\varepsilon = \left[\frac{4}{\varepsilon} - 4\right] + 1$$

Remarque 2.2.3 *Afin de prouver qu'une suite est divergente, il nous faut montrer*

$$\forall \ell \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon \geq 0 \ \forall n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ , \exists n \geq n_\varepsilon \ , \ |u_n - \ell| \geq \varepsilon$$

c'est-à-dire que pour tout $\ell \in \mathbb{R}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $N > 0$, il existe $\exists n \geq n_\varepsilon$ avec $|u_n - \ell| \geq \varepsilon$

Exemple La suite

$$u_n = (-1)^n$$

est divergente. En effet soit $\ell \in \mathbb{R}$. Montrons que pour tout $\forall n_\varepsilon > 0$, il existe $n \geq n$ tel que $|u_n - \ell| \geq 1$. Soit $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, si $\ell \leq 0$, alors $|u_{2n_\varepsilon} - \ell| = 1 - \ell \geq 1$. De même, si $\ell \geq 0$, alors $|u_{2n_\varepsilon} - \ell| = 1 + \ell \geq 1$

Limite infinie On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ admet $+\infty$ pour limite, si et seulement si, tout intervalle $[A, +\infty[$, $A \in \mathbb{R}$,contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang N. Une autre façon d'exprimer cette définition est de dire que, quel que soit le nombre réel A, il existe un entier N (qui dépend de A), tel que, pour tout entier n, si $n \geq N$, alors $u_n \geq A$, et ceci s'exprime par la formule quantifiée :

$$(\forall A > 0), (\exists N \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}) \text{ tel que } (\forall n \geq N) \Rightarrow \ u_n \geq A$$

ou encore, sous forme simplifiée :

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N \Rightarrow \ u_n \geq A$$

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ admet $-\infty$ pour limite, si et seulement si, tout intervalle $]-\infty, B]$,($B \in \mathbb{R}$),contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang N, autrement dit si et seulement si

$$(\forall B > 0), (\exists N \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}) \text{ tel que } (\forall n \geq N) \Rightarrow \ u_n \leq -B$$

Il est clair, au vu de ces définitions que $(u_n)_{n\geq 0}$ ne peut admettre à la fois $+\infty$ et $-\infty$ pour limite.

Exemple : la suite

$$u_n = n^2 + 1$$

Montrons que

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

Soit $A > 0$ cherchons $\exists N_A \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > A$ pour tout $\forall n \geq N$.On a

$$u_n > A$$

donc

$$n^2 + 1 > A$$

donc

$$n \geq \sqrt{A-1} \Rightarrow N_A = \left[\sqrt{A-1}\right] + 1$$

Voici quelques exemples classiques.

Suites arithmétiques :

$$u_n = u_0 + a\ n \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty \quad si \quad a > 0 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u_0 \quad si \quad a = 0 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty \quad si \quad a < 0 \end{cases}$$

Suites géométriques :

$$u_n = u_0 r^n \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0\ est\ constante\ (tend\ vers\ 0). \\ ne\ converge\ pas.r < -1 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0 \quad si \quad -1 < r < 1 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u_0\ est\ constante\ (tend\ vers\ u_0) \\ r > 1 \Rightarrow \begin{cases} -\infty\ si\ u_0 < 0 \\ +\infty\ si\ u_0 > 0 \end{cases} \end{cases}$$

Définition 2.2.4 (Suite extraite) *Soient $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ deux suites réelles. On dit que v_n est extraite de u_n si et seulement si il existe une fonction ϕ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, strictement croissante, telle que, pour tout entier naturel n, on ait $v_n = u_{\phi(n)}$. Un exemple de suites extraites est donné par la suite des termes de rang pair et la suite des termes de rang impair définies respectivement par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$*

Pour bien comprendre la notion de convergence, nous allons en étudier quelques conséquences faciles, rassemblées dans la proposition suivante.

Proposition 2.2.5

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels :

1. *Si une suite est convergente, sa limite est unique.*
2. *Si $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers une limite finie, alors $(u_n)_{n\geq 0}$ est bornée*
3. *Si $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ, alors toute suite extraite de $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ*
4. *Si les deux suites extraites $(u_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ (finie ou infinie), alors $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ.*

Démonstration :

1. On procède par l'absurde. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite convergente ayant deux limites $\ell \neq \ell'$ Choisissons $\varepsilon \geq 0$ tel que $\varepsilon < \dfrac{|\ell' - \ell|}{2}$. Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$, il existe N_1 tel que $n \geq N_1$ implique $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. De même $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell'$ il existe N_2 tel que $n \geq N_2$ implique $|u_n - \ell'| \leq \varepsilon$. Notons $N = \max(N_1, N_2)$, on a alors pour ce N :
$$\frac{|\ell' - \ell|}{2} = \frac{|\ell' - u_n + u_n - \ell|}{2}$$
d'après l'inégalité triangulaire
$$\frac{|\ell' - \ell|}{2} = \frac{|\ell' - u_n|}{2} + \frac{|\ell - u_n|}{2} < \varepsilon$$
On vient d'aboutir à l'inégalité
$$\varepsilon < \varepsilon$$
qui est impossible. Bilan : notre hypothèse de départ est fausse et donc $\ell' = \ell$.
2. Fixons $\varepsilon > 0$ et $n_0$tel que un reste dans l'intervalle $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ pour tout $n > n_0$. Alors :
$$\forall n \in \mathbb{N} \ \min\{\ell + \varepsilon, u_0, u_1 \dots u_{n_0-1}\} \leq u_n \leq \max\{\ell + \varepsilon, u_0, u_1 \dots u_{n_0-1}\}$$
Attention la réciproque est fausse. La suite définie par $u_n = (-1)^n$ est bornée et diverge

3. Soit $\left(u_{\varphi(k)}\right)_{k\geq 0}$ une suite extraite de $(u_n)_{n\geq 0}$. Comme φ est strictement croissante, pour tout n_0 il existe k_0 tel que $\varphi(k) > n_0$ pour tout $k > k_0$. Si tous les $(u_n)_{n\geq 0}$ sont dans l'intervalle $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ à partir du rang n_0, tous les $u_{\varphi(k)}$ sont dans le même intervalle à partir du rang k_0.
4. Fixons $\varepsilon > 0$. Soit k_0 tel que u_{2k} reste dans l'intervalle $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ pour tout $k > k_0$. Soit k_0' tel que u_{2k+1} reste dans l'intervalle $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ pour tout $k > k_0$. Alors pour tout

$$n > \max\{2k_0' + 1, 2k_0\} \qquad u_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$$

   La démonstration pour une limite infinie est analogue.

2.2.2 La droite numérique achevée

Afin d'unifier les énoncés, introduisons l'ensemble noté $\overline{\mathbb{R}}$ défini par

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

On prolonge de façon naturelle l'ordre de $\overline{\mathbb{R}}$ à $\mathbb{R}$ en décidant que pour tout nombre réel x, on a

$$-\infty < x < +\infty$$

Puis on prolonge, mais partiellement, l'addition et la multiplication de $\overline{\mathbb{R}}$ à $\mathbb{R}$ par les régles suivantes, en posant que ces opérations restent commutatives et que pour tout nombre réel x,

$$x+(+\infty) = +\infty, x+(-\infty) = -\infty,\ x(+\infty) = \begin{cases} +\infty \ si \ x > 0 \\ -\infty \ si \ x < 0 \end{cases},\ x(-\infty) = \begin{cases} -\infty \ si \ x > 0 \\ +\infty \ si \ x < 0 \end{cases}$$

et enfin que

$$\begin{aligned} (+\infty) + (+\infty) &= +\infty,\ (-\infty) + (-\infty) = -\infty \\ (+\infty)(+\infty) &= +\infty,\ (-\infty)(-\infty) = +\infty, (+\infty)(-\infty) = -\infty \end{aligned}$$

On prolonge aussi la notion d'inverse en posant :

$$\frac{1}{+\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

On remarquera que n'ont pas été définis la somme $(+\infty)+(-\infty)$ et les produits $(\pm\infty)\ 0$. De même ne sont pas définis les quotients

$$\frac{0}{0},\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty}.$$

Ces différentes expressions correspondent à ce que l'on appelle les formes indéterminées

Enfin on dira qu'une suite u_n admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ pour exprimer qu'elle admet $(+\infty)$ *ou* $(-\infty)$ ou un nombre réel ℓ pour limite.

2.2.3 Opérations sur les limites

Proposition 2.2.6 *Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites réelles admettant respectivement ℓ ℓ' pour limites dans $\overline{\mathbb{R}}$*

1. *(Somme de limites) La suite $(u_n+v_n)_{n\geq 0}$ est convergente et*

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=\lim_{n\to+\infty}u_n+\lim_{n\to+\infty}v_n=\ell+\ell'$$

2. *(Produit de limites) La suite $(u_nv_n)_{n\geq 0}$ est convergente et*

$$\lim_{n\to+\infty}(u_nv_n)=\lim_{n\to+\infty}u_n\lim_{n\to+\infty}v_n=\ell\ \ell'$$

3. *(Quotient de limites) Supposons que $\lim_{n\to+\infty}u_n\neq 0$. Alors il existe $m>N$ tel que $u_n\neq 0$ pour $n\geq m$. De plus, la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\geq m}$ est convergente et*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{u_n}=\frac{1}{\lim_{n\to+\infty}u_n}=\frac{1}{\ell}$$

Si $\ell=0$ et si les termes de la suite u_n sont strictement positifs (resp. strictement négatifs) à partir d'un certain rang m, la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\geq m}$ admet $+\infty$ (resp. $-\infty$) pour limite.

4. *(Valeur absolue) La suite $|u_n|$ est convergente et*

$$\lim_{n\to+\infty}|u_n|=\left|\lim_{n\to+\infty}u_n\right|=|\ell|$$

Démonstration

1. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque u_n converge vers ℓ, il existe $N_1 > 0$ tel que

$$\forall n \geq N_1, \quad |\ell - u_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

De même, si v_n converge vers ℓ', il existe $N_2 > 0$ tel que

$$\forall n \geq N_2, \quad |\ell - v_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Posons $N = \max\{N1; N_2\}$. Soit $n \geq N$, l'inégalité triangulaire implique

$$|u_n - \ell + v_n - \ell'| \leq \; |\ell - u_n| + \; |\ell' - v_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ce qui conclut la preuve.

2. (Produit de limites) Puisque v_n converge elle est donc majorée. Ainsi, il existe $M > 0$ tel que

$$|v_n| \leq M$$

Soit $\varepsilon > 0$ On cherche à majorer la valeur absolue de $u_n v_n - \ell\ell'$ par ε.Pour cela on va tout d'abord utiliser l'identite

$$ab - \alpha\beta = ab - b\alpha + b\alpha - \alpha\beta = b\,(a - \alpha) + \alpha\,(b - \beta)$$

On obtient si on pose $a = u_n \; \alpha = \ell \;, b = v_n, \beta = \ell'$

$$|v_n\,(u_n - \ell) + \ell\,(v_n - \ell')|$$

On peut alors majorer cette expression en utilisant l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} |v_n\,(u_n - \ell) + \ell\,(v_n - \ell')| &\leq |v_n|\,|u_n - \ell| + |\ell|\,|v_n - \ell'| \\ &\leq M\,|u_n - \ell| + |\ell|\,|v_n - \ell'| \end{aligned}$$

Exprimons alors que u_n converge vers ℓ, et v_n vers ℓ'. Il existe un entier q tel que, pour tout entier $n \geq q$, on ait

$$|u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{M + |\ell|}$$

et il existe un entier q' tel que, pour tout entier $n \geq q\prime$, on ait

$$|v_n - \ell'| \leq \frac{\varepsilon}{M + |\ell|}$$

Alors, si $n \geq \max(q, q')$, on a

$$|u_n v_n - \ell\ell'| \leq M \frac{\varepsilon}{M + |\ell|} + |\ell| \frac{\varepsilon}{M + |\ell|} = \varepsilon$$

La quantité $|u_n v_n - \ell\ell'|$ est donc inférieure à ε à partir d'un certain rang. Cela montre que la suite $u_n v_n$ converge vers $\ell\ell'$.

3. Si u_n converge vers $\ell \neq 0$, il existe un entier m tel que, pour tout entier $n \geq m$, on ait

$$|u_n - \ell| \leq \frac{|\ell|}{2}$$

En écrivant

$$u_n = \ell + u_n - \ell$$

et en utilisant l'inégalité triangulaire

$$|a + b| \geq ||a| - |b||$$

on obtient :

$$|u_n| \geq ||\ell| - |u_n - \ell|| \geq |\ell| - |u_n - \ell| \geq \frac{|\ell|}{2} > 0$$

Donc u_n n'est pas nul si $n \geq m$. De plus, pour tout $n \geq m$

$$\left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell} \right| = \frac{|u_n - \ell|}{|u_n \ell|} \leq \frac{2\,|u_n - \ell|}{|\ell|^2}$$

Soit alors $\varepsilon \geq 0$. Il existe un entier m' tel que, pour tout entier $n \geq m'$, on ait

$$|u_n - \ell| \leq \frac{|\ell|^2 \varepsilon}{2}$$

Alors, si $n \geq \max(m, m')$, on a

$$\left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell} \right| \leq \varepsilon$$

On pourra traiter le cas où ℓ est infinie et le cas où $\ell = 0$ à titre d'exercice.

Exemple 1

1. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$. Appelons v_n la moyenne arithmétique (Somme dc Césaro) :

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots u_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$$

Montrer que $(v_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels strictement positifs convergeant vers ℓ.

2. Appelons w_n la moyenne géométrique

$$w_n = \sqrt[n]{u_1 u_2 \dots u_n}$$

Montrer que $(w_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ

Solution

1. Soit $\varepsilon > 0$, Puisque $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ alors on peut trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0, \quad |u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

SSoit $n \geq n_0$

$$\begin{aligned}
|v_n - \ell| &= \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k - \ell\right| = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n} u_k - n\ell\right| = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}(u_k - \ell)\right| \\
&= \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n_0}(u_k - \ell) + \sum_{k=n_0+1}^{n}(u_k - \ell)\right| \\
&\leq \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n_0}(u_k - \ell)\right| + \frac{1}{n}\left|\sum_{k=n_0+1}^{n}(u_k - \ell)\right| \\
&\leq \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n_0}(u_k - \ell)\right| + \frac{(n - n_0)\,\varepsilon}{2n} \\
&\leq \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n_0}(u_k - \ell)\right| + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

On pose

$$A_n = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n_0}(u_k - \ell)\right| \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} A_n = 0 \text{ une somme finie}$$

donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \ n \geq n_1,\quad |A_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Posons $N = \max(n_1, n_0)$ on a

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \ n \geq N,\quad |v_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Ce qui montre que $(v_n)_{n\geq 0}$ est convergente et tend vers ℓ.

2. Posons

$$x_n = \ln w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(u_k)$$

qui n'est autre que la moyenne arithmétique de la suite $(\ln(u_n))_{n\geq 1}$ converge donc vers la même limite que la suite $\ln(u_n)$. Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \ln w_n = \lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = \ln(\ell)$$

donc

$$\ln\left(\lim_{n\to+\infty} w_n\right) = \ln(\ell) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} w_n = \ell$$

Proposition 2.2.7 *Si la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ alors toute suite extraite de $(u_n)_{n\geq 0}$ converge également vers ℓ.*

Preuve : Soit ϕ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans lui-même. On montre tout d'abord par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $\phi(n) \geq n$. C'est vrai pour $n = 0$, puisque $\phi(0)$ appartient à $\mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang n. On a alors, puisque ϕ est strictement croissante, $\phi(n+1) \geq \phi(n) \geq n$.

Mais, puisque $\phi(n+1)$ est un entier strictement supérieur à n, il est supérieur ou égal à $n+1$, ce qui montre la propriété au rang $n+1$.

Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ une suite extraite de $(u_n)_{n\geq 0}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{\phi(n)}$). Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ, on peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Comme pour tout n, $\phi(n) \geq n$, on a : $\phi(n) \geq \phi(N) \geq N$. En conséquence

$$|v_n - \ell| = \left|u_{\phi(n)} - \ell\right| \leq \varepsilon$$

Remarque 2.2.8 *En pratique, on utilise surtout la conséquence suivante : si une suite* $(u_n)_{n\geq 0}$ *admet deux suites extraites qui ne convergent pas vers la même limite alors* $(u_n)_{n\geq 0}$ *n'est pas convergente. si* $(u_n)_{n\geq 0}$ *est une suite divergente qui tend vers* $+\infty$ *ou* $-\infty$ *alors toute suite extraite de*$(u_n)_{n\geq 0}$ *est divergente, et tend vers la même chose.*

Proposition 2.2.9 *Soit* $(u_n)_{n\geq 0}$ *une suite telle que les deux suites extraites* $(u_{2n})_{n\geq 0}$ *et* $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ *convergent vers la même limite* $\ell \in \mathbb{R}$. *Alors* $(u_n)_{n\geq 0}$ *converge également vers* ℓ. *Autrement dit toute sous-suite extraite d'une suite convergente à la même limite.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(u_{2n})_{n\geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ convergent vers ℓ, on peut trouver 2 entiers N_1 et N_2 tels que

$$\forall n \geq N_1 \quad |u_{2n} - \ell| \leq \varepsilon$$

$$\forall n \geq N_2 \quad |u_{2n+1} - \ell| \leq \varepsilon$$

Soit la suite $(u_p)_{p\geq 0}$ constitué des u_{2n} et u_{2n+1}. Si $p = 2n$ alors $n \geq N_1 \Rightarrow p \geq 2N_1$ Si $p = 2n+1$ alors $n \geq N_2 \Rightarrow p \geq 2N_2 + 1$.On prend donc $p \geq \max(2N_1, 2N_2 + 1)$ pour assurer la convergence des u_p vers ℓ. ■

Le théorème suivant est souvent trés utile pour montrer qu'une suite a une limite donnée.

Théorème 2.2.10 (Théorème des gendarmes)

1. *Soient* $(u_n)_{n\geq 0}, (v_n)_{n\geq 0}$ *deux suites convergentes telles que*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \leq v_n$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n$$

2. *Soient* $(u_n)_{n\geq 0}, (v_n)_{n\geq 0}$ *et* $(w_n)_{n\geq 0}$ *sont trois suites telles que*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \leq v_n \leq w_n$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = \ell \in \mathbb{R}$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$$

3. *Soient* $(u_n)_{n\geq 0}, (v_n)_{n\geq 0}$ *deux suites telles que*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \leq v_n$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$ on ait :

$$\begin{cases} u_n \leq v_n \leq w_n \\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon \\ |w_n - \ell| \leq \varepsilon \end{cases}$$

En particulier on a

$$\begin{cases} u_n \leq v_n \leq w_n \\ -\varepsilon + \ell \leq u_n \leq \varepsilon + \ell \\ -\varepsilon + \ell \leq w_n \leq \varepsilon + \ell \end{cases}$$

Ce qui donne

$$-\varepsilon + \ell \leq v_n \leq \varepsilon + \ell \Leftrightarrow |v_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Remarque 2.2.11 *Soit* $(u_n)_{n\geq 0}$ *une suite convergente telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n \geq 0$$

Attention : si $(u_n)_{n\geq 0}$ *est une suite convergente telle que :* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$, *on ne peut affirmer que la limite est strictement positive mais seulement que* $\lim_{n\to+\infty} u_n \geq 0$. *Par exemple la suite* $(u_n)_{n\geq 0}$ *donnée par* $u_n = \dfrac{1}{1+n}$ *est à termes strictement positifs, mais converge vers zéro.*

Exercice 2.2.1 *1. Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de terme général*

$$u_n = 2 + \frac{\sin(n)}{n+2}$$

Avec l'application du théorème des « gendarmes »

2. *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par*

$$u_n = \frac{2n+1}{n+2}$$

3. *En utilisant la définition de la limite montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$.*
4. *Trouver explicitement un rang à partir du quel*

$$1,999 \leq u_n \leq 2,001$$

Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de terme général :

$$\frac{n+\cos(n)}{n-\sin(n)}$$

et trouver un entier N tel qu e si

$$\forall n \geq N, on\ a\ \ |u_n - \ell| \leq 10^{-2}.$$

5. *La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de terme général $(-1)^n e^n$ admet-elle une limite ? Et la suite de terme général $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\geq 0}$*
6. *Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de terme général $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Idem avec*
$$v_n = \frac{\cos(n)}{\sin(n) + \ln(n)} \quad et \quad w_n = \frac{n!}{n^n}$$
7. *Encadrer la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$$

Que peut-on en déduire ?

Solution

1. Calculons la limite de la suite

$$u_n = 2 + \frac{\sin(n)}{n+2}$$

On a

$$\begin{aligned} -1 &\leq \sin(n) \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{n+2} \leq \frac{\sin(n)}{n+2} \leq \frac{1}{n+2} \\ &\Rightarrow 2 - \frac{1}{n+2} \leq 2 + \frac{\sin(n)}{n+2} \leq 2 + \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

donc

$$v_n = 2 - \frac{1}{n+2} \leq u_n \leq 2 + \frac{1}{n+2} = w_n$$

On a

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = 2 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 2 \quad (\textit{théorème des « gendarmes»})$$

2. En utilisant la définition de la limite montrons que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n+2} = 2$.

$$\forall\varepsilon \geq 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ ,\forall n \geq n_\varepsilon \ , \ |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

alors

$$\ell = 2$$

soit $\varepsilon \geq 0$ on cherche un $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_\varepsilon$, $|u_n - 2| \leq \varepsilon$. Alors

$$\left|\frac{2n+1}{n+2} - 2\right| \leq \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{(2n+1) - 2(n+2)}{n+2}\right| \leq \varepsilon$$

donc

$$\left|\frac{3}{n+2}\right| \leq \varepsilon \Rightarrow n \geq \frac{3}{\varepsilon} - 2$$

alors

$$n_\varepsilon = \left[\frac{3}{\varepsilon} - 2\right] + 1$$

donc

$$\forall\varepsilon \geq 0 \ \exists n_\varepsilon = \left[\frac{3}{\varepsilon} - 2\right] + 1 \in \mathbb{N} \ ,\forall n \geq \left[\frac{3}{\varepsilon} - 2\right] + 1 \ , \ |u_n - 2| \leq \varepsilon$$

3. Trouvons explicitement un rang à partir du quel

$$1,999 \leq u_n \leq 2,001 \Leftrightarrow |u_n - 2| \leq 10^{-2}$$

donc

$$n_{10^{-2}} = \left[\frac{3}{10^{-2}} - 2\right] + 1 = 299$$

4. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de terme général $(-1)^n e^n$ n'admet pas une limite en effet la suite $(-1)^n$ n'admet pas une limite. Par contre la suite de terme général $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\geq 0}$ admet pas une limite en effet

$$\frac{1}{u_n} = (-1)^n e^{-n}$$

et la suite $(-1)^n$ est bornée donc

$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^n e^{-n} = 0$$

5. Déterminons les limites des suites de terme général

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \quad v_n = \frac{\cos(n)}{\sin(n) + \ln(n)} \quad et \quad w_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right) = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(n)}{\sin(n) + \ln(n)}$$

On a

$$-1 \leq \cos(n) \leq 1 \Rightarrow \ln(n) - 1 \leq \sin(n) \leq \ln(n) + 1, \ \forall n \geq 3$$

alors

$$\frac{1}{\ln(n) + 1} \leq \frac{1}{\sin(n) + \ln(n)} \leq \frac{1}{\ln(n) - 1}$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n) + 1} \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sin(n) + \ln(n)} \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n) - 1}$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sin(n)+\ln(n)} = 0$$

et la suite $\cos(n)$ est bornée donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(n)}{\sin(n)+\ln(n)} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n}$$

pour calcule cette limite on cherche à la comparée avec une suite géométrique alors on calcule la limite de quotient $\dfrac{w_{n+1}}{w_n}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{w_{n+1}}{w_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}\,n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n\to+\infty} \exp\left[-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = \lim_{n\to+\infty} \exp\left[-\frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}}\right]$$

On pose $t = \dfrac{1}{n}$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}} = \lim_{t\to0} \frac{\ln(1+t)-\ln(1+0)}{t-0} = \left.\frac{1}{1+t}\right|_{t=0} = 1$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n\to+\infty} \exp\left[-\frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}}\right] = e^{-1}$$

on applique la définition d'une limite finie on obtien

$$\forall\varepsilon\geq0\ \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}\ tel\ que\ \forall n\geq n_\varepsilon \qquad \left|\frac{w_{n+1}}{w_n}-e^{-1}\right|\leq\varepsilon$$

alors
$$\left|\frac{w_{n+1}}{w_n}-e^{-1}\right|\leq\varepsilon\Rightarrow-\varepsilon\leq\frac{w_{n+1}}{w_n}-e^{-1}\leq\varepsilon$$
donc
$$-\varepsilon+e^{-1}\leq\frac{w_{n+1}}{w_n}\leq\varepsilon+e^{-1}$$
on a $w_n>0\ \forall n\in\mathbb{N}$ alors
$$\left(-\varepsilon+e^{-1}\right)w_n\leq w_{n+1}\leq\left(\varepsilon+e^{-1}\right)w_n$$
ansi
$$\left(-\varepsilon+e^{-1}\right)^{n-n_\varepsilon}w_{n_\varepsilon}\leq w_{n+1}\leq\left(\varepsilon+e^{-1}\right)^{n-n_\varepsilon}w_{n_\varepsilon}$$
donc
$$\left(-\varepsilon+e^{-1}\right)^{n-n_\varepsilon-1}w_{n_\varepsilon}\leq w_n\leq\left(\varepsilon+e^{-1}\right)^{n-n_\varepsilon-1}w_{n_\varepsilon}$$
on pose $\varepsilon=\dfrac{e^{-1}}{2}$ on obtien
$$\left(\frac{e^{-1}}{2}\right)^{n-n_\varepsilon-1}w_{n_\varepsilon}\leq w_n\leq\left(\frac{3}{2}e^{-1}\right)^{n-n_\varepsilon-1}w_{n_\varepsilon}$$
On a
$$Q_n=\left(\frac{3}{2}e^{-1}\right)^{n-n_\varepsilon-1}w_{n_\varepsilon}\ et\ \ Q_n'=\left(\frac{e^{-1}}{2}\right)^{n-n_\varepsilon-1}w_{n_\varepsilon}$$
deux suites géométriques de raison respectivement
$$\frac{3}{2}e^{-1}<1\ et\ \frac{e^{-1}}{2}<1$$
d'ou
$$\lim_{n\to+\infty}Q_n\leq\lim_{n\to+\infty}w_n\leq\lim_{n\to+\infty}Q_n'$$
le théorème des gendarmes (2.2.10) on obtien
$$\lim_{n\to+\infty}w_n=0$$
car
$$\frac{3}{2}e^{-1}<1\ et\ \left(\frac{e^{-1}}{2}\right)^{n-n_\varepsilon-1}<1$$
Nous pouvons généralise ce résultat par le théorème suivant

Théorème 2.2.12 (Critère de d'Alembert) Suite comparable à une suite géométrique *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite tel que $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang. On suppose que la série $\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)_{n\geq 0}$ est convergente et on note ℓ sa limite.*

1. *Si $\ell < 1$ alors $(u_n)_{n\geq 0}$ converge et $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.*
2. *Si $\ell > 1$ alors $(u_n)_{n\geq 0}$ diverge et $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$.*
3. *Si $\ell = 1$ on ne peut rien dire (on dit, dans ce cas, que c'est un cas douteux).*

1. Encadrent de suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$$

Répondons d'une manière générale. Soit $(a_k)_{k\geq 1}$ une suite numérique alors

$$\forall t, s \in \mathbb{N} \quad \inf_{s\leq k\leq t}(a_k) \leq a_k \leq \sup_{s\leq k\leq t}(a_k)$$

donc

$$\sum_{k=s}^{k=t} \inf_{s\leq k\leq t}(a_k) \leq \sum_{k=s}^{k=t} a_k \leq \sum_{k=s}^{k=t} \sup_{s\leq k\leq t}(a_k)$$

on voit que $\inf_{s\leq k\leq t}(a_k)$ et $\sup_{s\leq k\leq t}(a_k)$ est indépendants de k en effet l'ensemble

$$\{a_s, a_{s+1}, \dots a_{k-1}, a_k\}$$

est finie. D'où

$$\sum_{k=s}^{k=t} \inf_{s\leq k\leq t}(a_k) = \underbrace{(t-s+1)}_{\text{le nombre des termes}} \inf_{s\leq k\leq t}(a_k) \quad et \quad \sum_{k=s}^{k=t} \sup_{s\leq k\leq t}(a_k) = \underbrace{(t-s+1)}_{\text{le nombre des termes}} \sup_{s\leq k\leq t}(a_k)$$

donc

$$(t-s+1) \inf_{s\leq k\leq t}(a_k) \leq \sum_{k=s}^{k=t} a_k \leq (t-s+1) \sup_{s\leq k\leq t}(a_k)$$

alors si on pose

$$a_k = \frac{1}{n^2+k^2}$$

donc

$$n \inf_{0\leq k\leq n}(a_k) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2} \leq n \sup_{1\leq k\leq n}(a_k) \Rightarrow \frac{n}{n^2+n^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2} \leq n\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

d'où

$$\frac{1}{2n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2} \leq \frac{1}{n}$$

Le théorème des gendarmes donne

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2} = 0$$

2.3 Suites monotones à valeurs dans $\mathbb{R}$

Le théorème suivant constitue la propriété de base concernant les suites monotones. Il représente notre principal outil pour prouver une convergence. Lorsque vous faites face à une suite, commencez par vérifier si elle n'est pas monotone.

Théorème 2.3.1 (Convergence des suites monotones) *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle*

1. *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et majorée donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. De plus,*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \sup(u_n) = \sup\{u_n, n\in\mathbb{N}\}$$

2. *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ decroissante et minorée donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. De plus,*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \inf(u_n) = \inf\{u_n, n\in\mathbb{N}\}$$

Démonstration. Notons

$$A = \{u_n, n\in\mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$$

Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, disons par le réel M, l'ensemble A est majoré par M, et de plus il est non vide. Donc d'après le théorème (1.2.13) du chapitre sur les réels, l'ensemble A admet une borne supérieure : notons $\ell = \sup(A)$. Montrons que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell = \sup(A).$$

Soit $\varepsilon \geq 0$. Par la caractérisation de la borne supérieure, il existe un élément u_N de A tel que

$$\ell - \varepsilon \leq u_N \leq \ell$$

Mais alors pour $n \geq N$ on a

$$\ell - \varepsilon \leq u_N \leq u_n \leq \ell \quad u_n \textit{ est une suite croissente}$$

et donc

$$|u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

De même

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \inf (u_n) = \inf \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$$

Comme la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée, disons par le réel m, l'ensemble A est minorée par m, et de plus il est non vide. Donc d'après le théorème (1.2.13) du chapitre sur les réels, l'ensemble A admet une borne inférieure : notons $\ell = \inf (A)$. Montrons que

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell = \inf (A) .$$

Soit $\varepsilon \geq 0$. Par la caractérisation de la borne inférieure , il existe un élément u_N de A tel que

$$\ell \leq u_N \leq \ell + \varepsilon$$

Mais alors pour $n \geq N$ on a

$$\ell - \varepsilon \leq u_n \leq u_N \leq \ell + \varepsilon \text{ est une suite décroissent}$$

et donc

$$|u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

On a cette remarque ■

Remarque 2.3.2 *dans le résultat précédent, il suffit que la suite soit croissante (resp. décroissante) à partir d'un certain rang et majorée (resp. minorée), pour qu'elle converge.*

Proposition 2.3.3 *Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Si elle est croissante (resp décroissante) et converge vers un réel ℓ alors elle est majorée (resp. minorée) par ℓ.*

Remarque 2.3.4 *La réciproque est (trés) fausse : Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante et majorée par un réel* ℓ*, elle ne converge pas forcément vers* ℓ *(la preuve : tous les réels* $M \geq \ell$ *sont aussi des majorants, alors que* u_n *a au plus une limite).*

Proposition 2.3.5 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle. Alors*

1. *Si* u_n *est croissante et non majorée, on a* $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
2. *Si* u_n *est décroissante et non minorée, on a* $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Deux exemples Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante : en effet

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

On a

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n\,(n-1)}$$

d'ou

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\,(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$$

alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) &= 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \\ &= 1 - \frac{1}{n}\end{aligned}$$

donc

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 - \frac{1}{n} \Rightarrow 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 - \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

finalement

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2$$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 2 : elle converge.

Suite harmonique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante : en effet

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} > 0$$

Montrons que u_n n'est pas majorée. On a si u_n est majorée alors $u_{\varphi(k)}$ est majorée considérons la sous-suite $(u_{2^k})_{k\geq 0}$

$$u_{2^k} - u_{2^{k-1}} = \sum_{j=1}^{2^k} \frac{1}{j} - \sum_{j=1}^{2^{k-1}} \frac{1}{j} \Rightarrow u_{2^k} - u_{2^{k-1}} = \sum_{j=1}^{2^{k-1}} \frac{1}{j} + \sum_{j=2^{k-1}+1}^{2^k} \frac{1}{j} - \sum_{j=1}^{2^{k-1}} \frac{1}{j}$$

donc

$$u_{2^k} - u_{2^{k-1}} = \sum_{j=2^{k-1}+1}^{2^k} \frac{1}{j} = \frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \frac{1}{2^{k-1}+3} + \ldots + \frac{1}{2^k}$$

on remarque que

$$\underbrace{\frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \frac{1}{2^{k-1}+3} + \ldots + \frac{1}{2^k}}_{2^k - 2^{k-1} = 2^{k-1} \ \ termes}$$

et

$$\forall\, p \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } 1 \leq p \leq 2^k \quad \frac{1}{2^{k-1}+p} \geq \frac{1}{2^k}$$

donc

$$u_{2^k} - u_{2^{k-1}} \geq 2^{k-1}\ \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}$$

$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. En effet

$$u_{2^k} - 1 = u_{2^k} - u_1 = u_2 - u_1 + u_4 - u_2 + u_8 - u_4 + \ldots + u_{2^k} - u_{2^{k-1}} \geq \frac{k}{2}$$

donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante mais n'est pas majorée, donc elle tend vers $+\infty$.

Définition 2.3.6 (Suites adjacentes) *On dit que deux suite réelles* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont adjacentes si :*

1. *L'une est croissante, l'autre est décroissante.*
2. $\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$.

Théorème 2.3.7 (des suites adjacentes) *Si deux suites sont adjacentes, elles convergent dans* $\mathbb{R}$ *et leurs limites sont egales.*

Démonstration. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit croissante (et donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante. Il faut tout d'abord remarquer que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet si l'on fixe $n_0 \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall n \geq n_0, u_n - v_n \geq u_{n_0} - v_{n_0}$$

En passant à la limite $n \to +\infty$ dans cette inégalité, on obtient

$$0 \geq u_{n_0} - v_{n_0}.$$

Montrons maintenant que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ minorée : pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0.$$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par v_0 et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par u_0. D'après la proposition (2.3.1), $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes. Notons ℓ et ℓ' leurs limites respectives. Comme $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, on a $\ell = \ell'$. ∎

2.3.1 Le Théoème de Bolzano-Weierstrass

Nous avons vu que toute suite convergente est bornée et que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée et croissante implique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente. Si on laisse tomber l'hypothése de croissance de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il est facile de trouver des exemples de suites qui convergent et d'autres qui ne convergent pas :

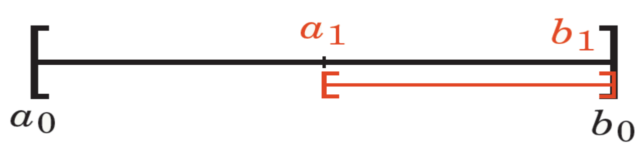
$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} \; converge \quad |u_n| = \frac{1}{n} \; converge$$

$$u_n = (-1)^n \text{ diverge } u_{2k} = 1 \;\; et \; u_{2k+1} = 1 \;\; converges$$

Une suite bornée n'est pas toujours convergente. Nous allons montrer, que de toute suite bornée, nous pouvons extraire une sous-suite convergente. Ce résultat est trés utile car il nous permet tout de même d'isoler des sous-suites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au comportement favorable.

Théorème 2.3.8 (Bolzano-Weierstrass) *De toute suite bornée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut extraire une sous-suite convergente (u_{n_k}).*

Démonstration. On procède par dichotomie. L'ensemble des valeurs de la suite est par hypothèse contenu dans un intervalle $[a, b]$. Posons $a_0 = a$, $b_0 = b$, $\varphi(0) = 0$. Au moins l'un des deux intervalles $\left[a_0, \frac{a_0 + b_0}{2}\right]$ ou $\left[\frac{a_0 + b_0}{2}, b_0\right]$ contient u_n pour une infinité d'indices n. On note $[a_1, b_1]$ un tel intervalle, et on note $\varphi(1)$ un entier $\varphi(1) \geq \varphi(0)$ tel que $u_{\varphi(1)} \in [a_1, b_1]$



En itérant cette construction, on construit pour tout entier naturel n un intervalle $[a_n, b_n]$, de longueur

$$\frac{b-a}{2^n}$$

et un entier $\varphi(n)$ tel que $u_{\varphi(n)} \in [a_n, b_n]$. Notons que par construction la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Comme de plus

$$\lim_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0.$$

les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et donc convergent vers une même limite ℓ. On peut appliquer le théorème « des gendarmes » pour conclure que

$$\lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = \ell$$

d'où le résultat ■

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = (-1)^n$ Alors on peut considérer les deux sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = \cos(n)$. Le théorème affirme qu'il existe une sous-suite convergente, mais il est moins facile de l'expliciter.

Définition 2.3.9 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, α est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une sous-suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers α.*

Proposition 2.3.10 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, Les deux propositions suivantes sont équivalentes*

1. *α est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*
2. *$\forall\varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n_{\varepsilon,N} \geq N \qquad |u_n - \alpha| \leq \varepsilon$*

En mots, la deuxème propriété correspond à la phrase suivante : quelque soit la distance $\varepsilon > 0$ donnée et quelque soit le rang N donné, il existe $n_{\varepsilon,N}$ plus grand que N tel que u_n et α soient à distance inférieure à ε l'un de l'autre.

Définition 2.3.11 (Limite supérieure et limite inférieure) *Soit (u_n) une suite bornée. On définit la suite (v_n) en posant*

$$v_n = \sup\{u_k \quad k \geq n\}$$

La suite v_n est décroissante et minorée, donc convergente. Sa limite est appelée la limite supérieure de la suite (u_n) et on la note par $\overline{\lim_{n\to+\infty}} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sup(u_n)$ La suite définie par

$$w_n = \inf\{u_k \quad k \geq n\}$$

est croisssante et majorée et nous notons sa limite, appelée limite inférieure de la suite (u_n), par $\underline{\lim}_{n\to+\infty} (u_n) = \lim_{n\to+\infty} \inf(u_n)$

$$\limsup(u_n) = \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geq n}(u_k), \liminf(u_n) = \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geq n}(u_k)$$

Nous insistons sur le fait que la suite doit être supposée bornée et réelle. En effet, les supremum de la forme $\sup_{k\geq n}(u_k)$, sont finis puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Ainsi, la suite $\sup_{k\geq n}(u_k)$ est décroissante. Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée, la suite $\sup_{k\geq n}(u_k)$ est minorée et la suite converge donc, ce qui justifie bien la définition.

Proposition 2.3.12 *Les limsup et liminf sont des valeurs d'adhérence. De plus, la limsup est le maximum de l'ensemble des valeurs d'adhérence. La liminf est le minimum des valeurs d'adhérence*

Démonstration. Effectuons la preuve pour la limsup, la preuve pour la liminf fonctionnant pareillement. Nous utilisons la caractérisation (1) de la valeur d'adhérence. Soit $\varepsilon > 0$ et $N \geq 0$. Puisque la suite de terme général $\sup_{k\geq n}(u_k)$ tend vers $\limsup(u_n)$ et est décroissante, il existe $N' > 0$ tel que pour tout $n \geq N'$

$$\limsup(u_n) \leq \sup_{k\geq n}(u_k) \leq \limsup(u_n) + \varepsilon$$

Concentrons nous sur le cas$n = \max\{N', N\}$. La caractérisation du supremum implique l'existence de $k \geq n = \max\{N', N\}$ tel que

$$\limsup(u_n) - \varepsilon \leq \sup_{k\geq n}(u_k) \leq \limsup(u_n)$$

En réinjectant dans l'équation précédente, nous obtenons

$$\limsup(u_n) - \varepsilon \leq \sup_{k\geq n}(u_k) \leq \limsup(u_n) + \varepsilon$$

d'où le résultat ■

Exemple. La suite

$$u_n = (-1)^n\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

est bornée mais elle n'est pas convergente. Nous avons

$$v_n = \sup\{u_k \quad k \geq n\} = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{n} & n \textit{ est paire} \\ \\ -\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) & n \textit{ est inpaire} \end{cases}$$

et donc

$$\limsup (u_n) = \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geq n} (u_k) = 1, \liminf (u_n) = \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geq n} (u_k) = -1$$

Cette suite à deux valeurs d'adhérenc $\{-1, 1\}$

2.4 Suite de Cauchy.

Le défaut des critères précédents (à l'exception du théorème des suites adjacentes et du théorème invoquant l'unicité de la valeur d'adhérence) est qu'ils requièrent de connaitre la limite potentielle avant d'entamer la preuve. Afin de remédier à cette faiblesse, nous introduisons la notion de suite de Cauchy. ,Dans cette partie,nous parlons des suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.

Définition 2.4.1 *Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy si*

$$\forall\varepsilon \geq 0, \exists N \in \mathbb{N} \textit{ tel que } \forall n, m \geq N \Rightarrow |u_n - u_m| \leq \varepsilon$$

Définition 2.4.2 *Une définition équivalente à la précédente est :*

$$\forall\varepsilon \geq 0, \exists N \in \mathbb{N} \textit{ tel que } \forall n \geq N, \forall p \geq 1 \Rightarrow |u_{n+p} - u_n| \leq \varepsilon$$

La condition de Cauchy s'écrit :

$$\lim_{n,m\to+\infty} |u_n - u_m| = 0$$

Pour la vérifier, il faut montrer qu'à chaque $\varepsilon > 0$ correspond un indice n_ε tel que $n, m > n_\varepsilon$ entraînent que

$$|u_n - u_m| \leq \varepsilon$$

c'est-à-dire que $n > n_\varepsilon$ entraînent que

$$|u_n - u_{n+p}| \leq \varepsilon \quad \forall p \geq 1$$

autrement dit que

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{p\geq 1} |u_n - u_{n+p}|$$

Exemple.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

Pourtant, pour chaque $p \geq 1$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+p} - \sqrt{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{p}{\sqrt{n+p}+\sqrt{n}} = 0$$

Le critére de Cauchy n'est quand même pas satisfait :

$$\sup_{p\geq 1} |u_n - u_{n+p}| = \sup_{p\geq 1} \left|\sqrt{n+p} - \sqrt{n}\right| = +\infty$$

Exemple.

La suite dont le terme général est donné par

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

est convergente. En effet,

$$|u_n - u_{n+p}| = \left|\frac{(-1)^n}{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+2} + \ldots + \frac{(-1)^{n+p-1}}{n+p}\right|$$

$$= |(-1)^n| \left|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{(-1)^{p-1}}{n+p}\right|$$

$$= \left|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{(-1)^{p-1}}{n+p}\right|$$

$$= \left|\frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + (-1)^{p-2}\left(\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}\right)\right|$$

$$\leq \frac{p}{(n+1)(n+2)} \leq \frac{1}{(n+1)}$$

(en regroupant deux à deux les termes qui suivent le premier)

2.4.1 Propriétés des suites de Cauchy

Proposition 2.4.3 *Toute suite convergente est de Cauchy*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Notons ℓ la limite de $(u_n)_{n\geq 0}$. Puisque $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente, il existe $N > 0$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - \ell| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$. Ainsi, pour tout $n; m \geq N$

$$|u_n - u_m| = |u_n - \ell + \ell - u_m| \leq |\ell - u_m| + |u_n - \ell| \leq \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

D'une mani ere intuitive, être suite de Cauchy signifie que les termes u_n et u_m se rapprochent de plus en plus si n et m sont "grands". On n'affirme cependant pas que ces valeurs de plus en plus rapprochées convergent vers un réel. La convergence d'une suite $u_n \to \ell$ implique clairement que la suite est egalement de Cauchy, en utilisant l'in egalité du triangle : ■

Attention ! Il ne suffit pas de montrer que $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0 pour montrer qu'une suite est de Cauchy. On pourra méditer sur l'exemple de la suite

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

On a bien $H_{n+1} - H_n = \dfrac{1}{n+1}$ mais

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{2n - (n+1) + 1}{2n} \geq \frac{1}{2}$$

ce qui empêche cette suite d'être de Cauchy (appliquer la définition à $\varepsilon < \frac{1}{2}$ pour aboutir à une contradiction

Proposition 2.4.4 *Toute suite de Cauchy est bornée*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy. La définition appliquée à $\varepsilon = 1$ implique l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - u_N| \leq 1$ pour tout $n \geq N$. En particulier, l'inégalité triangulaire donne $|u_n| \leq 1 + |u_N|$ Nous en déduisons que

$$|u_n| \leq M$$

où $M = \max\{|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{N-1}|, |u_N|\}$: ■

L'intérêt de la notion de suite de Cauchy, est que la proposition (2.4.3) admet une réciproque :

Proposition 2.4.5 *Toute suite de Cauchy de nombres* ***réels*** *converge*

Cela permet de démontrer qu'une suite est convergente sans en connaître la limite.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy. Elle est donc bornée. D'aprés la propriété de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une suite convergente $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\geq 0}$. Notons ℓ, la limite de cette suite extraite. Il reste à montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge elle aussi vers ℓ.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy, il existe un entier q, tel que, quels que soient les entiers n et m supérieurs à q, on ait

$$|u_n - u_m| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Puisque $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ, il existe un entier q', tel que, quel que soit l'entier $m \geq q'$, on ait

$$\left|u_{\varphi(m)} - \ell\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Alors si n et m sont supérieurs à $\max(q, q\prime)$, on a également $\varphi(m) \geq m \geq q$, et

$$\left|u_n - u_{\varphi(m)}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient, si$n \geq \max(q, q\prime)$

$|u_n - \ell| \leq \left|u_{\varphi(m)} - \ell\right| + \left|u_n - u_{\varphi(m)}\right| \leq \varepsilon$ ■

2.5 Suites récurrentes

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Une suite récurrente est définie par son premier terme et une relation permettant de calculer les termes de proche en proche :En général

$$\begin{cases} u_0 \text{ } donné \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Une suite récurrente est donc définie par deux données : un terme initial u_0, et une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. La suite s'écrit ainsi :

$$u_0,\ u_1 = f(u_0)\ \ u_2 = f(u_1) = fof(u_0)\ \ \ u_3 = fofof(u_0)\,;\ \ldots\ \ ;u_n = \underbrace{fofof\ldots f}_{n\ fois}(u_0)\ldots$$

Exemple Soit

$$f(x) = 1 + \sqrt{x}$$

alors la récurrente est définie par

$$\begin{cases} u_0 \ donn\acute{e} \\ u_{n+1} = f(u_n) = 1 + \sqrt{u_n} \end{cases}$$

Fixons $u_0 = 2$. Alors les premiers termes de la suite sont :

$$2, 1 + \sqrt{2}\ , 1 + \sqrt{1 + \sqrt{2}}, 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{2}}}; 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{2}}}}}; \ldots,$$

Voici un résultat essentiel concernant la limite si elle existe.

Proposition 2.5.1 *Si f est une fonction continue et la suite récurrente $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ, alors ℓ est une solution de l'équation :*

$$f(\ell) = \ell$$

Si on arrive à montrer que la limite existe alors cette proposition permet de calculer des candidats à être cette limite.

2.6 Exercices du chapitre 2

Exercise 2.6.1 *Montrer, à partir de la définition de limite, que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3\sqrt{n}}{4\sqrt{n}+5} = \frac{3}{4},\ \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{4n^2-1} = \frac{1}{4},\ \lim_{n\to+\infty} 2^{n/(n+1)} = 2,\ \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{n^2+1} = +\infty$$

Exercise 2.6.2 *Déterminer la limite, si celle-ci existe, des suites uivantes :*

$$u_n = \frac{3^n - (-2)^n}{3^n + (-2)^n}, v_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n-1}; w_n = \frac{n - \sqrt{n^2+1}}{n+\sqrt{n^2-1}},$$

$$x_n = \frac{n!}{1 \times 4 \times \ldots \times (3n-2)}$$

Déterminer par comparaison, la limite des suites $(u_n)_{n\geq 0}$ *suivantes*

$$u_n = \frac{\sin(n)}{n+(-1)^{n+1}}, u_n = \frac{n-(-1)^{n+1}}{n+(-1)^{n+1}};\ u_n = \sqrt[n]{2+(-1)^n},\ u_n = \frac{e^n}{n^n}$$

$$u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{2}{(k+1)(k+2)}\right)$$

Exercise 2.6.3 1. *Prouver la convergence et trouver la limite de la suite*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{k}},$$

2. *Soit* $(v_n)_{n\geq 1}$ *une suite de téreme général*

$$v_n = \frac{n+1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k}$$

   (a) *Montrer que*

$$v_{n+1} = \frac{(2+n)}{2(n+1)}(v_n+1)$$

   (b) *Montrer par récurrence que* $nv_n \geq (n+2)\ \forall n \geq 4$

   (c) *Prouver la convergence et trouver la limite de la suite* $(v_n)_{n\geq 1}$

3. *Etablir que pour tout* $x \geq 0$

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$$

En déduire la convergence de la suite

$$u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$$

4. *Déterminer* $\underline{\lim}_{n\to+\infty} u_n$, *et* $\overline{\lim}_{n\to+\infty} u_n$ *dans le cas où :*

$$u_n = \frac{2n^2}{7} - \left[\frac{2n^2}{7}\right], u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n (-1)^n + \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

Exercise 2.6.4 *Soit* $(u_k)_{k\geq 1}$ *une suite décroissante ver* 0.*On considére la suite* $(S_n)_{n\geq 0}$ *définie par :*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k u_k$$

1. *Vérifié que les sous-suites* S_{2n+1}, S_{2n} *sont adjacentes.En déduire que* $(S_n)_{n\geq 0}$ *converge.*
2. *Montrer que la suite* $D_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{n}$ *est convergent*

Exercise 2.6.5 *Soit* $a \in \mathbb{R}_+^*$. *On considére la suite* $(u_n)_{n\geq 0}$ *définie par :*

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right) \end{cases} \quad \text{et on note } v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$$

1. *Montrer que, pour tout entier n* $v_{n+1} = v_n^2$
2. *Calculer* v_n *en fonction de* v_0 *et montrer que* $|v_0| < 1$. *En déduire que* $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$
3. *Exprimer* u_n *en fonction de* v_n *et montrer que* $\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{a}$
4. *Calculer les trois premiers termes de la suite, pour* $a = 2$ *et* $u_0 = 1$

Exercise 2.6.6 *Soit* $(S_n)_{n\geq 0}$ *une suite défini par*

$$\begin{cases} S_0, S_1 \in \mathbb{R} \\ \\ S_{n+1} = \dfrac{1}{2}(S_n + S_{n-1}) \end{cases}$$

1. *Montrer que la suite* $v_n = |S_n - S_{n-1}|$ *est une suit géométrique*
2. *Montrer que la suite* $(S_n)_{n\geq 0}$ *est de Cauchy*

2.7 Solution des exercices du chapitre 2

Solution d'exercice 2.6.1

Par définition

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \Leftrightarrow \forall\varepsilon \geq 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ , \forall n \geq n_\varepsilon\ ,\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

1. Pour
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3\sqrt{n}}{4\sqrt{n}+5} = \frac{3}{4}$$
Soit $\varepsilon \geq 0$ cherchons $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\left|u_n - \frac{3}{4}\right| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$.On a
$$\left|\frac{3\sqrt{n}}{4\sqrt{n}+5} - \frac{3}{4}\right| = \left|\frac{12\sqrt{n} - 3\left(4\sqrt{n}+5\right)}{4\left(4\sqrt{n}+5\right)}\right| = \left|\frac{15}{16\sqrt{n}+20}\right| \leq \varepsilon$$
donc
$$16\sqrt{n} + 20 \geq \frac{15}{\varepsilon} \Rightarrow n \geq \left(\frac{15}{16\varepsilon} - \frac{5}{4}\right)^2 \Rightarrow n_\varepsilon = \left[\left(\frac{15}{16\varepsilon} - \frac{5}{4}\right)^2\right] + 1$$

2. Pour
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{4n^2-1} = \frac{1}{4}$$
Soit $\varepsilon \geq 0$ cherchons $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\left|u_n - \frac{3}{4}\right| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$.On a
$$\left|\frac{n^2}{4n^2-1} - \frac{1}{4}\right| = \left|\frac{1}{4\left(4n^2-1\right)}\right| \leq \varepsilon$$
donc
$$\left(4n^2 - 1\right) \geq \frac{1}{4\varepsilon} \Rightarrow n \geq \sqrt{\frac{1}{16\varepsilon} + \frac{1}{4}} \Rightarrow n_\varepsilon = \left[\sqrt{\frac{1}{16\varepsilon} + \frac{1}{4}}\right] + 1$$

3. Pour
$$\lim_{n\to+\infty} 2^{n/(n+1)} = 2$$

Soit $\varepsilon \geq 0$ cherchons $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\left|2^{n/(n+1)} - 2\right| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$.On a

$$\left|2^{n/(n+1)} - 2^1\right| \leq \varepsilon$$

Rappelons le théorème des accroissements finie soit f une fonction dérivable sur $]a, b[$

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) \quad c \in]a, b[$$

On pose

$$f(x) = 2^x \Rightarrow f'(x) = 2^x \ln 2, b = 1, a = n/(n+1)$$

donc

$$\left|2^{n/(n+1)} - 2^1\right| = \left|2^c \ln 2 \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)\right| = 2^c \frac{\ln 2}{n+1}$$

On a

$$\frac{n}{n+1} \leq c \leq 1 \Rightarrow 2^{n/(n+1)} \leq 2^c \leq 2$$

alors

$$\left|2^{n/(n+1)} - 2^1\right| = 2^c \frac{\ln 2}{n+1} \leq \frac{2 \ln 2}{n+1} \leq \varepsilon$$

ansi

$$\frac{2 \ln 2}{n+1} \leq \varepsilon \Rightarrow n \geq \frac{2 \ln 2}{\varepsilon} - 1 \Rightarrow N = \left[\frac{2 \ln 2}{\varepsilon} - 1\right] + 1$$

4. Pour

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^3}{n^2+1} = +\infty$$

$$(\forall A > 0), (\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) \text{ tel que } (\forall n \geq N) \Rightarrow u_n \geq A$$

Soit $A > 0$ cherchons

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad tel \quad que \quad (\forall n \geq N) \quad \frac{n^3}{n^2+1} \geq A$$

On a

$$\frac{n^3}{n^2+1} \geq \frac{n^3}{n^2+n^2} \geq \frac{n}{2} \geq A$$

d'où

$$n \geq 2A \Rightarrow N = [2A] + 1$$

Solution d'exercice 2.6.2

1. Pour

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3^n-(-2)^n}{3^n+(-2)^n},\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1-(-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+(-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^n},\right) = 1$$

en effet la suit $(-1)^n$ est borne et $\frac{2}{3}<1$

2. Pour

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} v_n &= \lim_{n\to+\infty}\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n-1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+n+1-(n^2-n-1)}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n-1}}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{n\left(2+\frac{2}{n}\right)}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}}=1\end{aligned}$$

3. Pour

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} w_n &= \lim_{n\to+\infty}\frac{n-\sqrt{n^2+1}}{n+\sqrt{n^2-1}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)}{\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)}\\ &= -\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)}=0\end{aligned}$$

4. Pour

$$x_n = \frac{n!}{1\times 4\times\ldots\times(3n-2)}$$

calculons

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1\times 4\times\ldots\times(3n-2)\,(n+1)!}{1\times 4\times\ldots\times(3n-2)\times(3n+1)\,n!} = \frac{(n+1)}{(3n+1)}$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)}{(3n+1)} = \frac{1}{3}$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \forall\varepsilon\geq 0\ \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}\ ,\forall n\geq n_\varepsilon\ ,\ \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}-\frac{1}{3}\right|\leq\varepsilon$$

donc

$$-\varepsilon+\frac{1}{3}\leq\frac{x_{n+1}}{x_n}\leq\varepsilon+\frac{1}{3}\Rightarrow\left(-\varepsilon+\frac{1}{3}\right)x_n\leq x_{n+1}\leq\left(\varepsilon+\frac{1}{3}\right)x_n$$

alors

$$\left(-\varepsilon+\frac{1}{3}\right)^{n-n_\varepsilon}x_{n_\varepsilon}\leq x_{n+1}\leq\left(\varepsilon+\frac{1}{3}\right)^{n-n_\varepsilon}x_{n_\varepsilon}$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty}\left(-\varepsilon+\frac{1}{3}\right)^{n-n_\varepsilon}x_{n_\varepsilon}\leq\lim_{n\to+\infty}x_{n+1}\leq\lim_{n\to+\infty}\left(\varepsilon+\frac{1}{3}\right)^{n-n_\varepsilon}x_{n_\varepsilon}$$

Ansi

$$\lim_{n\to+\infty}x_{n+1}=0$$

Déterminons par la comparaison, la limite des suites

1. **Pour**

$$u_n=\frac{\sin(n)}{n+(-1)^{n+1}}$$

On a

$$\frac{-1}{n+1}\leq\frac{\sin(n)}{n+1}\leq\frac{\sin(n)}{n+(-1)^{n+1}}\leq\left|\frac{\sin(n)}{n+(-1)^{n+1}}\right|\leq\left|\frac{\sin(n)}{n-1}\right|\leq\frac{1}{n-1}$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{-1}{n+1}=0\ et\ \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n-1}=0\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin(n)}{n+(-1)^{n+1}}=0$$

2. **Pour**

$$u_n=\frac{n-(-1)^{n+1}}{n+(-1)^{n+1}}$$

On a

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{n-(-1)^{n+1}}{n+(-1)^{n+1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}}{1+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}}=1$$

3. **Pour**

$$u_n = \sqrt[n]{2 + (-1)^n}$$

On a

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \sqrt[n]{2 + (-1)^n} \leq \sqrt[n]{3}$$

et

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{3} = \lim_{n \to +\infty} (3)^{1/n} = 1$$

donc

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$$

4. **Pour**

$$u_n = \frac{e^n}{n^n}$$

On a

$$\begin{aligned}\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \to +\infty} \frac{e^{n+1} n^n}{(n+1)^{(n+1)} e^n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{e n^n}{(n+1)^{(n+1)}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{e}{(n+1)\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n} \\ &= \lim_{n \to +\infty} \frac{e^{-n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}}{(n+1)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{e^{-n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}}{(n+1)} = 0\end{aligned}$$

on utilise le théorème(2.2.12) (critèrede d'Alembert) on obtien que la suite converge vers 0

5. **Pour**

$$u_n = \left(1 - \frac{2}{2 \times 3}\right)\left(1 - \frac{2}{3 \times 4}\right)\left(1 - \frac{2}{4 \times 5}\right) \ldots \left(1 - \frac{2}{(n+1)(n+2)}\right)$$

On a

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{u_n \left(1 - \dfrac{2}{(n+2) \times (n+3)}\right)}{u_n} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{2}{(n+2) \times (n+3)}\right) = 1$$

on ne peut pas applique le théorème(2.2.12). On pose

$$w_n = \ln(u_n)$$

donc

$$\begin{aligned} w_n &= \ln\left[\left(1-\frac{2}{2\times 3}\right)\left(1-\frac{2}{3\times 4}\right)\left(1-\frac{2}{4\times 5}\right)\cdots\left(1-\frac{2}{(n+1)\times(n+2)}\right)\right] \\ &= \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{2}{(k+1)(k+2)}\right) \end{aligned}$$

on a

$$\ln\left(1-\frac{2}{(n+1)\times(n+2)}\right)\leq \ln\left(1-\frac{2}{(k+1)(k+2)}\right)\leq \ln\left(1-\frac{2}{2\times 3}\right)$$

alors

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{2}{(n+1)\times(n+2)}\right)\leq \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{2}{(k+1)(k+2)}\right)\leq \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{2}{2\times 3}\right)$$

donc

$$n\ln\left(1-\frac{2}{(n+1)\times(n+2)}\right)\leq \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{2}{(k+1)(k+2)}\right)\leq n\ln\left(1-\frac{2}{2\times 3}\right)$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1-\frac{2}{(n+1)\times(n+2)}\right)\leq \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{2}{(k+1)(k+2)}\right)\leq \lim_{n\to+\infty} n\ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

d'ou

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{2}{(k+1)(k+2)}\right)=\lim_{n\to+\infty}\ln(u_n)=-\infty$$

ansi

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

Solution d'exercice 2.6.3

1. **Pour**

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\sqrt{k}}$$

(a) Nous étudions la monotonie monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$

$$u_{n+1}-u_n=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{n+\sqrt{k}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\sqrt{k}}=\frac{1}{n+\sqrt{n+1}}>0$$

donc la suite est croissente . De plus on a

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\sqrt{k}}\leq\frac{n}{n+1}<1$$

Ainsi la suite est majoré et croissante et d'après la proposition (2.3.1) $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente

(b) Calculons la limite de $(u_n)_{n\geq 0}$. On a

$$\inf_{1\leq k\leq n}\left(\frac{1}{n+\sqrt{k}}\right)\leq\frac{1}{n+\sqrt{k}}\leq\sup_{1\leq k\leq 1}\left(\frac{1}{n+\sqrt{k}}\right)$$

la suite $a_k=\dfrac{1}{n+\sqrt{k}}$ est décroissant alors

$$\frac{1}{n+\sqrt{n}}\leq\frac{1}{n+\sqrt{k}}\leq\frac{1}{n+\sqrt{1}}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\sqrt{n}}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\sqrt{k}}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\sqrt{1}}$$

d'où

$$\frac{n}{n+\sqrt{n}}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\sqrt{k}}\leq\frac{n}{n+1}$$

Comme

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+\sqrt{n}}=1\ et\ \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}=1\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}u_n=1$$

2. **Pour**

$$v_n=\frac{n+1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}$$

(a) On a.

$$\begin{aligned} v_{n+1}-v_n &= \frac{n+2}{2^{n+2}}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^k}{k}-\frac{n+1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}}\left[\frac{(n+2)}{2}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^k}{k}-(n+1)\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}\right] \end{aligned}$$

Donc

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{2^{n+1}}\left[\frac{(n+2)}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}-(n+1)\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}\right]$$

$$=\frac{1}{2^{n+1}}\left[\frac{(n+2)}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}+\frac{2^{n+1}}{(n+1)}\right)-(n+1)\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}\right]$$

$$=\frac{1}{2^{n+1}}\left[\frac{(n+2)}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}+\frac{(n+2)}{(n+1)}2^n-(n+1)\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}\right]$$

$$=\left[\frac{(n+2)}{2\times 2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}+\frac{(n+2)}{2\,(n+1)}-\frac{(n+1)}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}\right]$$

$$=\left[\frac{(n+2)}{2\,(n+1)}\underbrace{\frac{(n+1)}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}}_{v_n}+\frac{(n+2)}{2\,(n+1)}-\underbrace{\frac{(n+1)}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}}_{v_n}\right]$$

$$=\left[\frac{(n+2)}{2\,(n+1)}v_n-v_n+\frac{(n+2)}{2\,(n+1)}\right]$$

$$=\frac{-nv_n+(n+2)}{2\,(n+1)}$$

alors

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{-nv_n + (n+2)}{2(n+1)} \Rightarrow v_{n+1} = v_n + \frac{-nv_n + (n+2)}{2(n+1)} \\ &\Rightarrow \ v_{n+1} = \frac{2(n+1)v_n - nv_n + (n+2)}{2(n+1)} \\ &\Rightarrow \ v_{n+1} = \frac{(n+2)v_n + (n+2)}{2(n+1)} = \frac{(n+2)(v_n+1)}{2(n+1)} \end{aligned}$$

(b) **Montrons par récurrence que**

$$nu_n \geq (n+2) \ \ \forall n \geq 4$$

alors

$$\frac{n(n+1)}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k} \geq (n+2)$$

Pour $n = 4$

$$\begin{aligned} \frac{n(n+1)}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k} &= \frac{4(4+1)}{2^{4+1}} \sum_{k=1}^{4} \frac{2^k}{k} = \frac{5}{8} \sum_{k=1}^{4} \frac{2^k}{k} \\ &= \frac{5}{8}\left(\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \frac{2^4}{4}\right) = \frac{20}{3} \geq 6 \end{aligned}$$

On suppose que

$$nv_n \geq (n+2)$$

et on montre pour $n+1$ alors

$$(n+1)v_{n+1} \geq (n+3)$$

On a

$$(n+1)v_{n+1} = \frac{(n+2)(v_n+1)}{2} = \frac{2v_n + nv_n + n + 2}{2}$$

Par hypothèse de récurrence

$$\frac{2v_n + nv_n + n + 2}{2} \geq v_n + (n+2) \geq (n+3)$$

donc

$$(n+1)v_{n+1} \geq (n+3)$$

(c) **Prouvons la convergence et trouver la limite de la suite** $(v_k)_{k\geq 1}$ .On a

$$v_n = \frac{(n+1)}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k}$$

et que la suite $a_k = \dfrac{2^k}{k}$ est croissante donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} 2 = 2n \Rightarrow \frac{(n+1)}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k} \geq \frac{n(n+1)}{2^n} \geq 1$$

donc la suite est minoré. De plus on a

$$v_{n+1} - v_n = \frac{-nv_n + (n+2)}{2(n+1)} \leq 0 \ car \ \ (nv_n \geq (n+2))$$

alors la suite est décroissante donc convergente. On pose $\alpha = \lim_{n\to+\infty} v_n$

$$\lim_{n\to+\infty} v_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)(v_n+1)}{2(n+1)}$$

alors

$$\alpha = \frac{1}{2}(\alpha+1) \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} v_n = 1$$

3. **Etablir que pour tout** $x \geq 0$

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$$

Étudions les variations des fonctions

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+x) - x \\ g(x) &= \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

on a

$$f'(x) = -\frac{x}{x+1} \quad , \quad g'(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

On obtien les tableaux des variations

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+ \quad 0 \quad -$	
		0	
$f(x)$		$\nearrow \quad \searrow$	
	$-\infty$		$-\infty$

x	-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
		$+\infty$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	

Remarquons que les fonctions f et g vérifient

$$f(x) = \ln(1+x) - x \leq 0 \ et \ g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \geq 0 \ \forall x \geq 0$$

alors

$$\forall x \geq 0 \ , \quad \ln(1+x) \leq x \ et \ \ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2} \geq 0$$

d'où

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x \quad \forall x \geq 0 \tag{2.1}$$

4. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de terme générale

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$$

on pose

$$v_n = \ln u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$$

Nous utilisons (2.1) on obtien

$$\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} \leq \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2n^4} \leq \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$$

alors

$$\sum_{k=1}^{n} \inf_{1\leq k\leq n}\left(\frac{k}{n^2}\right) - \sum_{k=1}^{n} \sup_{1\leq k\leq n} \frac{k^2}{2n^4} \leq \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \sup_{1\leq k\leq n} \frac{k}{n^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2n^2} \sum_{k=1}^{n} 1 \leq \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2n} \leq \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq 1$$

donc la suite

$$v_n = \ln u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$$

est borné de plus on a la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est croissante en effet

$$v_{n+1} - v_n = \sum_{k=1}^{n+1} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) - \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) = \ln\left(1 + \frac{n+1}{n^2}\right) \geq 0$$

Ainsi la suite est croissante et majoré par 1 donc converge. Par conséquence la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente

5. **Pour** la suite

$$u_n = \frac{2n^2}{7} - \left[\frac{2n^2}{7}\right]$$

Remarquons tous d'abord que cette suite est périodique

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{2}{7} - \left[\frac{2}{7}\right] = \frac{2}{7}, u_2 = \frac{8}{7} - \left[\frac{8}{7}\right] = \frac{1}{7}, u_3 = \frac{18}{7} - \left[\frac{18}{7}\right] = \frac{4}{7}, \\ u_4 &= \frac{32}{7} - \left[\frac{32}{7}\right] = \frac{4}{7} \\ u_5 &= \frac{50}{7} - \left[\frac{50}{7}\right] = \frac{1}{7}, u_6 = \frac{72}{7} - \left[\frac{72}{7}\right] = \frac{2}{7}, u_7 = 0, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} u_{7k} &= 0,\ u_{7k+1} = \frac{2}{7}, u_{7k+2} = \frac{1}{7}, u_{7k+3} = \frac{4}{7}, \\ u_{7k+4} &= \frac{4}{7}, u_{7k+5} = \frac{1}{7}, u_{7k+6} = \frac{2}{7} \end{aligned}$$

Alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est

$$\begin{aligned} v_n &= \sup\{u_k \quad k \geq n\} = \sup\left\{0, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}\right\} = \frac{4}{7} \\ w_n &= \inf\{u_k \quad k \geq n\} = \inf\left\{0, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}\right\} = 0 \end{aligned}$$

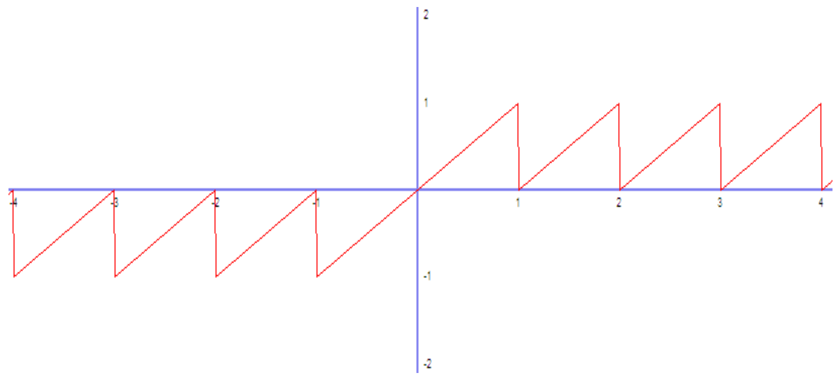
donc

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sup(u_n) = \frac{4}{7},\ \underline{\lim_{n\to+\infty}} (u_n) = \lim_{n\to+\infty} \inf(u_n) = 0$$

Remarque 2.7.1 *Même la fonction*

$$f(x) = x - [x]$$

est périodique



6. **Pour** la suite

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (-1)^n + \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

Ia suite u_n est bornée en effet on a

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1 \ et \quad -1 \leq \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \leq 1$$

alors

$$-\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - 1 \leq (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + 1$$

Le fait que on a

$$\ln(1 + x) \leq x$$

On obtient

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \leq e$$

donc

$$-e - 1 \leq (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \leq e + 1$$

On trouve d'abord l'ensemble des valeurs de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ .On a

$$\begin{aligned}
u_{8k} &= \left(1+\frac{1}{8k}\right)^{8k}, \\
u_{8k+1} &= -\left(1+\frac{1}{8k+1}\right)^{8k+1} + \sin\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k\right) = -\left(1+\frac{1}{8k+1}\right)^{8k+1} + \frac{\sqrt{2}}{2} \\
u_{8k+2} &= \left(1+\frac{1}{8k+2}\right)^{8k+2} + \sin\left(\frac{2\pi}{4}+2\pi k\right) = \left(1+\frac{1}{8k+2}\right)^{8k+2} + 1 \\
u_{8k+3} &= -\left(1+\frac{1}{8k+3}\right)^{8k+3} + \sin\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi k\right) = -\left(1+\frac{1}{8k+3}\right)^{8k+3} + \frac{\sqrt{2}}{2} \\
u_{8k+4} &= \left(1+\frac{1}{8k+4}\right)^{8k+4} + \sin\left(\frac{4\pi}{4}+2\pi k\right) = \left(1+\frac{1}{8k+4}\right)^{8k+4} \\
u_{8k+5} &= -\left(1+\frac{1}{8k+5}\right)^{8k+5} + \sin\left(\frac{5\pi}{4}+2\pi k\right) = -\left(1+\frac{1}{8k+5}\right)^{8k+5} - \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
u_{8k+6} &= \left(1+\frac{1}{8k+6}\right)^{8k+6} + \sin\left(\frac{6\pi}{4}+2\pi k\right) = \left(1+\frac{1}{8k+6}\right)^{8k+6} - 1 \\
u_{8k+7} &= \left(1+\frac{1}{8k+7}\right)^{8k+7} + \sin\left(\frac{7\pi}{4}+2\pi k\right) = -\left(1+\frac{1}{8k+7}\right)^{8k+7} - \frac{1}{2}\sqrt{2}
\end{aligned}$$

donc l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$

$$A = \left\{\begin{array}{l}
\lim\limits_{k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{8k}\right)^{8k}, \lim\limits_{k\to+\infty} -\left(1+\frac{1}{8k+1}\right)^{8k+1} + \frac{\sqrt{2}}{2}, \\
\lim\limits_{k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{8k+2}\right)^{8k+2} + 1, -\lim\limits_{k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{8k+3}\right)^{8k+3} + \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\lim\limits_{k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{8k+4}\right)^{8k+4}, \lim\limits_{k\to+\infty} -\left(1+\frac{1}{8k+5}\right)^{8k+5} - \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\lim\limits_{k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{8k+6}\right)^{8k+6} - 1, \lim\limits_{k\to+\infty} -\left(1+\frac{1}{8k+7}\right)^{8k+7} - \frac{1}{2}\sqrt{2}
\end{array}\right\}$$

alors

$$A = \left\{ e, -e+\frac{\sqrt{2}}{2}, e+1, -e-\frac{\sqrt{2}}{2}, e-1 \right\}$$

donc

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sup(u_n) =, e+1, \ \underline{\lim_{n\to+\infty}}(u_n) = \lim_{n\to+\infty} \inf(u_n) = -e-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Menguelti Ali

Solution d'exercice 2.6.4

Soit $(u_k)_{k\geq 1}$ une suite décroissante ver 0. Alors

$$\lim_{k\to+\infty} u_k = 0 \text{ et } (u_k)_{k\geq 1} \text{ une suite décroissante}$$

On pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$$

Vérifions que les sous-suites S_{2n} et S_{2n+1} sont adjacentes. On pose

$$v_n = S_{2n} \; et \; w_n = S_{2n+1}$$

On a :

$$w_n = S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k u_k = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k u_k + u_{2n} - u_{2n+1}$$

$$= S_{2n-1} + \underbrace{u_{2n} - u_{2n+1}}_{\geq 0\left(car \quad (u_k)_{k\geq 1}\text{une suite décroissante}\right)} \geq S_{2n-1} = w_{n-1}$$

$$v_n = S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k u_k = \sum_{k=0}^{2n-2} (-1)^k u_k + u_{2n} - u_{2n-1}$$

$$= S_{2n-2} + \underbrace{u_{2n} - u_{2n-1}}_{\leq 0\left(car \quad (u_k)_{k\geq 1}\text{une suite décroissante}\right)} \leq S_{2n-2} = v_{n-1}$$

donc

$$w_n \geq w_{n-1} \text{ et } v_n \leq v_{n-1}$$

alors $(w_n)_{n\geq 1}$ est croît et $(v_n)_{n\geq 1}$ décroît. De plus

$$w_n = S_{2n+1} = S_{2n} - u_{2n+1} \leq S_{2n} = v_n$$

donc pour tout $n > 0$

$$w_0 \leq \cdots \leq w_{n-1} \leq w_n \leq v_n \leq v_{n-1} \leq \cdots \leq v_0$$

$$w_0 \leq w_n \leq v_n \leq v_0$$

Ainsi $(w_n)_{n\geq 1}$ est majorée par v_0 et $(v_n)_{n\geq 1}$ est minorée par w_0. Les suites $(w_n)_{n\geq 1}$ et $(-v_n)_{n\geq 1}$ sont donc croissantes et majorées. Le théorème 2.3.1 entraîne qu'elles convergent, mettons vers S et S'

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = S \in \mathbb{R} \qquad \lim_{n\to+\infty} v_n = S' \in \mathbb{R}$$

Enfin, on a :

$$S \ - S' = \lim_{n\to+\infty} w_n - v_n = \lim_{n\to+\infty} (-u_{2n+1}) = 0$$

d'ou

$$\lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim_{n\to+\infty} S_n$$

La suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{n} = S \in \mathbb{R}$$

Solution d'exercice 2.6.5

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On considére la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right) \end{cases} \quad \text{et on note } v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$$

1. Montrons que, pour tout entier n $\ v_{n+1} = \ v_n^2$. On a

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - \sqrt{a}}{u_{n+1} + \sqrt{a}} = 1 - \frac{2\sqrt{a}}{u_{n+1} + \sqrt{a}}$$

alors

$$v_{n+1} = 1 - \frac{4\sqrt{a}}{\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right) + 2\sqrt{a}} = 1 - \frac{4\sqrt{a}u_n}{u_n^2 + a + 2u_n\sqrt{a}} = \frac{u_n^2 + a - 2u_n\sqrt{a}}{u_n^2 + a + 2u_n\sqrt{a}} = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{(u_n + \sqrt{a})^2}$$

donc

$$v_{n+1} = \ v_n^2$$

2. Calculons v_n en fonction de v_0

$$v_{n+1} = v_n^2 = v_{n-1}^4 = v_{n-2}^8 = \ldots = v_0^{2^{n+1}}$$

montrons que $|v_0| < 1$. on a

$$|v_0| = \frac{|u_0 - \sqrt{a}|}{|u_0 + \sqrt{a}|} < 1$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$$

3. Exprimons u_n en fonction de v_n et montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{a}$

$$v_n = 1 - \frac{2\sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$$

donc

$$1 - v_n = \frac{2\sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}} \Rightarrow u_n = \sqrt{a}\left(\frac{v_n + 1}{1 - v_n}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{a}\left(\frac{v_n + 1}{1 - v_n}\right) = \sqrt{a} \ car \ \left(\lim_{n\to+\infty} v_n = 0\right)$$

4. Calculons les trois premiers termes de la suite, pour $a = 2 \ et \ u_0 = 1$

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right) \end{cases}$$

$$u_1 = 1.5, \quad u_2 = \frac{1}{2}\left(1.5 + \frac{2}{1.5}\right) = 1.416\,7 \ ; \ u_3 = 1.414\,2 \simeq \sqrt{2}$$

Solution d'exercice 2.6.6

1. Montrons que $v_n = |S_n - S_{n-1}|$ est une suit géométrique

$$v_{n+1} = |S_{n+1} - S_n| = \left|S_n - \frac{1}{2}(S_n + S_{n-1})\right| = \frac{1}{2}|S_n - S_{n-1}| = \frac{1}{2}|S_n - S_{n-1}| = \frac{1}{2}v_n$$

alors

$$v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} v_1$$

2. **Le critaire de Cauchy**

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; tel \; que \; \forall (q,p) \in N_1^2, (q \geq n_0, p \geq n_0) \;\; |S_q - S_p| \leq \varepsilon$$

On pose $q = m + p$ alors

$$\begin{aligned} |S_q - S_p| &= |S_{m+p} - S_p| \\ &= |S_{m+p} - S_{m+p-1} + S_{m+p-1} - S_{m+p-2} + S_{m+p-2} - S_{m+p-3} + \cdots + S_{p-1} - S_p| \end{aligned}$$

donc

$$|S_q - S_p| \leq |S_{m+p} - S_{m+p-1}| + |S_{m+p-1} - S_{m+p-2}| + |S_{m+p-2} - S_{m+p-3}| + \cdots + |S_{p-1} - S_p|$$

d'ou

$$\sum_{k=1}^{m} v_{p+k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{p+m-1} |S_1 - S_0| + \left(\frac{1}{2}\right)^{p+m-2} |S_1 - S_0| + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1} |S_1 - S_0|$$

$$= \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{m} + \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} + \cdots + 1\right] \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1} |S_1 - S_0| = \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{m}\right] \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1} |S_1 - S_0|$$

$$= \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{p-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{m+p-1}\right] |S_1 - S_0| \qquad m = q - p$$

alors

$$|S_q - S_p| \leq \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{p-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{q-1}\right] |S_1 - S_0|$$

donc si $p, q \to +\infty$ on obtient 0 d'ou la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ est de Cauchy donc convergente.

Chapitre 3

Fonctions d'une variable réelle

L'objectif dans ce chapitre est l'étude des fonctions numériques d'une variable réelle, c'est-à-dire des fonctions d'un sous-ensemble D_f de $\mathbb{R}$ (dit domaine de définition de la fonction) et à valeurs dans $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathbb{R}$ pouvant être pensé comme l'axe des temps, ces fonctions modélisent souvent des grandeurs physiques (mesurées dans un système d'unités adéquat) évoluant pendant un certain laps de temps. On mettra en équation l'étude de cette évolution de manière à la fois à la prédire et à la contrôler, mais il nous faudra auparavant introduire les concepts de continuité et de dérivabilité. Cela nous donnera l'opportunité d'associer à un phénomène d'évolution un modèle mathématique, puis ensuite d'étudier ce modèle.

3.1 Généralité sur les fonction

Définition 3.1.1 *On appelle fonction numérique sur un ensemble E tout procédé qui, à tout élément x de E, permet d'associer au plus un élément de l'ensemble $\mathbb{R}$, appelé alors image de x et noté $f(x)$.Les éléments de E qui ont une image par f forment l'ensemble de définition de f, noté D_f .*

Exemple : La fonction

$$f(x) = \ln\left(x^2 - 1\right)$$

est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que

$$x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]1, +\infty\right[= D_f.$$

L'image du réel 4, est $\ln(15)$ on dit que 4 est un antécédent de 4. Si f est définie sur $E = R$ ou sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, l'application f est dite fonction numérique à variable réelle. On notera par $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ l'ensembles des fonctions numériques à variable réelle définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On notera cette fonction par

$$f : I \to \mathbb{R} \quad ou \quad x \to f(x).$$

On prendra soin de ne pas confondre la fonction désignée par f et l'image par f de x qui est désignée par $f(x)$. Soient f et $g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit de nouvelles applications, appartenant à $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, par :$f + g : x \to f(x) + g(x)$, λf $x \to \lambda f(x)$ et $fg : x \to f(x)g(x)$.

Définition 3.1.2 (Fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$) *Etant donné un réel a, on dit que une fonction f est définie ou voisinage de a si*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad D_f \cap [a - \varepsilon, a + \varepsilon] \neq \varnothing$$

Exemples

Les fonctions suivantes sont définies au voisinage de 0

$$(1) - \begin{array}{l} [-1,1] \to \mathbb{R} \\ x \to \sqrt{1 - x^2} \end{array} \quad (2) - \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \to \dfrac{\sin(x)}{x} \end{array} \quad (3) - \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \to \sqrt{x} \end{array}$$

Les fonctions suivantes ne sont pas définies au voisinage de 0 :

$$x \to \sqrt{-1 + x^2} \qquad x \to \ln\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

Définition 3.1.3 (Fonctions définies au voisinage de $\pm\infty$) *On dit que une fonction f est définie ou voisinage de $+\infty$ $(resp\ -\infty)$ si il existe un reel A tel que*

$$[A, +\infty[\ \subset D_f \quad (resp\ \ ]-\infty, A] \subset D_f\ )$$

Exemples

La fonction suivante est définie au voisinage de $+\infty$

$$(1) - \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \to \sqrt{x} \end{array}$$

La fonction suivante est définie au voisinage de $+\infty$ *et* $-\infty$

$$(2) - \quad \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to \dfrac{1}{x^2+1} \end{array}$$

Définition 3.1.4 (Graphe, d'une fonction) *On appelle graphe, ou courbe représentative, d'une fonction f définie sur un intervalle $D_f \subset \mathbb{R}$, l'ensemble*

$$\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)) \ \ x \in D_f\}$$

formé des points $(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2$ du plan muni d'un repére orthonormé $\left(o, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Définition 3.1.5 (Monotonie de la fonction) *Soient D une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. On dit que :*

1. *f est croissante sur D si*

$$\forall x_1, x_2 \in D \quad tel\ que\ x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

2. *f est strictement croissante sur D si*

$$\forall x_1, x_2 \in D \quad tel\ que\ x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

3. *f est décroissante sur D si*

$$\forall x_1, x_2 \in D \quad tel\ que\ x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

4. *f est strictement décroissante sur D si*

$$\forall x_1, x_2 \in D \quad tel\ que\ x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Définition 3.1.6 (Fonctions minorées, majorées et bornées) *Soient D une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. On dit que :*

1. *f est dite minorée sur D si*

$$\exists m \in \mathbb{R},\ tel\ que\ \forall x \in D \quad f(x) \geq m$$

2. *f est dite majorée sur D si*

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \text{tel que } \forall x \in D \quad f(x) \leq M$$

3. *f est dite bornée sur D si*

$$\exists M, m \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in D \quad m \leq f(x) \leq M$$

ou encore

$$\exists M > 0 \text{ tel que } \forall x \in D \quad |f(x)| \leq M$$

Définition 3.1.7 *Soient D une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. On dit que :*

1. *f admet un maximum en $a \in D$ si*

$$\forall x \in D \quad f(x) \leq f(a)$$

2. *f admet un maximum local en $a \in D$ si*

$$\exists h > 0,\ \text{tel que } \forall x \in D \quad |x - a| \leq h \quad f(x) \leq f(a)$$

3. *On definit de maniere analogue les notions de minimum et de minimum local. On dit que f admet un extremum (respedivement un extremum local) si f admet un maximum (respectivement un maximum local) ou un minimum (respectivement un minimum local).*

Définition 3.1.8 (Parité de la fonction) *Soit $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle sur D_f.*

1. *On dit que f est paire*

$$\forall x \in D_f \quad \text{et} \quad -x \in D_f \quad \Rightarrow f(-x) = f(x)$$

La courbe représentative de f (ou le graphe de f) dans un repère orthonormé $\left(o, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est symétrique à l'axe Oy.

2. *On dit que f est inpaire*

$$\forall x \in D_f \quad et \quad -x \in D_f \quad \Rightarrow f(-x) = -f(x)$$

La courbe représentative de f (ou le graphe de f) dans un repère orthonormé $\left(o, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est symétrique par rapport à l'origine du repère

Définition 3.1.9 (Fonction périodique) *Soient f une fonction réelle et $T \in \mathbb{R}$. On dit que f est une fonction périodique de période T si :*

$$f(x+T) = f(x)$$

Définition 3.1.10 (Opérations sur les fonctions) *Soient f :$D \to \mathbb{R}$ et g $D \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur une même partie D de $\mathbb{R}$. On peut alors définir les fonctions suivantes :*

1. *la somme de f et g est la fonction $f+g$ $D \to \mathbb{R}$ définie par*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

2. *le produit de f et g est la fonction fg $D \to \mathbb{R}$ définie par*

$$(fg)(x) = f(x)\, g(x)$$

3. *la multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ la fonction $\lambda\ f$ $D \to \mathbb{R}$ définie par*

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

Définition 3.1.11 (Composition de deux fonctions) *Soient $f : D \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles. Alors la fonction gof est la fonction composition des fonctions f par g.*

$$gof(x) = g(f(x))$$

Proposition 3.1.12 (Régle des signes) *Soient $f : D \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles monotones,si $f(D) \subset J$,. Alors la fonction gof est monotone et* *l'on a la régle des signes pour la monotonie de gof :*

f	g	gof
$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$
$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Définition 3.1.13 (Surjective) *Une fonction $f : D \to J$ et dit surjective si*

$$\forall y \in J, \exists x \in D \text{ tel que } y = f(x)$$

Définition 3.1.14 (Injective) *Une fonction $f : D \to J$ et dit inrjective si*

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Définition 3.1.15 (Fonction bijective) *Une fonction $f : D \to J$ et dit bijective si elle est à la fois surjective et inrjective*

Définition 3.1.16 (Fonction identique (ou identité)) *La fonction $Id_D \longmapsto D$ définie par*

$$Id_D(x) = x$$

est appelée la fonction identique ou fonction identité sur D. La fonction identité est bijective

Définition 3.1.17 (Fonction reciproque) *Si f est une bijection d'une partie D de $\mathbb{R}$ sur une partie J de $\mathbb{R}$, alors Ie graphe de f et de f^{-1} sont symetriques l'un de l'autre par rapport a la premiere bissectrice*

$$f^{-1}of(x) = f(x)\,of^{-1}(x) = x \text{ ou } f^{-1}of = fof^{-1} = I_D$$

Définition 3.1.18 (Restriction d'une fonction.) *Soit S un sous-ensemble $(S \subset D_f)$ de D_f et $g : S \longmapsto T$ une fonction telle que*

$$g(x) = f(x) \quad \text{pour} \quad \text{tout} \quad x \in S.$$

On appelle g restriction de f et on la note f/S (dire : f restreinte à S)

Définition 3.1.19 (Prolongement d'une fonction) *Soit $D \subset S$. Une fonction $g : S \longmapsto T$ est appelée prolongement de f si f est une restriction de g, i.e. $g/D = f$*

Définition 3.1.20 *La partie positive respectivement la partie négative d'une fonction f $D_f \longmapsto \mathbb{R}$ par*

$$\begin{aligned} f^+(x) &= \max\{f(x), 0\} = \frac{f(x) + |f(x)|}{2} \quad f^+ \ D_f \longmapsto \mathbb{R}_+ \\ f^-(x) &= -\min\{f(x), 0\} = \frac{-f(x) + |f(x)|}{2} \quad f^- \ D_f \longmapsto \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

Evidemment

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x) \quad et \quad |f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$$

3.2 Limites des fonctions réelles

Soit f une fonction réelle définie sur son domaine D_f . Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall \eta > 0,]\alpha - \eta, \alpha + \eta[\cap D_f \neq \varnothing$$

Un tel point α est appelé point adhérent de l'ensemble D_f. Notons que si $\alpha \in D_f$, alors α est un point adhérent de D_f .On note souvent

$$V_\eta(\alpha) =]\alpha - \eta, \alpha + \eta[$$

voisinage. Pour étudier le comportement de f autour α on peut considérer les suites $(x_n)_{n\geq 0}$ avec $x_n \in D_f$ qui convergent vers α et les suites $(f(x_n))_{n\geq 0}$ des valeurs de f. Une autre approche utilise les voisinages de α et leurs images sous f. D'abord notons la propriété d'un point adhérent à un ensemble D.

Proposition 3.2.1 *Un point α est adhérent à un ensemble D si et seulement si il existe une suite d'éléments $\alpha_n \in D$ qui converge vers α et on note*

$$\alpha \in \overline{D}$$

Démonstration. Si $\alpha_n \in D$ converge vers α, alors pour tout $\eta > 0$ il existe un entier naturel N tel que

$$|\alpha_n - \alpha| < \eta \ \ pour\ tout\ n \geq N$$

c'est-à dire

$$\alpha_n \in V_\eta(\alpha) = \left]\alpha - \eta, \alpha + \eta\right[$$

Si α est adhérent à D, alors pour tout entier naturel n il existe un

$$\alpha_n \in V_{1/n}(\alpha) = \left]\alpha - \frac{1}{n}, \alpha + \frac{1}{n}\right[\ .$$

La suite α_n converge vers α. ■

Exemple :

On pose

$$A = \left]-1, 9\right[\ \Rightarrow \overline{A} = [-1, 9]$$

on a

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \in \mathbb{Q}\ et\ \lim_{n\to+\infty} x_n = e \notin \mathbb{Q}\ mais\ e \in \mathbb{R}$$

donc

$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$$

Définition 3.2.2 *Si α est un point de $\overline{D}$ on dit que f admet une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ en α si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de points de D convergeant vers α on a*

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell$$

Dans le cas particulier où α est un point appartenant au domaine de définition de f, alors, dire que f admet une limite ℓ en α implique automatiquement que cette limite ℓ soit égale à $f(\alpha)$. Lorsque α est un point de $\overline{D}/D$, on peut aussi parler pour f de convergence de f vers $\pm\infty$ au point α :

Définition 3.2.3 *On dit que la fonction f converge vers $+\infty$ au point $\alpha \in \overline{D}/D$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de points de D convergeant vers α on a*

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty$$

Définition 3.2.4 *On dit que la fonction f converge vers $-\infty$ au point $\alpha \in \overline{D}/D$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de points de D convergeant vers α on a*

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = -\infty$$

Définition 3.2.5 *On dit que la fonction f converge vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ dans D si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de points de D convergeant vers $+\infty$ on a*

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty$$

Définition 3.2.6 *On dit que la fonction f converge vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ dans D si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de points de D convergeant vers $+\infty$ on a*

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = -\infty$$

On a la proposition suivante, permettant de formuler mathématiquement le fait qu'une fonction tende vers une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ au point $\alpha \in D$ ou vers $\pm\infty$ en un point $\alpha \in \overline{D}/D$

Proposition 3.2.7 *Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$,f une fonction de D dans $\mathbb{R}$ et ℓ un nombre réel. Alors f admet ℓ pour limite au point $\alpha \in D$ si et seulement si :*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0, \forall x \in D \quad |x-\alpha| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

De même, si $\alpha \in \overline{D}/D$, f tend vers $+\infty$ au point $\alpha \in D$ si et seulement si :

$$\forall A > 0, \exists\eta > 0, \forall x \in D \quad |x-\alpha| \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq A$$

Enfin, toujours si $\alpha \in \overline{D}/D$, f tend vers $-\infty$ au point $\alpha \in D$ si et seulement si :

$$\forall A > 0, \exists\eta > 0, \forall x \in D \quad |x-\alpha| \leq \eta \Rightarrow f(x) \leq -A$$

Démonstration. On se contentera de prouver

$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \ell$	$\Leftrightarrow$	$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0, \forall x \in D \quad |x-\alpha| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$

$(H_2 \Rightarrow H_1)$. Supposons tout d'abord H_2 vraie et fixons $\varepsilon > 0$ arbitraire ; il lui correspond donc d'après H_2 un certain nombre $\eta > 0$. Si $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite de points de D convergeant vers α, alors pour n assez grand, on a

$$|x_n - \alpha| \leq \eta$$

mais alors, puisque H_2 est vraie, on $|f(x_n) - \ell| \leq \varepsilon$ pour n assez grand ; comme ε est arbitraire, ceci prouve que la suite $(f(x_n))_{n\geq 0}$ converge vers ℓ

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \ell$$

On prouve que l'assertion $(H_1 \Rightarrow H_2)$. En utilisant un raisonnement par contraposition. La négation de H_2 s'écrit :

$$\exists\varepsilon > 0, \forall\eta > 0, \exists x \in D \quad |x - \alpha| \leq \eta \text{ et } |f(x) - \ell| \geq \varepsilon$$

En particulier, pour chaque $n \in \mathbb{N}/\{0\}$, il existe $x_n \in D$ avec

$$|x_n - \alpha| < \frac{1}{n}$$

la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ converge vers α tandis que la suite$(f(x_n))_{n\geq 1}$ ne converge pas vers ℓ, ce qui prouve que l'assertion

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \ell$$

est fausse. On a donc bien prouvé ainsi par contraposition que

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \ell$$

ce qui achève la preuve de l'équivalence de ces deux assertions. ■

De même, si D est non majoré, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \ell \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists B > 0, \forall x \in D \quad x \geq B \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon \\
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in D \quad x \geq B \Rightarrow f(x) \geq A \\
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= -\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in D \quad x \geq B \Rightarrow f(x) \leq -A
\end{aligned}$$

On a des équivalences analogues si D est non minoré pour les trois types de convergence vers $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists B>0, \forall x\in D \quad x\leq -B \Rightarrow |f(x)-\ell|\leq\varepsilon$$

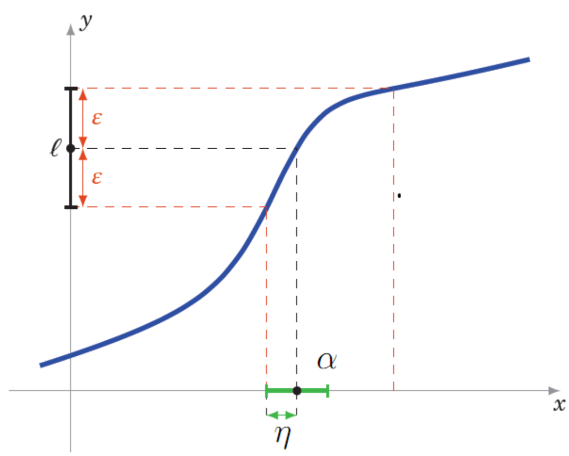
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A>0, \exists B>0, \forall x\in D \quad x\leq -B \Rightarrow f(x)\geq A$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A>0, \exists B>0, \forall x\in D \quad x\leq -B \Rightarrow f(x)\leq -A$$

Remarque 3.2.8 *Pour montrer que f tend vers ℓ en α, il faut montrer que pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\eta>0$ tel que $|x-\alpha|\leq\eta$ implique $|f(x)-\ell|\leq\varepsilon$ pour tout $x\in D$. Ainsi, on commencera toujours la preuve par la phrase suivante :*

$$\textit{Soit} \quad \varepsilon>0$$

On cherche ensuite $\eta>0$. Après l'avoir défini, on écrit. Soit $x\in D$ tel que $|x-\alpha|\leq\eta$ montrons que $|f(x)-\ell|\leq\varepsilon$



Définition 3.2.9 (Limite à gauche et à droite) *Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]a,\alpha[\cup]\alpha,b[$.*

1. *On appelle **limite à droite** en α de f la limite de la fonction $f_{|]\alpha,b[}$ en α et on la note*

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x) \quad \textit{ou} \quad \lim_{x\overset{>}{\to}\alpha} f(x)$$

Dire que $f : D \longmapsto \mathbb{R}$ *admet une limite* ℓ *à droite en* α *signifie donc :*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0, \forall x \in D \quad \alpha \leq x \leq \alpha + \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

2. *On appelle* ***limite à gauche*** *en* α *de* f *la limite de la fonction* $f_{|]a,\alpha[}$ *en* α *et on la note*

$$\lim_{x \to \alpha^-} f(x) \quad ou \quad \lim_{x \overset{\leq}{\to} \alpha} f(x)$$

Dire que $f : D \longmapsto \mathbb{R}$ *admet une limite* ℓ *à gauche en* α *signifie donc :*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0, \forall x \in D \quad \alpha - \eta \leq x \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

Proposition 3.2.10 *Soit* f *une fonction définie sur* D *alors si* f *est monotone (c'est-à-dire croissante ou décroissante) sur unintervalle ouvert* $]a, b[\subset D$ *(borné ou non borné). Alors* f *a une limite à gauche et à droite en tout point de* $]a, b[$

Démonstration. Ceci résulte du fait que $\mathbb{R}$ vérifie la propriété de la borne supérieure. Supposons par exemple f croissante et notons, pour $x_0 \in]a, b[$, $M(x_0)$ la borne supérieure de $f(]a, x_0[)$(sous-ensemble de $\mathbb{R}$ majoré par $f(x_0)$). Par définition de $M(x_0)$, il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, un nombre $x < x_0$ tel que

$$M(x_0) - \varepsilon < f(x) < M(x_0)$$

mais alors, puisque f est croissante, on a

$$\forall x' \in]a, x_0[, M(x_0) - \varepsilon < f(x') < M(x_0)$$

on a donc

$$\lim_{x \overset{\leq}{\to} x_0} f(x) = \sup\{f(x), x < x_0\}$$

tandis que (par le même raisonnement) la limite à droite de f au point x_0 est

$$\lim_{x \overset{\geq}{\to} x_0} f(x) = \inf\{f(x), x < x_0\}$$

On écrira ce qui se passe si f est décroissante ■

Exemples

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$ définie par

$$f(x) = x - E(x)$$

En tout point $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, la fonction f admet une limite égale à $f(\alpha)$ on vérifiera ce fait en utilisant la définition (1.1.2) du développements décimaux d'un nombre réel alors $\alpha \in \mathbb{R}$ il éxiste une collection de chiffres $\{c_0, ..., c_m\}$ et $\{d_1, d_2, ...\}$ compris entre 0 et 9. Les chiffres c_i sont en nombre fini et les chiffres d_j peuvent être en nombre infini.tel que $\alpha = c_m \dots c_2 c_1 c_0, d_1 d_2 ... d_n$ donc

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= c_m \dots c_2 c_1 c_0, d_1 d_2 ... d_n - E(c_m \dots c_2 c_1 c_0, d_1 d_2 ... d_n) \\ &= c_m \dots c_2 c_1 c_0, d_1 d_2 ... d_n - c_m \dots c_2 c_1 c_0 \\ &= 0, d_1 d_2 ... d_n \in [0,1] \end{aligned}$$

En revanche, en tout point de $\beta \in \mathbb{Z}$, la fonction f a pour limite à gauche

$$\lim_{x \overset{\leq}{\to} \beta} f(x) = 1$$

limite à droite

$$\lim_{x \overset{\geq}{\to} \beta} f(x) = 0.$$

Soit f la fonction définie sur $D =]-\pi, \pi[/\{0\}$

$$\begin{array}{ccc} D & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} \end{array}$$

En tout point x de D, f a pour limite $f(x)$; en revanche, au point $x = 0$, f a pour limite à droite $+\infty$ (car $x \longmapsto \cos(x)$ a pour limite 1 en 0 tandis que $x \longmapsto \sin(x)$ a pour limite en zéro à droite 0 par valeurs supérieures) et à gauche $-\infty$ (car $x \longmapsto \cos(x)$ a pour limite 1 en 0 tandis que $x \longmapsto \sin(x)$ a pour limite en zéro à gauche 0 par valeurs inférieures). Au point π, on vérifiera que f a pour limite $-\infty$ tandis qu'en $-\pi$, f a pour limite $+\infty$.

Proposition 3.2.11 *Soient $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ f $D \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction réelle. Si f admet une limite finie ou infinie en un point fini ou infini alors cette limite est unique*

Proposition 3.2.12 (Opérations sur les limites) *Soient f et g deux fonctions réelles de D dans $\mathbb{R}$ tel que*

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \ell \quad \lim_{x\to\alpha} g(x) = \ell' \quad \textit{où} \quad \ell, \ell' \in \mathbb{R}$$

alors

$$\lim_{x\to\alpha} (f+g)(x) = \lim_{x\to\alpha} f(x) + \lim_{x\to\alpha} g(x) = \ell + \ell'$$

$$\lim_{x\to\alpha} (fg)(x) = \lim_{x\to\alpha} f(x) \lim_{x\to\alpha} g(x) = \ell\ell' \qquad \lim_{x\to\alpha} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\ell} \qquad si\ \ell \neq 0$$

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{1}{f(x)} = 0 \quad si \ \lim_{x\to\alpha} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \ell \ et \ \lim_{x\to\ell} g(x) = \ell' \ alors \ \lim_{x\to\ell} gof(x) = \ell'$$

Remarque 3.2.13 *Il y a des situations où l'on ne peut rien dire sur les limites. Par exemple si $\lim_{x\to\alpha} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to\alpha} g(x) = -\infty$ alors on ne peut a priori rien dire sur la limite de $\lim_{x\to\alpha} (f+g)(x)$ (cela dépend vraiment de f et de g). On raccourci cela en $+\infty - \infty$ est une forme indéterminée. Voici une liste de formes indéterminées :*

$+\infty - \infty$	$0 \ \pm\infty$	$\frac{0}{0}$	$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$	$1^{+\infty}$	0^{∞}	∞^{0}

Enfin voici une proposition très importante qui lie le comportement d'une limite avec les inégalités. Il y a une méthode qui permet trés souvent de trouver les limites (lorsqu'elles existent) : il s'agit d'identifier les termes dominants (en valeur absolue) et de les mettre en facteur.

Décomposition

Lorsqu'on veut calculer une limite, on est souvent ramener à une expression du type

$$\frac{A+B}{C+D}$$

chaque expression A, B, C et D pouvant être du même genre. Calculer les limites lorsque x tends $\pm\infty$ de

$$f(x) = \frac{e^x - x^3}{\ln|x| + x^2 - x}$$

Menguelti Ali

On peut écrire

$$A = e^x, B = x^3, C = \ln|x|, D = x^2 - x$$

Ensuite on redécoupe D en $(a+b)/(c+d)$ en posant par exemple

$$a = x^2, b = -x, c = 1 \quad et \quad d = 0.$$

Calcul de chaque terme . On détermine pour chaque terme de la décomposition sa limite (éventuelle). On identifie les formes indéterminées. Ensuite, on met en facteurs les termes dominants.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - x^3}{\ln|x| + x^2 - x}$$

Au numérateur, A est dominant. Pour le dénominateur, a est dominant puis D est dominant. On trouve donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x\left(1 - x^3e^{-x}\right)}{x^2\left(\frac{\ln|x|}{x^2} + 1 - \frac{1}{x}\right)}$$

La quantité $(1 - x^3e^{-x})$ tend vers 1 si x tend vers $+\infty$. De même $\frac{\ln|x|}{x^2} + 1 - \frac{1}{x}$. Il reste

donc à étudier

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$$

Pour x tend vers $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - x^3}{\ln|x| + x^2 - x}$$

Au numérateur, le terme dominant devient x^3 puisqu'il tend vers $-\infty$, alors que e^x tend vers 0. Le terme dominant pour le dénominateur est encore x^2. On trouve donc

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - x^3}{\ln|x| + x^2 - x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3\left(\frac{e^x}{x^3} - 1\right)}{x^2\left(\frac{\ln|x|}{x^2} + 1 - \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} (-x) = +\infty$$

Si on veut étudier la limite en 0, à ce moment le numérateur tend vers une quantité finie 1. Le dénominateur tend vers $-\infty$. La limite existe donc et vaut 0.

Proposition 3.2.14 (Passage à la limite dans les inégalités) *Soient* $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$ *et* $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ *et* f g *deux fonctions réelles de* D *dans* $\mathbb{R}$ *telles que*

$$f(x) \leq g(x)$$

dans un voisinage de α *alors si*

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \ell \quad \lim_{x\to\alpha} g(x) = \ell' \Rightarrow \ell \leq \ell'$$

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to\alpha} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to\alpha} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to\alpha} f(x) = -\infty$$

Proposition 3.2.15 *Soient* f g h *trois fonctions réelles de* D *dans* $\mathbb{R}$ *telles que*

$$f(x) = g(x)\,h(x)$$

Si on a h *est borné sur un voisinage de* α *et* $\lim_{x\to\alpha} g(x) = 0.$ *alors*

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = 0$$

Démonstration. Par hypothèse sur h,on a

$$|h(x)| \leq M \text{ dés que } |x-\alpha| \leq \eta$$

soit $\varepsilon > 0$ et soit $\eta_{\varepsilon,M} = \varepsilon/M$ tel que

$$g(x) \leq \varepsilon/M \text{ dés que } |x-\alpha| \leq \eta$$

Un tel η existe car $\lim_{x\to\alpha} g(x) = 0$. Mais alors

$$|f(x)| = |g(x)\,h(x)| \leq \frac{\varepsilon}{M} M \leq \varepsilon \text{ dés que } |x-\alpha| \leq \eta$$

ce qui montre que $f(x)$ tend vers 0. ∎

Théorème 3.2.16 (Théorème des gendarmes) *Soient* $\ell, \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ *et* f g h *trois fonctions réelles de* D *dans* $\mathbb{R}$ *telles que*

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

dans un voisinage de α *alors si*

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \ell \quad \lim_{x\to\alpha} g(x) = \ell \Rightarrow \lim_{x\to\alpha} h(x) = \ell$$

Exemple : Montrons par le théorème des gendarmes que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$$

on a

$$\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[,\ \sin(x)\leq x\leq\tan(x)$$

Comme

$$\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[,\ \cos(x)>0$$

alors

$$\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[,\ x\leq\tan(x)\Rightarrow x\cos(x)\leq\sin(x)$$

alors

$$x\cos(x)\leq\sin(x)\leq x\Rightarrow\cos(x)\leq\frac{\sin(x)}{x}\leq 1$$

d'où

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$$

Exercices : Déterminer, si elle existe, les limites suivantes

$$(1)-\lim_{x\to 0}x\cos\left(\frac{1}{x}\right)\quad(2)-\lim_{x\to 0}x\left[\frac{1}{x}\right];\quad(3)-\lim_{x\to 0}\frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right]\quad a,b>0$$

$$(4)-\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^3+1}\right),(5)-\lim_{x\to 0}x\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos(x)\right)}{\sin(\sin x)}$$

Pour

$$\lim_{x\to 0}x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

On pose

$$y=\frac{1}{x}\ \Rightarrow x=\frac{1}{y}\text{ de plus si }x\to 0\ \Rightarrow y\to+\infty$$

alors

$$\lim_{x\to 0}x\cos\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{y\to+\infty}\frac{\cos(y)}{y}=0\ \text{ car la fonction }\cos(y)\text{ est borné}$$

Pour

$$\lim_{x\to 0}x\left[\frac{1}{x}\right]$$

On a

$$\left[\frac{1}{x}\right] \leq \frac{1}{x} < \left[\frac{1}{x}\right] + 1$$

alors pour $x > 0$

$$x\left[\frac{1}{x}\right] \leq 1 < x\left[\frac{1}{x}\right] + x \quad \text{pour} \quad x > 0$$

de plus

$$1 - x \leq x\left[\frac{1}{x}\right] \leq 1$$

et pour $x < 0$

$$1 \leq x\left[\frac{1}{x}\right] \leq 1 - x \quad \text{pour} \quad x > 0$$

donc

$$\lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1 \ \text{ car } \lim_{x\to 0} 1 - x = 1$$

Pour

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right]$$

On pose

$$x = by \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right] = \lim_{y\to 0} \frac{by}{a}\left[\frac{1}{y}\right] = \frac{b}{a}$$

Pour

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt[3]{x^3+1}\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{(x^2+1) - \sqrt[3]{(x^3+1)^2}}{\left(\sqrt{x^2+1} + \sqrt[3]{x^3+1}\right)}\right)$$

On a

$$A^3 - B^3 = (A - B)\left(A^2 + AB + B^2\right)$$

alors on pose

$$A = \left(x^2+1\right) \ et \ B = \sqrt[3]{(x^3+1)^2}$$

et

$$h(x) = \frac{x}{\left(\sqrt{x^2+1} + \sqrt[3]{x^3+1}\right)}(A - B) = \frac{x}{\left(\sqrt{x^2+1} + \sqrt[3]{x^3+1}\right)}\frac{A^3 - B^3}{(A^2 + AB + B^2)}$$

donc

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^3+1}\right)} \frac{A^3-B^3}{(A^2+AB+B^2)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{A^3-B^3}{2(A^2+AB+B^2)}$$

alors

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x^2+1\right)^3-\left(x^3+1\right)^2}{2\left(\left(x^2+1\right)^2+\left(x^2+1\right)\sqrt[3]{\left(x^3+1\right)^2}+\sqrt[3]{\left(x^3+1\right)^4}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x^2+1\right)^3-\left(x^3+1\right)^2}{2\left(\left(x^2+1\right)^2+\left(x^2+1\right)\sqrt[3]{\left(x^3+1\right)^2}+\sqrt[3]{\left(x^3+1\right)^4}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4-2x^3+3x^2}{2\left(x^4+2x^2+1+\left(x^2+1\right)\sqrt[3]{x^6+2x^3+1}+\sqrt[3]{x^{12}+4x^9+6x^6+4x^3+1}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4\left(3-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{2x^4\left(1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^6}}+\sqrt[3]{1+\frac{4}{x^3}+\frac{6}{x^6}+\frac{4}{x^9}+\frac{1}{x^{12}}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(3-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{2\left(1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^6}}+\sqrt[3]{1+\frac{4}{x^3}+\frac{6}{x^6}+\frac{4}{x^9}+\frac{1}{x^{12}}}\right)} = \frac{1}{2}$$

Pour

$$\lim_{x\to 0} x\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos(x)\right)}{\sin(\sin x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos(x)\right)}{\frac{\sin(\sin x)-\sin(\sin 0)}{x-0}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos(x)\right)}{\cos(x)\cos((\sin x))|_0} = 0$$

3.3 Comparaison des fonctions

Définition 3.3.1 (Vocabulaire et notations) *Soient f et g deux fonctions définies sur un domaine D, et $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ dans D ou à son bord, avec g ne s'annulant pas en dehors de α (si $\alpha \in D$). On dit que :*

1. *f est négligeable devant g au voisinage de α, et on note*

$$f \underset{\alpha}{=} o(g) \quad si \ \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

2. *f est dominée par g au voisinage de α, et on note*

$$f \underset{\alpha}{=} O(g) \quad si \ \frac{f}{g} \ \textit{est bornée au voisinage de } \alpha$$

3. *f est équivalente à g au voisinage de α, et on note*

$$f \sim g \quad si \ \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

3.3.1 Des propriétés élémentaires

Tous les résultats de cette partie sont élémentaires. Il faut les comprendre, et savoir les prouver rapidement, puisqu'il n'est pas question de les apprendre.

Proposition 3.3.2 (Transitivité des comparaisons) *Soient f, g, h trois fonctions définies au voisinage de α*

$$\begin{aligned}
&Si \ \ f \underset{\alpha}{=} o(g) \ \ et \ g \underset{\alpha}{=} o(h) \Rightarrow f \underset{\alpha}{=} o(h)\\
&Si \ \ f \underset{\alpha}{=} o(g) \ \ et \ g \underset{\alpha}{=} O(h) \Rightarrow f \underset{\alpha}{=} o(h)\\
&Si \ \ f \underset{\alpha}{=} O(g) \ \ et \ g \underset{\alpha}{=} o(h) \Rightarrow f \underset{\alpha}{=} o(h)\\
&Si \ \ f \underset{\alpha}{=} O(g) \ \ et \ g \underset{\alpha}{=} O(h) \Rightarrow f \underset{\alpha}{=} O(h)\\
&Si \ \ f \underset{\alpha}{=} o(g) \ \ et \ g \underset{\alpha}{\sim} h \Rightarrow f \underset{\alpha}{=} o(h)\\
&Si \ \ f \underset{\alpha}{=} O(g) \ \ et \ g \underset{\alpha}{\sim} h \Rightarrow f \underset{\alpha}{=} O(h)
\end{aligned}$$

Proposition 3.3.3 (Comparaisons de sommes et de produits) *Soient f, g, u, v quatre fonctions définies au voisinage de $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$*

$$Si \ \ f \underset{\alpha}{=} o(u) \ \ et \ g \underset{\alpha}{=} o(u) \Rightarrow f + g \underset{\alpha}{=} o(u), \ \ Si \ \ f \underset{\alpha}{=} O(u) \ \ et \ g \underset{\alpha}{=} O(u) \Rightarrow f \underset{\alpha}{=} O(u)$$

$$Si \ f \underset{\alpha}{\sim} u \ et \ g \underset{\alpha}{\sim} v \Rightarrow \ fg \underset{\alpha}{\sim} uv \quad , Si \ f \underset{\alpha}{\sim} u \ et \ g \underset{\alpha}{\sim} v \Rightarrow \ \frac{f}{g} \underset{\alpha}{\sim} \frac{u}{v}$$

Remarque 3.3.4 *On ne sommes pas les équivalents et bien entendu on ne passe pas les équivalents a l'exponentielle*

Fonctions usuelles au voisinage de $+\infty$

On va ici comparer les fonctions de référence suivantes au voisinage de $+\infty$, d'abord à l'intérieur d'une même classe, puis entre deux classes

$$x \longmapsto x^{\beta}, x \longmapsto (\ln x)^{\delta}, x \longmapsto e^{\gamma x} \quad \beta\ \gamma\ \delta \in \mathbb{R}$$

Proposition 3.3.5

$$\begin{aligned}
&\text{Si } \beta < \beta' \text{ alors } x^{\beta} \underset{+\infty}{=} o\left(x^{\beta'}\right) \\
&\text{Si } \delta < \delta' \text{ alors } (\ln x)^{\delta} \underset{+\infty}{=} o\left((\ln x)^{\delta'}\right) \\
&\text{Si } \gamma < \gamma' \text{ alors } e^{\gamma x} \underset{+\infty}{=} o\left(e^{\gamma' x}\right)
\end{aligned}$$

Proposition 3.3.6 *Lorsqu'il y a combat, ce sont les exponentielles qui l'emportent sur les polynômes, qui l'emportent eux-même sur les logarithmes"*

$$e^{\gamma x} \underset{\gamma<0}{\ll} x^{\beta} \underset{\beta<0}{\ll} (\ln x)^{\delta} \underset{\beta'>0}{\ll} x^{\beta'} \underset{\gamma'>0}{\ll} e^{\gamma' x}$$

On a ici utilisé la notation $f(x) \ll g(x)$ qui signifie $f = o(g)$ (ici, c'est implicitement au voisinage de $+\infty$).

Fonctions usuelles au voisinage de 0

On compare enfin les polynômes et les logarithmes au voisinage de 0^{+}. Les fonctions $e^{\gamma x}$et tendant vers 1 en 0, ne nous intéressent plus.

Proposition 3.3.7

$$\begin{aligned}
&\text{Si } \beta < \beta' \text{ alors } x^{\beta'} \underset{0^+}{=} o\left(x^{\beta}\right) \\
&\text{Si } \delta < \delta' \text{ alors } (\ln x)^{\delta'} \underset{0^+}{=} o\left((\ln x)^{\delta}\right)
\end{aligned}$$

Proposition 3.3.8 *Lorsqu'il y a combat, ce sont les polynômes, qui l'emportent sur les logarithmes*

$$x^{\beta} \underset{\beta<0}{\ll} (\ln x)^{\delta} \underset{\beta'>0}{\ll} x^{\beta'}$$

implicitement, il s'agit de relations au voisinage de $\ddot{0}^{+}$

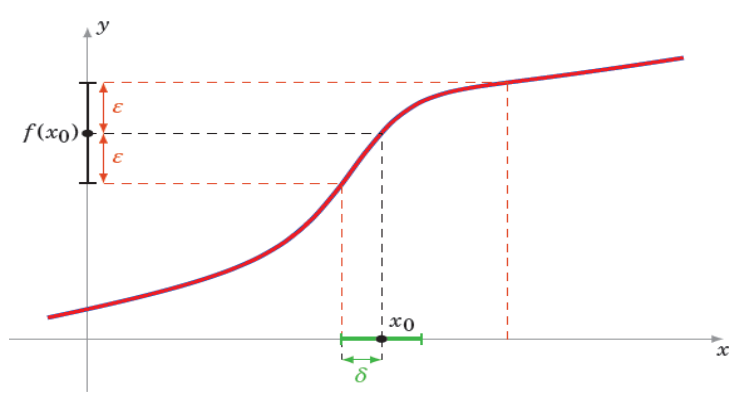
3.4 Fonctions continues

Cauchy (1821) introduisit le concept de fonction continue, en exigeant que des variations indéfiniment petites de x produisent des variations indéfiniment petites de y $f(x)$ sera fonction continue, si la valeur de la différence $f(x+\alpha)-f(x)$ décroît indéfiniment avec celle de α. Bolzano (1817) et Weierstrass (1874) furent plus précis la différence $f(x)-f(x_0)$ doit être arbitrairement petite, si la différefunrce $x-x_0$ est suffisamment petite

Définition 3.4.1 (Continuité en un point) *On dit que f est continue en un point $x_0 \in D$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_{(\varepsilon, x_0)} > 0, \forall x \in D \quad |x-x_0| \leq \eta_{(\varepsilon, x_0)} \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| \leq \varepsilon$$

c'est-à-dire si f admet une limite en x_0 (cette limite vaut alors nécessairement $f(x_0)$)

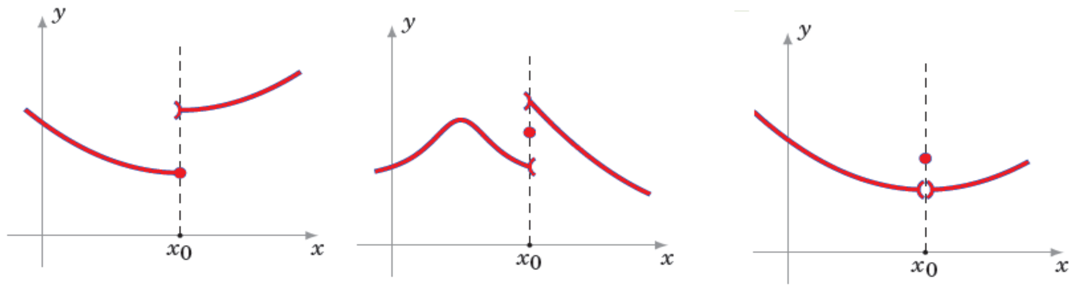


Si A est un sous-ensemble de D, la fonction f est dite continue sur A si et seulement si f est continue en tout point de A. Si f est continue sur D, on dit que f est continue partout

Si f n'est pas continue en x_0, elle est dite discontinue en x_0. La continuité en x_0 est une propriété locale. Elle ne dépend que de la fonction au voisinage de x_0. Intuitivement une fonction est continue sur un intervalle, si on peut tracer son graphe « sans lever le crayon », c'est-à-dire si elle n'a pas de saut. Voici des fonctions

Menguelti Ali

qui ne sont pas continues en x_0



Définition 3.4.2 *L'ensemble des fonctions continues de D dans $\mathbb{R}$ est noté $C^0(D, \mathbb{R})$.*

Il existe une définition alternative de la continuité, que nous présentons maintenant.

Théorème 3.4.3 *Soit f une fonction définie sur D et x_0 un point de D. Alors*

$$f \text{ est continue en } x_0 \Longleftrightarrow \begin{array}{l} \text{pour toute suite } (u_n)_{n\geq 0} \text{ qui convergevers } x_0 \\ \text{la suite } (f(u_n))_{\geq 0} \text{ converge vers } f(x_0) \end{array}$$

Autrement dit

$$f \text{ est continue en } x_0 \Longleftrightarrow \begin{array}{c} \forall (u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ tel que } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x_0 \\ \\ \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n) = f(x_0) \end{array}$$

Démonstration. $\Longrightarrow$On suppose que f est continue en x_0 et que $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite qui converge vers x_0 et on veut montrer que la suite $(f(u_n))_{\geq 0}$ converge vers $f(x_0)$

Soit $\varepsilon > 0$, Comme f est continue en x_0, il existe un $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in D \quad |x - x_0| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

comme $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite qui converge vers $x_0, \exists N \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$\forall n > N, \ |u_n - x_0| \leq \eta$$

On en déduit que, pour tout $\forall n > N$, comme$|u_n - x_0| \leq \eta$, on

$$|f(u_n) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

et donc $(f(u_n))_{\geq 0}$ converge vers $f(x_0)$

$\Longleftarrow$On va montrer la contraposée : supposons que f n'est pas continue en x_0 et montrons qu'alors il existe une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ qui converge vers x_0 et telle que $(f(u_n))_{\geq 0}$ ne converge pas vers $f(x_0)$.

Par hypothèse, comme f n'est pas continue en x_0

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in D \quad |x - x_0| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

On construit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de la façon suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on choisit dans l'assertion précédente $\eta = \dfrac{1}{n}$ et on obtient qu'il existe $(u_n)_{n\geq 1}$ tel que

$$|u_n - x_0| \leq \frac{1}{n} \text{ et } |f(u_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers x_0 alors que la suite $(f(u_n))_{\geq 0}$ ne peut pas converger vers $f(x_0)$ ■

Exemples des fonctions continues.

1. Les fonctions constantes sont clairement continues.
2. La fonction identité sur D

$$\begin{aligned} I_D \quad D \subset \mathbb{R} &\longmapsto \mathbb{R} \\ x &\longmapsto I_D(x) = x \end{aligned}$$

   est clairement continue.
3. La fonction f définie par

$$\mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos(x)}{x^2} & si\ x \neq 0 \\ \\ \dfrac{1}{2} & si\ x = 0 \end{cases}$$

est continue en 0. En effet, nous avons

$$\cos(x) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

4. Soit une fonction $\chi_{\mathbb{Q}}\ \mathbb{R}\longmapsto\mathbb{R}$ définie par

$$\chi_{\mathbb{Q}}\ (x) = \begin{cases} 1\ si\ x\in\mathbb{Q} \\ 0\ si\ x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$$

cette fonction est partout discontinue en effet soit $x\in\mathbb{Q}$ et soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suited'irrationnels tendant vers x

$$\underbrace{\lim_{n\to+\infty}\chi_{\mathbb{Q}}(u_n)}_{=0} \neq \underbrace{\chi_{\mathbb{Q}}\left(\lim_{n\to+\infty}u_n\right)}_{=1}$$

Similairement $x\notin\mathbb{Q}$ considèrons une suite de rationnels tendant vers x.

5. Par contre la fonction $\chi_{\mathbb{Q}}\ \mathbb{Q}\longmapsto\mathbb{R}$ définie par

$$\chi_{\mathbb{Q}}\ (x) = \begin{cases} 1\ si\ x\in\mathbb{Q} \\ 0\ si\ x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$$

est continue (car constante). Ainsi, il est très important de préciser le domaine de définition.

Définition 3.4.4 (Continue à droite et à gauche) *Soit $f\ D\longmapsto\mathbb{R}$*

– *f est continue **à droite** en x_0 lorsque*

$$\lim_{x\overset{>}{\to}x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\eta_{\varepsilon,x_0}>0, \forall x\in D\ \ x_0\leq x\leq x_0+\eta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|\leq\varepsilon$$

– *f est continue **à gauche** en x_0 lorsque*

$$\lim_{x\overset{<}{\to}x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\eta_{\varepsilon,x_0}, \forall x\in D\ \ x_0-\eta\leq x\leq x_0 \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|\leq\varepsilon$$

– *f est continue en x_0 lorsque*

$$\lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = f(x_0)$$

Exemples de fonctions discontinues

1. La fonction
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \; si \; x \neq 0 \\ \\ 0 \; si \; x = 0 \end{cases}$$
est discontinue en 0 en effet
$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = -\infty, \; \lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = +\infty \quad et \; f(0) = 0$$

2. La fonction partie entiére
$$f(x) = [x]$$
est discontinue en tout point entier. En effet soit $x_0 \in \mathbb{Z}$ alors
$$\lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} x_0} [x] = x_0 - 1 \; et \; \lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} x_0} [x] = x_0 = f(x_0)$$
donc
$$\lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) \neq \lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = f(x_0)$$
d'où f est continue à droite mais discontinue à gauche

Définition 3.4.5 *Si D est un intervalle de $\mathbb{R}$, $C^0(D)$ désigne l'ensemble des applications de D dans $\mathbb{R}$ continues en tout point de D.*

Proposition 3.4.6 *Si $f,g \in C^0(D)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors*

$$\alpha f + \beta g \in C^0(D), f \times g \in C^0(D)$$

Si f est à valeurs non nulles, alors

$$\frac{1}{f} \in C^0(D)$$

Si $f \in C^0(D)$ est à valeurs dans J et $g \in C^0(J)$, alors

$$gof \in C^0(D).$$

Si $f, g \in C^0(D)$, alors $|f|$, $\max(f,g)$ et f^+ sont dans $C^0(D)$.

Cette proposition regroupe des résultats qui sont conséquences simples du caractère local de la continuité, et des résultats de la partie précédente.

Proposition 3.4.7 *Soient* $f\ D \longmapsto \mathbb{R}$: $g\ J \longmapsto \mathbb{R}$ *deux fonctions telles que* $f(D) \subset J$. *Si* f *est continue en un point* x_0 *et si* g *est continue en* $f(x_0)$, *alors* gof *est continue en* x_0.

Définition 3.4.8 (Prolongement par continuité) *Soit* D *un intervalle,* x_0 *un point de* D *et* $f\ D/\{x_0\} \longmapsto \mathbb{R}$ *une fonction. On dit que* f *est prolongeable par continuité en* x_0 *si* f *admet une limite finie en* x_0. *Notons alors*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

On définit alors la fonction $\widetilde{f}\ D \longmapsto \mathbb{R}$ *en posant pour tout* $x \in D$

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \neq x_0 \\ \\ \ell & si\ x = x_0 \end{cases}$$

Alors $\widetilde{f}$ *est continue en* x_0 *et on l'appelle le prolongement par continuité de* f *en* x_0.

Exemple

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ *par*

$$f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Voyons si f admet un prolongement par continuité en 0 ? Comme pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a

$$\left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq x$$

on en déduit que f tend vers 0 en 0. Elle est donc prolongeable par continuité en 0 et son prolongement est la fonction $\widetilde{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ tout entier

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \neq 0 \\ \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

3.4.1 Propriétés des fonctions continues sur un intervalle compact

Définition 3.4.9 (Intervalle compact dans $\mathbb{R}$) *Soit I intervalle de $\mathbb{R}$. I est dit compact dans $\mathbb{R}$ si seulement si I est un intervalle fermé et borné*

Définition 3.4.10 *Soient $f: \ D \longmapsto \mathbb{R}$ et x_0. La fonction f admet un maximum en x_0 si*

$$\forall x \in D \ f(x) \leq f(x_0)$$

La fonction f admet un minimum en x_0 si

$$\forall x \in D \ f(x) \geq f(x_0)$$

Théorème 3.4.11 (Bolzano-Weierstrass) *Soit $f \ [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors l'ensemble*

$$f\ ([a,b]) = \{f(x) \ \ x \in [a,b]\}$$

est borné et il existe $x_m \in [a,b], x_M \in [a,b]$ tels que

$$f\ (x_m) = \inf_{x \in [a,b]} f(x) = \min_{x \in [a,b]} f(x)$$

$$f\ (x_M) = \sup_{x \in [a,b]} f(x) = \max_{x \in [a,b]} f(x)$$

Ce théorème remonte à Bolzano et a été utilisé par Weiestrass (1861) et Cantor (1870).

Remarque 3.4.12 *Les hypothéses de ce théorème sont essentielles :*

⋆ *Prenons la fonction*

$$f(x) = \begin{cases} x \ si \quad 0 \leq x < 1 \\ \\ 1 \quad si \ x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Alors $\sup\limits_{x \in [a,b]} f(x) = 1$ mais cen'est pas un maximum f est discontinue en 1

⋆ *La fonction*

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \textit{avec} \;\; 0 < x \leq 1$$

n'est pas born´ee sur l'intervalle considéré. Dans cet exemple f est continue, l'intervalle considéré est borné mais n'est pas fermé.

⋆ *Consid´erons*

$$f(x) = \exp(x) \quad si \quad -\infty < x \leq 0.$$

On a

$$\inf_{-\infty<x\leq 0} f(x) = \inf_{-\infty<x\leq 0} \exp(x) = 0$$

mais ce n'est pas un minimum. Ici f est continue et l'intervalle considéré est fermé mais il n'est pas borné

Démonstration. Montrons que f est majorée, raisonnons par l'absurde. Supposons que l'ensemble

$$f\;([a,b]) = \{f(x) \;\; x \in [a,b]\}$$

ne soit pas majoré. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $c_n \in [a,b]$ tel que

$$f(c_n) \geq n$$

D'aprés le théorème de Bolzano-Weierstrass théorème (2.3.8) il existe une sous-suite $\left(c_{\varphi(n)}\right)$ de (c_n) qui converge vers une limite c. Comme $a \leq c_{\varphi(n)} \leq b$ par passage à la limite dans cette inégalité $a \leq c \leq b$ et puisque f est continue sur $[a,b]$

$$\lim_{n\to+\infty} f(c_{\varphi(n)}) = f(c)$$

D'autre part, par construction

$$f(c_{\varphi(n)}) \geq \varphi(n)$$

par conséquent,

$$\lim_{n\to+\infty} f(c_{\varphi(n)}) = +\infty$$

ce qui est absurde. Notons $M = \sup\{f(x) \;\; x \in [a,b]\}$. Par la proposition (1.2.13), pour tout entier $n > 0$, il existe $c_n \in [a,b]$ tel que

$$M - \frac{1}{n} \leq f(c_n) \leq M$$

Par le théoréme de Bolzano-Weierstrass théorème (2.3.8), il existe une sous-suite $\left(c_{\varphi(n)}\right)$ de (c_n) qui converge vers une limite $x_M \in [a,b]$. Par continuité,

$$\lim_{n\to+\infty} f(c_{\varphi(n)}) = f(x_M)$$

et par passage à la limite dans l'in´egalité ci-dessus $\lim\limits_{n\to+\infty} f(c_{\varphi(n)}) = M$. Ainsi

$$f(x_M) = M$$

fet le sup est atteint en x$_M$, c'est donc un max. La même preuve s'applique pour le minimum. ■

Théorème 3.4.13 (Théorème des valeurs intermédiaires le cas où $\lambda = 0$) *Soit f $[a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue. Si*

$$f(a)f(b) < 0$$

alors il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$f(c) = 0$$

Démonstration. On suppose que $f(a) \leq f(b)$ *et* $0 \in [f(a), f(b)]$ .On pose :

$$A = \{x \in [a,b], f(x) \leq 0\}$$

L'ensemble A est non vide (car il contient a) et est majoré par b. Il admet donc une borne supérieure qu'on note c. On a

$$a \leq c \leq b$$

$a \in A$ et b est un majorant de A. On va montrer que $f(c) = 0$. On commence par remarquer qu'il existe une suite $(c_n)_{n\geq 0}$ de points de A tel que

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = c$$

Par continuité de f en c, on a donc

$$f(c) = \lim_{n\to+\infty} f(c_n)$$

et donc, comme $f(c_n) \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que $f(c) \geq 0$. On suppose maintenant que

$$f(c) < 0$$

et on montre que ceci est impossible. On a donc $c < b$ (car $f(b) \geq 0$). Posons

$$\varepsilon = -f(c) > 0.$$

Par continuité de f en c,il existe donc $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in [a, b] \quad |x - c| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(c)| \leq \varepsilon$$

On a donc, en particulier, avec $\beta = \min(\eta; b - c) > 0$

$$c \leq x \leq c + \beta \Rightarrow f(x) \leq f(c) + \varepsilon = 0$$

Ceci prouve que $c + \beta \in A$, en contradiction avec la définition de c (qui est

$$c = \sup A.$$

On a ainsi montré que $f(c)$ n'est pas strictement inférieur à 0. Donc $f(c) = 0$ ■

Théorème 3.4.14 (Théorème des valeurs intermédiaires) *Soit* $f \;\; [a, b] \longmapsto \mathbb{R}$ *une fonction continue.* λ *et un réel compris entre* $f(a)$ *et* $f(b)$*. Alors il existe* $c \in [a, b]$ *tel que*

$$f(c) = \lambda$$

Démonstration. Si $\lambda = f(a)$, on prend $c = a$ et si $\lambda = f(b)$, on prend $c = b$. Donc $\lambda \neq f(a) \neq f(b)$. Soit la fonction

$$\begin{array}{rcl} g \;\; [a, b] & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = f(x) - \lambda \end{array}$$

La fonction g est continue sur $[a, b]$ *et*

$$g(a) = f(a) - \lambda \qquad g(b) = f(b) - \lambda$$

et

$$g(a)g(b) < 0$$

Menguelti Ali

donc il existe $c \in [a, b]$ *tel que*

$$g(c) = 0 \Rightarrow f(c) = \lambda$$

On peut résumer le théoréme des valeurs intermédiaires et le théoréme de Weierstrass en l'énoncé suivant ■

Corollaire 3.4.15 *L'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle, l'image d'un intervalle compact par une application continue est un intervalle compact.*

Théorème 3.4.16 (Fonctions réciproques) *Soient D un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : D \longmapsto \mathbb{R}$une fonction continue et strictement montone sur D. Alors f établit une bijection de D sur l'intervalle $E = f(D)$. L'application réciproque de f, notée f^{-1} est continue sur E et a la même montonie que f.*

3.4.2 Continuité uniforme

Définition 3.4.17 (Continuité uniforme) *Soit f $D \to \mathbb{R}$. On dit que f est uniformément continue sur D lorsque*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon > 0, \forall x, y \in D, |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Remarque 3.4.18 *La définition de la continuité en un point y est*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_{(\varepsilon,y)} > 0, \forall x \in D \quad |x - y| \leq \eta_{(\varepsilon,y)} \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

et celle de la continuité uniforme

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon > 0, \forall x, y \in D, |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Dans le premier cas η dépend de y et ε, dans le second cas η ne dépend que de ε.

Proposition 3.4.19 *Toute fonction uniformément continue est continue.*

Définition 3.4.20 (Fonction lipschitzienne) *On dit que la fonctions est lipschitzienne sur D si il vérifie*

$$\forall x, y \in D, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y| \quad k \in \mathbb{R}_+$$

Le cas au $k \in]0, 1[$ on dit que f est contractante

Exemple

1. Toute fonction lipschitzienne $f : D \longmapsto \mathbb{R}$ est uniformément continue sur D.En effet par définition

$$\forall x, y \in D, |f(x) - f(y)| \leq k|x-y| \quad k \in \mathbb{R}_+$$

on peut prendre $\eta = \dfrac{\varepsilon}{k}$ on obtien

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x, y \in D, |x-y| \leq \eta \Rightarrow \; |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

2. La fonction $f(x) = x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.En effet soit $x, y \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$\left|x^2 - y^2\right| \leq \varepsilon \Rightarrow |x-y||x+y| \leq \varepsilon \Rightarrow |x-y| \leq \frac{\varepsilon}{|x+y|}$$

Il faut donc prendre

$$\eta \leq \frac{\varepsilon}{|x+y|} \ \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ tel que } x+y \neq 0$$

Hélas

$$\inf_{x,y\in\mathbb{R}} \left\{\frac{1}{|x+y|} \quad x+y \neq 0\right\} = 0$$

et un tel η ne saurait être positive. Mais la fonction $f(x) = x^2$ est uniformément continue sur tout intervalle férme borné $[a,b]$. En effet soit $x, y \in [a,b]$ *tel que*

$$\left|x^2 - y^2\right| \leq \varepsilon \Rightarrow |x-y||x+y| \leq \varepsilon \Rightarrow |x-y| \leq \frac{\varepsilon}{|x+y|} \leq \frac{\varepsilon}{\min\limits_{x,y\in[a,b]} \{|x+y| \quad x+y \neq 0\}}$$

Il faut donc prendre

$$\eta = \frac{\varepsilon}{\min\limits_{x,y\in[a,b]} \{|x+y| \quad x+y \neq 0\}}$$

3. La fonction $f \ \ ]0,1] \ \longmapsto \mathbb{R}$ n'est pas uniformément continue. f n'est pas uniformément continue donc

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta_\varepsilon > 0, \exists x, y \in D, |x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$$

Raisonnons par l'absurde. Fixons $\varepsilon = 1$.Supposons qu'il existe $\eta > 0$ tel que

$$|x-y| \leq \eta \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| \leq \varepsilon = 1$$

En particulier, $y = \eta$ nous obtenons

$$|x-\eta| \leq \eta \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{\eta}\right| \leq 1.$$

alors

$$\frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{\eta}$$

Laisser x tendre vers 0 nous mène à une contradiction

Les contre-exemples de fonctions continues mais non uniformément continues ne sont jamais sur des segments. Cela provient du fait que toute fonction continue sur un compact est en fait uniformément continue, comme le montre le théorème suivant.

Théorème 3.4.21 (Heine, 1872) *Soit $f : [a; b] \longmapsto \mathbb{R}$. Si f est continue, alors f est uniformément continue.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. Soit $f : [a; b] \longmapsto \mathbb{R}$ non uniformément continue.

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x_\eta, y_\eta \in D, |x_\eta - y_\eta| \leq \eta \Rightarrow |f(x_\eta) - f(y_\eta)| \geq \varepsilon$$

Prenons

$$\eta = \frac{1}{n}.$$

où $n \in \mathbb{N}$. On obtient ainsi deux suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ qui vérifient

$$x_n, y_n \in [a; b] \ \ |x_n - y_n| \leq \frac{1}{n} \ \ et \ \ |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$$

En utilisant le th´eor‘eme de Bolzano-Weierstrass théorème (2.3.8) on peut extraire de ces suites deux sous-suites convergentes $(x_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ et $(y_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$.Comme

$$\left|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}\right| \leq \frac{1}{\varphi(n)}$$

ont une limite commune ℓ. Comme

$$\left|f\left(x_{\varphi(n)}\right)-f\left(y_{\varphi(n)}\right)\right|\geq\varepsilon$$

puisque f est continue on a

$$\lim_{n\to+\infty}\left|f\left(x_{\varphi(n)}\right)-f\left(y_{\varphi(n)}\right)\right|=\left|f\left(\lim_{n\to+\infty}x_{\varphi(n)}\right)-f\left(\lim_{n\to+\infty}y_{\varphi(n)}\right)\right|\geq\varepsilon$$

donc

$$0\geq\varepsilon$$

ce qui est absurde. ■

3.5 Exercices

Exercice 3.5.1 *Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes d'une variable réelle*

$$f\left(x\right)=\sqrt{-x}+\frac{1}{\sqrt{1-x}},g\left(x\right)=\sqrt{\tan\left(x\right)},h\left(x\right)=\sqrt{\cos\left(2x\right)},k\left(x\right)=\frac{\log\left(1+x\right)}{1-x}$$

Exercice 3.5.2 *Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ tel que*

$$\forall x\in\mathbb{R}_+\ g\left(x\right)>0\qquad\lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\ell\neq0$$

Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty}f\left(x\right)=0\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}g\left(x\right)=0$$

Montrer que si $\ell>0$

$$\lim_{x\to+\infty}f\left(x\right)=+\infty\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}g\left(x\right)=+\infty$$

Exercice 3.5.3 *En utilisant la définition d'une limite, montrer que :*

$$\lim_{x\to\frac{2}{3}}\left(3x-2\right)\sin\left(\frac{1}{\left(3x-2\right)}\right)=0,\ \lim_{x\to0}\frac{2}{\left(1+e^{-\frac{1}{|x|}}\right)}=2,\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x+e^{-x}}=+\infty$$

Exercice 3.5.4 *Soit* $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ *calculer les limites suivantes*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x}, \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^m+1}-\sqrt{1-x^m}}{x^n}, \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{\sqrt{x}-1}, \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sin(2x)}\right)\sin(x)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^{x^2}-b^{x^2}}{\left(a^x-b^x\right)^2}, \lim_{x\to 0} \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}, \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^2+x}-\sqrt{x+3} \quad \lim_{x\to+\infty} \left(\ln\left(1+e^{-x}\right)\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0} \left(2\sin\left(\sqrt{x}\right)+\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^x$$

Exercice 3.5.5 *Étudier les points de continuité des fonctions suivantes :*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^n-1} & si\ x \neq 1 \\ \\ \dfrac{1}{n} & si\ x = 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2|x|}{x} & si\ x \neq 0 \\ \\ 2 & si\ x = 0 \end{cases}$$

Exercice 3.5.6 *Soit f la fonction definie sur $\mathbb{R}^*$par :*

$$f(x) = x^2 \left[\frac{1}{x}\right]$$

1. *Quels sont les points au f est continue ?.*
2. *Donner les Iimites a droites et a gauche en un point de discontinuite de f.*

Exercice 3.5.7 *Soit f la fonction réelle à valeurs réelles définie par*

$$f(x) = \begin{cases} x & si\ x < 1 \\ x^2 & si\ 1 \leq x \leq 4 \\ 8\sqrt{x} & si\ \ > 4 \end{cases}$$

1. *f est elle continue ?*
2. *Donner la formule définissant f^{-1}*

Exercice 3.5.8 *Soit f $[a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue. Prouver que,si on a*

$$x_{1,}x_2, x_3 \ldots x_n \in [a,b] \Rightarrow \exists x_0 \in [a,b] \ tel\ que\ f(x_0) = \frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\ldots+f(x_n)}{n}$$

Prouver que l'équation

$$(1-x)\cos(x) = \sin(x)$$

admet au moins une solution dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Exercice 3.5.9 *Etudier la continuité uniforme des fonctions suivantes dans les intervalles donnés*

$$y = \sqrt{x} \quad x \in [1, +\infty[\,, y = x^2 \quad x \in \,]-\beta, \beta[$$

3.6 Solution des exercices

Solution d'exercice (3.5.1)

1. Precisons l'ensemble de difinition des fonctions suivantes

$$f(x) = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{1-x}}, g(x) = \sqrt{\tan(x)}, h(x) = \sqrt{\cos(2x)}, k(x) = \frac{\log(1+x)}{1-x}$$

f est bien définie si

$$-x \geq 0 \ et \ 1-x > 0$$

donc

$$D_f = \,]-\infty, 0] \cap \,]-\infty, 1[\, = \,]-\infty, 0]$$

2. g est bien définie si

$$\tan(x) \geq 0 \ \Rightarrow x \in \left[k\pi, \ \frac{\pi}{2} + k\pi\right[\ \ k \in \mathbb{Z}$$

donc

$$D_g = \left[k\pi, \ \frac{\pi}{2} + k\pi\right[, \quad k \in \mathbb{Z}$$

3. h est bien définie si

$$\cos(2x) \geq 0 \ \Rightarrow 2x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[\ \ k \in \mathbb{Z}$$

donc

$$D_h = \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi, \ \frac{\pi}{4} + k\pi\right], \quad k \in \mathbb{Z}$$

4. k est bien définie si

$$x > -1 \text{ et } x \neq 1 \Rightarrow x \in \left]-1, 1\right[\cup \left]-1, +\infty\right[$$

donc

$$D_k = \left]-1, 1\right[\cup \left]-1, +\infty\right[$$

Solution d'exercice (3.5.2)

Montrons que si on a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \ g(x) > 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \neq 0$$

alors

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$$

Par définition on a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists B > 0, \forall x \in D \ \ x \geq B \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \ell \right| \leq \varepsilon$$

donc

$$\ell - \varepsilon \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq \varepsilon + \ell$$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}_+ \ g(x) > 0$ nous obtenons que

$$(\ell - \varepsilon)\, g(x) \leq f(x) \leq (\varepsilon + \ell)\, g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+$$

Si maintenant nous considérons

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$$

et si

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

de même si

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

et si

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

d'où

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

Solution d'exercice (3.5.3)

En utilisant la définition d'une limite, montrons que :

$$\lim_{x\to\frac{2}{3}} (3x-2)\sin\left(\frac{1}{(3x-2)}\right) = 0,\ \lim_{x\to 0} \frac{2}{\left(1+e^{-\frac{1}{|x|}}\right)} = 2,\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x+e^{-x}} = +\infty$$

Pour

$$\lim_{x\to\frac{2}{3}} (3x-2)\sin\left(\frac{1}{(3x-2)}\right) = 0$$

Soit $\varepsilon > 0$

$$\left|(3x-2)\sin\left(\frac{1}{(3x-2)}\right)\right| \leq \left|3\left(x-\frac{2}{3}\right)\right| \leq \varepsilon$$

alors

$$\left|\left(x-\frac{2}{3}\right)\right| \leq \frac{\varepsilon}{3} = \eta$$

donc

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta = \frac{\varepsilon}{3} > 0, \forall x \in D \quad \left|x-\frac{2}{3}\right| \leq \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow \left|(3x-2)\sin\left(\frac{1}{(3x-2)}\right)\right| \leq \varepsilon$$

Pour

$$\lim_{x\to 0} \frac{2}{\left(1+e^{-\frac{1}{|x|}}\right)} = 2$$

Soit $\varepsilon > 0$

$$\left| \frac{2}{\left(1 + e^{-\frac{1}{|x|}}\right)} - 2 \right| = \left| \frac{2e^{-\frac{1}{|x|}}}{1 + e^{-\frac{1}{|x|}}} \right| \leq 2e^{-\frac{1}{|x|}} \leq 2\,|x| \leq \varepsilon$$

alors

$$|x| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta = \frac{\varepsilon}{2} > 0, \forall x \in D \quad |x| \leq \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \left| \frac{2}{\left(1 + e^{-\frac{1}{|x|}}\right)} - 2 \right| \leq \varepsilon$$

Pour

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x + e^{-x}} = +\infty$$

On a

$$\frac{x^2}{x + e^{-x}} \geq \frac{x^2}{x + x} = \frac{x}{2} \qquad car\ x \geq e^{-x} \text{ au vosinage de } +\infty$$

Soit $A > 0$ tel que

$$\frac{x}{2} \geq A$$

alors

$$\forall A > 0, \exists B = 2A > 0, \forall x \in D \quad x \geq 2A \Rightarrow \frac{x^2}{x + e^{-x}} \geq A$$

Solution d'exercice (3.5.4)

Calculons

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x}\right)}{x\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2}{\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x}\right)} = 1$$

Calculons

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^m+1} - \sqrt{1-x^m}}{x^n} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x^m+1} - \sqrt{1-x^m}\right)\left(\sqrt{x^m+1} + \sqrt{1-x^m}\right)}{x^n\left(\sqrt{x^m+1} + \sqrt{1-x^m}\right)}$$

alors

$$\lim_{x\to 0} x^{m-n} = \begin{cases} 0 \quad si \quad m > n \\ 1 \ si \ n = m \\ 0^{+} \ si + \infty \ , \ 0^{-} \ si \ -\infty \quad pour \quad m < n \end{cases}$$

Calculons

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\left(\sqrt{3x+1}-2\right)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{3x+1}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{3x-3\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{3x+1}+2\right)(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{3\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{3x+1}+2\right)} = \frac{3}{2}$$

Calculons

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sin(2x)}\right)\sin(x) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{2\cos(x)}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{2} + \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \ \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{2} + \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x^2} = \frac{1}{2}$$

Calculons

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^{x^2}-b^{x^2}}{\left(a^x-b^x\right)^2} = \lim_{x\to 0} a^{x^2-2x} \ \frac{1-\left(\dfrac{b}{a}\right)^{x^2}}{\left(1-\left(\dfrac{b}{a}\right)^{x}\right)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\left(\dfrac{b}{a}\right)^{x^2}}{\left(1-\left(\dfrac{b}{a}\right)^{x}\right)^2}$$

On pose

$$h = \left(\frac{b}{a}\right)$$

alors

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\left(\dfrac{b}{a}\right)^{x^2}}{\left(1-\left(\dfrac{b}{a}\right)^{x}\right)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-h^{x^2}}{\left(1-h^x\right)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1-h^{x^2}}{x^2}}{\left(\dfrac{1-h^x}{x}\right)^2}$$

Nous pouvons donc calculer

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-h^{x^2}}{x^2} = \lim_{t\to 0} \frac{1-h^t}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1-e^{t\ln(h)}}{t} = -\ln h \ e^{t\ln(h)}\Big|_{t=0} = -\ln h \quad \left(avec \ t = x^2\right)$$

et de la même manière on a

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-h^x}{x}\right)^2=(\ln h)^2$$

Aprés substitution, nous obtenons

$$\lim_{x\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{a^{x^2}-b^{x^2}}{(a^x-b^x)^2}=\frac{-\ln h}{(\ln h)^2}=\frac{-1}{\ln h}=-\frac{1}{\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)}=\frac{1}{\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)}$$

Calculons

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\exp\left[\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)\right]$$

On pose

$$f(x)=\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)=\ln\left(1+\frac{a^x+b^x}{2}-1\right)$$

On a

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$$

donc il existe un fonction

$$\varphi(t)\underset{t\to 0}{\rightarrow}1$$

tel que

$$\ln(1+t)=t\varphi(t)$$

alors

$$f(x)=\left(\frac{a^x+b^x}{2}-1\right)\varphi\left(\frac{a^x+b^x}{2}-1\right)=\left(\frac{a^x+b^x}{2}-1\right)\psi(x)\ \ \textit{tel que}\ \psi(x)\underset{x\to 0}{\rightarrow}1$$

Conséquemment

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\exp\left[\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)\right]&=\lim_{x\to 0}\exp\left[\frac{1}{x}\left(\frac{a^x+b^x}{2}-1\right)\psi(x)\right]\\&=\lim_{x\to 0}\exp\left[\frac{(a^x+b^x-2)}{2x}\psi(x)\right]\end{aligned}$$

Nous allons donc premièrement déterminer

$$\lim_{x\to 0}\frac{(a^x+b^x-2)}{2x}=\frac{1}{2}\left.(a^x+b^x-2)'\right|_0=\frac{1}{2}\left.(\ln a\ a^x+\ln b\ b^x)\right|_0=\frac{1}{2}(\ln ab\ )$$

En substituant ceci dans l'expression

$$\lim_{x\to 0}\exp\left[\frac{(a^x+b^x-2)}{2x}\psi(x)\right]=\exp\left[\frac{1}{2}(\ln ab\ )\right]=\sqrt{ab}$$

Calculons

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^2+x}-\sqrt{x+3}$$

On a

$$A^3-B^3=(A-B)\left(A^2+AB+B^2\right)$$

on pose $A=\sqrt[3]{x^2+x}\ et\ B=\sqrt{x+3}$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^2+x}-\sqrt{x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2+x-(x+3)\sqrt{x+3}\right)}{\left(\left(\sqrt[3]{x^2+x}\right)^2+\left(\sqrt[3]{x^2+x}\right)\left(\sqrt{x+3}\right)+(x+3)\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^4+2x^3+x^2-(x^3+9x^2+27x+27)\right)}{\left(\sqrt[3]{(x^2+x)^2}+\left(\sqrt[3]{x^2+x}\right)\left(\sqrt{x+3}\right)+(x+3)\right)\left(x^2+x+(x+3)\sqrt{x+3}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4+x^3-8x^2-27x-27}{\left(\sqrt[3]{x^4+2x^3+x^2}+\sqrt[3]{x^2+x}\sqrt{x+3}+(x+3)\right)\left(x^2+x+(x+3)\sqrt{x+3}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4+x^3-8x^2-27x-27}{\left(x^{4/3}\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+x^{7/6}\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}\sqrt{1+\frac{3}{x}}+(x+3)\right)x^2\left(1+\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)\sqrt{x+3}\right.}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4\left(1+x^{-1}-8x^{-2}-27x^{-3}-27x^{-4}\right)}{x^{10/3}\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+x^{-1/6}\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}\sqrt{1+\frac{3}{x}}+(x^{-1/3}+3x^{-4/3})\right)\left(1+\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right.\right.}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{x^{10/3}}=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{2}{3}}=+\infty$$

Calculons

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(1+e^{-x}\right)\right)^{\frac{1}{x}}$$

Sachant que

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$$

on peut le reformuler ainsi

$$\ln(1+t)=t\varphi(t)$$

pour une certaine fonction φ qui vérifie

$$\lim_{t\to 0}\varphi(t)=1$$

donc

$$\ln\left(1+e^{-x}\right)=e^{-x}\varphi\left(e^{-x}\right)$$

alors

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(1+e^{-x}\right)\right)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x}\varphi\left(e^{-x}\right)\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\exp\left[\frac{1}{x}\ln\left(e^{-x}\varphi\left(e^{-x}\right)\right)\right]\\ &= \lim_{x\to+\infty}\exp\left[-1+\frac{1}{x}\ln\varphi\left(e^{-x}\right)\right]\end{aligned}$$

donc

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(1+e^{-x}\right)\right)^{\frac{1}{x}}=e^{-1}$$

Calculons

$$\lim_{x\to 0}\left(2\sin\left(\sqrt{x}\right)+\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x}$$

On pose

$$g(x)=2\sin\left(\sqrt{x}\right)+\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

alors

$$\lim_{x\to 0}\left(2\sin\left(\sqrt{x}\right)+\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x}=\lim_{x\to 0}\exp\left[x\ln\left(g(x)\right)\right]$$

on peut reformuler

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$$

par

$$\ln(1+t)=t\varphi(t)$$

Ainsi

$$\lim_{x\to 0}\exp\left[x\ln\left(g\left(x\right)\right)\right]=\lim_{x\to 0}\exp\left[x\ln\left(1+g\left(x\right)-1\right)\right]=\lim_{x\to 0}\exp\left[x^{2}\left(g\left(x\right)-1\right)\psi\left(x\right)\right]$$

avec

$$\psi\left(x\right)=\varphi\left(\left(g\left(x\right)-1\right)\right)\ \text{ tel que }\ \lim_{x\to 0}\psi\left(x\right)=1$$

donc

$$\lim_{x\to 0}\left(2\sin\left(\sqrt{x}\right)+\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x}=1$$

Solution d'exercice (3.5.5)

Pour la fonction

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x^{n}-1} & si\ x\neq 1\\ \\ \dfrac{1}{n} & si\ x=1\end{cases}$$

on la réstriction de la fonction f sur $\mathbb{R}/\left\{1\right\}$ est continue en effet cette réstriction est une composition et somme et multiplication des fonctions continues sur $\mathbb{R}/\left\{1\right\}$. On a

$$A^{n}-B^{n}=\left(A-B\right)\left(\sum_{k=0}^{n-1}A^{n-k-1}B^{k}\right)$$

alors

$$\lim_{x\to 1}f\left(x\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^{n}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n-1}x^{n-k-1}}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n-1}1}=\frac{1}{n}$$

donc la fonction est continue sur tout $\mathbb{R}$

Pour la fonction

$$g\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^{2}+2\left|x\right|}{x} & si\ x\neq 0\\ \\ 2 & si\ x=0\end{cases}$$

on la réstriction de la fonction g sur $\mathbb{R}/\left\{0\right\}$ est continue en effet cette réstriction est une composition et somme et multiplication des fonctions continues sur $\mathbb{R}/\left\{0\right\}$. On a

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+2x}{x} = \lim_{x\to 0^+} x+2 = 2$$

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-2x}{x} = \lim_{x\to 0^-} x-2 = -2$$

alors la fonction g n'est pas continue en point 0 en effet

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) \neq \lim_{x\to 0^-} g(x)$$

Solution d'exercice (3.5.6)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$par :

$$f(x) = x^2 \left[\frac{1}{x}\right]$$

Si $x > 1$, alors

$$\left[\frac{1}{x}\right] = 0$$

et

$$f(x) = 0$$

La fonction f est donc continue en tout point de $[1, +\infty[$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ sur I'intervalle $\left]\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right[$

$$\left[\frac{1}{x}\right] = k$$

donc f coincide avce la fonction

$$f(x) = kx^2$$

qui est continue. A droite du point $\frac{1}{k}$, la fonction coincide avec

$$f(x) = (k-1)x^2$$

donc

$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{k}\right)^+} f(x) = \lim_{x\to\left(\frac{1}{k}\right)^+} (k-1)x^2 = \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}$$

A gauche du point $\frac{1}{k}$, la fonetion coincide avec

$$f(x) = kx^2$$

alors

$$\lim_{x \to \left(\frac{1}{k}\right)^-} f(x) = \frac{1}{k}$$

La fonetion est donc discontinue en tout point de la forme $\frac{1}{k}$

Solution d'exercice (3.5.7)

1. Soit f la fonction réelle à valeurs réelles définie par

$$f(x) = \begin{cases} x \quad si \ x < 1 \\ x^2 \ si \ 1 \leq x \leq 4 \\ 8\sqrt{x} \ si \ x > 4 \end{cases}$$

   On a

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1 = \lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1)$$

   et

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = 16 = \lim_{x \to 4^-} f(x) = f(4)$$

   alors f est continue en $1.et$ 4 d'où la continuité de la fonction f.

2. Donnons la formule définissant f^{-1}. On a

$$fof^{-1}(x) = x$$

   alors

$$\begin{aligned} y &= x \ \ si \quad x < 1 \Rightarrow x = y \ \ si \ y < 1 \\ y &= x^2 \ si \ 1 \leq x \leq 4 \Rightarrow x = \sqrt{y} \ si \ 1 \leq \sqrt{y} \leq 4 \Rightarrow x = \sqrt{y} \ si \ 1 \leq y \leq 16 \\ y &= 8\sqrt{x} \ si \ x > 4 \Rightarrow x = \frac{y^2}{64} \ si \ \frac{y^2}{64} > 4 \Rightarrow x = \frac{y^2}{64} \ si \ y > 16 \end{aligned}$$

donc

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x \quad si\ x < 1 \\ \sqrt{x}\ si\ 1 \leq x \leq 16 \\ \dfrac{x^2}{64}\ si\ x > 16 \end{cases}$$

Solution d'exercice (3.5.8)

Soit $f\ \ [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrons que, si on a

$$x_{1,}x_2, x_3 \ldots x_n \in [a,b] \Rightarrow \exists x_0 \in [a,b]\ tel\ que\ f(x_0) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots + f(x_n)}{n}$$

On pose

$$M = \max\{f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n)\}$$

$$m = \min\{f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n)\}$$

On a alors

$$m \leq f(x_k) \leq M \qquad 1 \leq k \leq n \quad k \in \mathbb{N}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{k=n} m \leq \sum_{k=1}^{k=n} f(x_k) \leq \sum_{k=1}^{k=n} M$$

d'où

$$nm \leq \sum_{k=1}^{k=n} f(x_k) \leq nM$$

alors

$$m \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f(x_k) \leq M$$

Il existe donc

$$\exists x_0 \in [a,b]\ \ tel\ \ que\ \ f(x_0) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f(x_k)$$

Prouvons que l'équation

$$(1-x)\cos(x) = \sin(x)$$

admet au moins une solution dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. On pose

$$g(x) = (1-x)\cos(x) - \sin(x)$$

on a

$$g(0) = 1 \; et \; g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

donc

$$\begin{cases} g(0)\, g\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0 \\ \\ g \text{ est continue sur } \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases} \Rightarrow \exists \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\text{ tel que } g(\alpha) = 0$$

d'où

$$\exists \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, (1-\alpha)\cos(\alpha) = \sin(\alpha)$$

Solution d'exercice (3.5.9)

Soit f $D \to \mathbb{R}$. On dit que f est uniformément continue sur D lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon > 0, \forall x, y \in D, |x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Alors pour

$$y = \sqrt{x} \quad x \in [1, +\infty[$$

on a

$$|f(x) - f(y)| = \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{|x-y|}{2} \leq \varepsilon$$

donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon > 0, \forall x, y \in D, |x-y| \leq 2\varepsilon \Rightarrow \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leq \varepsilon$$

alors f est uniformément continue sur $[1, +\infty[$. Pour

$$y = x^2 \quad x \in]-\beta, \beta[$$

on a

$$|f(x) - f(y)| = \left|x^2 - y^2\right| = |x-y|\,|x+y| \leq |x-y|\,(|x| + |y|) \leq 2\beta\,|x-y| \leq \varepsilon$$

donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon > 0, \forall x, y \in D, |x-y| \leq \frac{\varepsilon}{2\beta} \Rightarrow \left|x^2 - y^2\right| \leq \varepsilon$$

alors f est uniformément continue sur $]-\beta, \beta[$.

3.7 Dérivabilité en un point et sur un intervalle

Les applications les plus simples (hormis les applications constantes) sont les applications dites affines, c'est-à-dire de la forme

$$f : x \longmapsto ax + b \quad a, b \in \mathbb{R}$$

le graphe d'une telle application est une droite et l'on peut prédire immédiatement la valeur en un point x intermédiaire entre deux points distincts x_1 et x_2 dont on connaît les images par :

$$f(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1)$$

Il est donc important de savoir "approcher" une fonction f quelconque par une fonction aussi simple, au moins près d'un point x_0 du domaine de définition de f. C'est ceci qui nous conduit à la notion de dérivabilité en un point x_0.

Définition 3.7.1 *Soit f une fonction définie dans un voisinage V d'un point x_0 de $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire au moins dans un intervalle ouvert $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ contenant x_0). On dit que f est dérivable au point x_0 et admet comme nombre dérivé en x_0 le nombre $a(x_0)$ si et seulement si on peut écrire, pour $h \in]-\eta, \eta[$ avec $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\subset V$*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + a(x_0)h + h\,\varepsilon(h)$$

où la fonction ε définie dans $]-\eta, \eta[\setminus \{0\}$ par

$$\varepsilon(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - a(x_0)h}{h}$$

est telle que

$$\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0 \tag{3.1}$$

La limite (3.1) signifie qu'au voisinage de x_0 la fonction f ne diffère de la fonction affine $x \longmapsto f(x_0) + a(x_0)(x - x_0)$. En effet on pose

$$h = (x - x_0)$$

on a

$$\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0\Rightarrow\lim_{x\to x_0}\varepsilon(x-x_0)=0$$

on obtient alors

$$\lim_{x\to x_0}\varepsilon(x-x_0)=0\Rightarrow\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-a(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)}=0$$

La fonction

$$x\longmapsto f(x)-f(x_0)-a(x_0)(x-x_0)$$

est négligeable par rapport à $|x-x_0|$ lorsque x se rapproche de x_0. La définition (3.3.1) perme d'écrire pour un tel terme

$$x\longmapsto f(x)-f(x_0)-a(x_0)(x-x_0)=o(|x-x_0|)$$

On a une définition équivalente à la définition (3.7.1)

Définition 3.7.2 *Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle $]a,b[$, et soit $x_0\in\,]a,b[$. On dit que f est dérivable en x_0 si le rapport*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=a(x_0)=\frac{df(x_0)}{dx}=f'(x_0)$$

Le rapport $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est appelé taux d'accroissement de f en x_0.

Exemple. Soit f définie par

$$f(x)=x^n$$

De l'identité

$$\frac{x^n-x_0^n}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1}x^kx_0^{n-k-1}}{(x-x_0)}=\sum_{k=0}^{k=n-1}x^kx_0^{n-k-1}\ \textit{avec}\ x\neq x_0$$

on déduit que f est dérivable en tout point x_0

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\sum_{k=0}^{k=n-1}x^kx_0^{n-k-1}=\sum_{k=0}^{k=n-1}x_0^{n-1}=nx_0^{n-1}$$

Définition 3.7.3 *Lorsque f est définie au moins dans un intervalle semi-ouvert $[x_0, x_0+\eta[$, on dit de même que f admet une dérivée à droite en x_0 avec pour dérivée à droite en x_0 le nombre réel $a_+(x_0)$ si et seulement si pour $h \in]0, \eta[$*

$$f(x_0+h) = f(x_0) + a_+(x_0)\, h + h\ \varepsilon_+(h)$$

où la fonction $\varepsilon_+(h)$ définie dans $]0, \eta[$ par

$$\varepsilon_+(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - a_+(x_0)\, h}{h}$$

est telle que

$$\lim_{h \to 0^+} \varepsilon_+(h) = 0$$

ou de maniére équivalente

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a_+(x_0)$$

Définition 3.7.4 *Lorsque f est définie au moins dans un intervalle semi-ouvert $[x_0-\eta, x_0[$, on dit de même que f admet une dérivée à gauche en x_0 avec pour dérivée à gauche en x_0 le nombre réel $a_-(x_0)$ si et seulement si pour $h \in]-\eta, 0[$*

$$f(x_0-h) = f(x_0) - a_-(x_0)\, h - h\ \varepsilon_-(h)$$

où la fonction $\varepsilon_-(h)$ définie dans $]-\eta, 0[$ par

$$\varepsilon_-(h) = \frac{f(x_0-h) - f(x_0) - a_-(x_0)\, h}{h}$$

est telle que

$$\lim_{h \to 0^-} \varepsilon_-(h) = 0$$

ou de maniére équivalente

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a_-(x_0)$$

Proposition 3.7.5

$$f \text{ est dérivable au point } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Définition 3.7.6 (Dérivée en un intervalle) *Soient D un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : D \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est dérivable sur D si f est dérivable en chaque point de D. On obtient alors une fonction*

$$\begin{aligned} f' \ &: D \longmapsto \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{df}{dx}(x) = f'(x) \end{aligned}$$

dérivée de f sur D.

Proposition 3.7.7 *Soient D un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : D \longmapsto \mathbb{R}$ qu'on suppose dérivable en un point x_0 de D. Alors le nombre dérivée de f en x_0 représente le coefficient directeur de la tangente de f en x_0.*

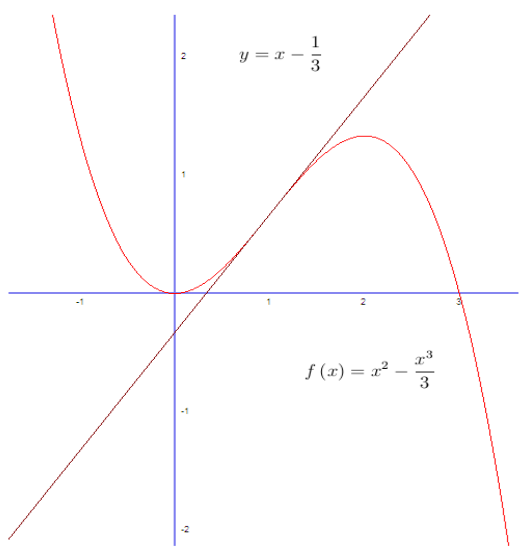
Proposition 3.7.8 (Équation de la tangente) *Soient D un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : D \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction dérivable en x_0 et $M_0 = (x_0, y_0)$ sur la courbe de f. L'équation de la tangente T au point M_0 est*

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Exemple. Soit f définie par

$$f(x) = x^2 - \frac{x^3}{3}$$

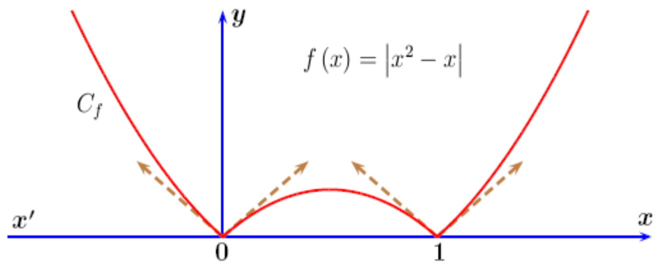
L'équation de la tangente T au point $M_0 = \left(1, \frac{2}{3}\right)$ est $y = x - \frac{1}{3}$



Menguelti Ali

Si les dérivées à gauche et à droite existent et sont différentes, ils existent alors deux demi-tangentes à la courbe C_f au point $(x_0, f(x_0))$ dit point anguleux , comme on peut le constater sur le graphe ci-dessous

$$f(x) = \left|x^2 - x\right|$$



Proposition 3.7.9 (Rapport avec la continuité) *Soient D un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : D \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.*

Démonstration. Si f est dérivable en x_0 alors,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\, h + h\, \varepsilon(h)$$

tel que

$$\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

On pose $h = x - x_0$ on obtient

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\ \varepsilon(x) \tag{3.2}$$

et

$$\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

On fait tendre x vers x_0 *dans* (3.2) on obtient donc

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

d'où f est continue en x_0 ■

Remarque 3.7.10 *La réciproque est fausse. Prenons, par exemple, la fonction :*

$$f(x) = |x|$$

La fonction est bien continue en 0. f *n'est pas dérivable en* 0. *Par contre, on peut dire que* f *est dérivable à droite en* 0 *avec* $f'_d(0) = 1$ *et dérivable à gauche en* 0 *avec* $f'_g(0) = -1$.

3.7.1 Calcul des dérivées

Théorème 3.7.11 (Théorèmes généraux) *Si* f *et* g *sont dérivables sur* D *et si* $\lambda \in \mathbb{R}$ *alors les fonctions* $f+g$, fg ,$\dfrac{f}{g}$ $(g(x) \neq 0\ \forall x \in D)$ *sont dérivables sur* D *avec les formules :*

Somme $\quad (f+g)' = f' + g'$

Produit $\quad (fg)' = f'g + fg'$

Quotient $\quad \left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - g'f}{g^2}$

Théorème 3.7.12 *Si* f *est dérivable en* x *et* g *est dérivable en* $f(x)$ *alors* gof *est dérivable en* x *de dérivée*

$$gof(x) = f'(x) \quad g'of(x)$$

Corollaire 3.7.13 *Soit* D *un intervalle ouvert. Soit* $f : D \longmapsto J$ *dérivable et bijective dont on note* $f^{-1}J \longmapsto D$ *la bijection réciproque. Si* f' *ne s'annule pas sur* D *alors* f^{-1} *est dérivable et on a pour tout* $x \in J$

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

Démonstration. Notons $g = f^{-1}$ la bijection réciproque de f . Soit $y_0 \in J$ et $x_0 \in D$ tel que $y_0 = f(x_0)$. Le taux d'accroissement de g en y_0 est :

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{g(y) - g(y_0)}{f(g(y)) - f(x_0)}$$

Lorsque $y \to y_0$ alors $g(y) \to g(y_0) = x_0$ et donc ce taux d'accroissement tend vers

$$\frac{1}{f'(x_0)}$$

Ainsi

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \Rightarrow g'(y_0) = \frac{1}{f'(g(y_0))}$$

finalement on obtient

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Il peut être plus simple de retrouver la formule à chaque fois en dérivant l'égalité

$$fog(x) = x$$

où $g = f^{-1}$ est la bijection réciproque de f. En effet à droite la dérivée de x est 1 ; à gauche la dérivée de

$$fog(x) = g'(x) f'og(x)$$

L'égalité $fog(x) = x$ conduit donc à l'égalité des dérivées

$$g'(x) f'og(x) = 1$$

Mais $g = f^{-1}$ donc

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

■

Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = e^x$$

on a

$$f^{-1}(x) = \ln(x) \;\; et \;\; \left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{x}$$

nous vérifions par la formule que

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{x}$$

on a

$$e^{\ln(x)} = x$$

donc
$$\left(e^{\ln(x)}\right)' = (x)' \Rightarrow (\ln(x))' e^{\ln(x)} = 1 \Rightarrow (\ln(x))' x = 1$$
alors
$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$f(x) = 2x + e^{2x}.$$

Étudions f en détail. Tout d'abord

1. f est dérivable car f est la somme de deux fonctions dérivables. En particulier f est continue.
2. f est strictement croissante car f est la somme de deux fonctions strictement croissante.
3. f est une bijection car
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \ et \ \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$
on a
$$f'(x) = 2 + 2e^{2x} \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$$
4. Notons $g(x) = f^{-1}(x)$ la bijection réciproque de f. Même si on ne sait pas a priori exprimer g, on peut malgré tout connaître des informations sur cette fonction : par le corollaire ci-dessus g est dérivable et l'on calcule g'
$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{2 + 2e^{2g(x)}}$$
comme
$$f(g(x)) = x \Rightarrow 2g(x) + e^{2g(x)} = x$$
alors
$$e^{2g(x)} = x - 2g(x)$$
Cela conduit à
$$g'(x) = \frac{1}{2 + 2(x - 2g(x))}$$

Dérivée de fonctions usuelles

Le tableau de gauche est un résumé des principales formules à connaître, x est une variable. Le tableau de droite est celui des compositions u représente une fonction

Fonction f	Dérivée f'	Domaine de déf. de f'
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}\ (\alpha \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}_+\ \ (\alpha \geq 1)\ \ \mathbb{R}_+^*\ \ (\alpha < 1)$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

3.7.2 Accroissements et dérivées

L'application principale de la notion de dérivée est l'étude des accroissements d'une fonction.

Définition 3.7.14 *Soit D un intervalle ouvert. Soit $f : D \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $x_0 \in D$*

- *On dit que x_0 est un point critique de f si $f'(x_0) = 0$.*
- *On dit que f admet un maximum local en x_0 (resp.unminimum local en x_0) s'il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 tel que*

$$\forall x \in J \cap D \quad f(x) \leq f(x_0) \quad resp\ .\ \forall x \in J \cap D \quad f(x) \geq f(x_0)$$

- *On dit que f admet un extremum local en x_0 si f admet un maximum local ou un minimum local en ce point.*

Proposition 3.7.15 (Caractérisation des extrema par la dérivée.) *Soit D un intervalle ouvert. Soit $f : D \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $x_0 \in D$ telle que f admet un extremum local en x_0, alors*

$$f'(x_0) = 0.$$

Remarque 3.7.16 *Prêtez attention au fait que la réciproque est fausse comme nous le prouve l'exemple*

$$f(x) = x^3 \text{ en } 0$$

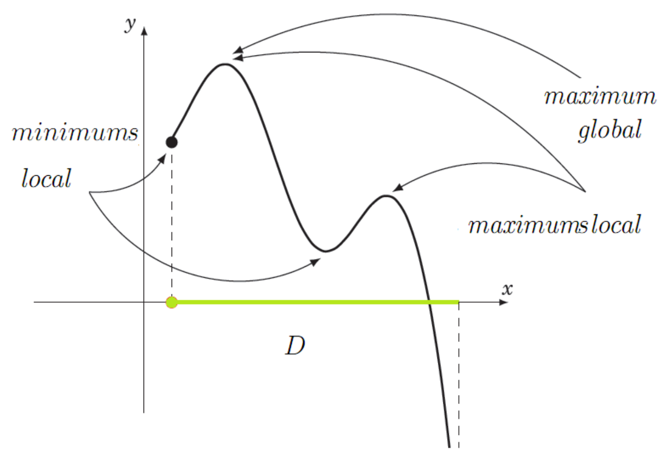
vérifie $f'(0) = 0$ *mais* $x_0 = 0$ *n'est ni maximum local ni un minimum local.*

$$f'(x_0) = 0 \nRightarrow \text{toujours que } f(x_0) \text{ est un extremum local}$$

Dire que f *a un maximum local en* x_0 *signifie que* $f(x_0)$ *est la plus grande des valeurs*$f(x)$ *pour les* x *proches de* x_0. *On dit que* $f : D \longmapsto \mathbb{R}$ *admet un maximum global en* x_0 *si pour toutes les autres valeurs* $f(x)$, $x \in D$ *on a*

$$f(x) \leq f(x_0))$$

(on ne regarde donc pas seulement les valeurs de $f(x)$ *pour* x *proche de* x_0*). Bien sûr un maximum global est aussi un maximum local, mais la réciproque est fausse.*



Démonstration. De la proposition (3.7.15). Soit x_0 tel que f admet un maximum local en x_0 (le cas d'un minimum est identique). Puisque $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ nous avons

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ est } \begin{cases} \leq 0 \quad si\ x_0 \leq x \leq x_0 + \eta \\ \\ \geq 0 \ si\ x_0 - \eta \leq x \leq x_0 \end{cases}$$

La limite est ainsi positive et négative, et donc nulle. ■

Théorème 3.7.17 (Théorème de Rolle) *Soit* $f : [a, b] \longmapsto \mathbb{R}$ *telle que*

1. f *est continue sur* $[a, b]$
2. f *est dérivable sur* $]a, b[$
3. $f(a) = f(b)$

Alors

$$\exists c \in \left]a, b\right[\ \textit{tel que} \ f'(c) = 0$$

Démonstration. Tout d'abord, si f est constante sur $[a, b]$ alors n'importe quel $c \in]a, b[$ convient. Sinon il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) \neq f(a)$. Supposons par exemple $f(x_0) \neq f(a)$. Alors f est continue sur l'intervalle fermé et borné $[a, b]$, donc elle admet un maximum en un point $c \in]a, b[$. Mais

$$f(c) \geq f(x_0) \geq f(a)$$

donc $c \neq a$. De même comme $f(b) = f(a)$ alors $c \neq b$. Ainsi $c \in]a, b[$. En c, f est donc dérivable et admet un maximum (local) donc $f'(c) = 0$. ■

Théorème 3.7.18 (des accroissements finis) *Soit* $f : [a, b] \longmapsto \mathbb{R}$ *telle que*

1. f *est continue sur* $[a, b]$
2. f *est dérivable sur* $]a, b[$

alors

$$\exists c \in \left]a, b\right[\ \textit{tel que} \ f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Démonstration. On pose la fonction :

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

La fonction g est continue sur $[a, b]$ *et* g est dérivable sur $]a, b[$. On a

$$g(a) = 0 \ \textit{et} \ g(b) = 0$$

On est donc dans les conditions du théorème de Rolle, il existe donc un $c \in]a, b[$ tel que

$$g'(c) = 0$$

on a

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

d'où :

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Rightarrow f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Le théorème des accroissements finis n'est en fait qu'une application du théorèmede Rolle à une fonction g bien choisie. C'est le cas de nombreux théorèmes, comme nous le verrons plus tard dans le cours avec l'égalité de Taylor-Lagrange et la règle de l'Hôpital par exemple. ■

Corollaire 3.7.19 *Soit $f : [a, b] \longmapsto \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors*

1. *f est constante sur $[a, b]$ si et seulement si*

$$\forall x \in \,]a, b[\quad f'(x) = 0$$

2. *f est croissante (resp. décroissante) si et seulement si*

$$\forall x \in \,]a, b[\quad f'(x) \geq 0 \quad (resp\ f'(x) \leq 0)$$

Démonstration. Commençons par le sens direct. Soit f croissante et soit $x_0 \in \,]a, b[$ Nous avons alors

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

pour tout $x \in [a, b]$ ce qui implique $f'(x_0) \geq 0$. Soit $x \in \,]a, b[$, f est continue sur $[a, x]$ et f est dérivable sur $]a, x[$ donc on peut appliquer le TAF à f sur $[a, x]$. Il existe donc $c \in [a, x]$ tel que :

$$f(x) - f(a) = f'(c)(x - a)$$

Mais $f'(c) = 0$ d'où $f(x) = f(a)$, la fonction est donc constante sur $[a, b]$.

($\Rightarrow$)On suppose que f est croissante (on peut faire la même démonstration pour f décroissante). Soit $x_0 \in \,]a, b[$,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

($\Leftarrow$) Soient x_1,$x_2 \in [a,b]$ tels que $x_1 < x_2$. On applique le TAF à f sur $[x_1, x_2]$ il existe $c \in \left]x_1, x_2\right[$, tel que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \geq 0$$

ce qui implique que $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ et donc f est croissante sur $[a,b]$ .On fait un raisonnement analogue si f strictement croissante ou strictement décroissante ∎

Corollaire 3.7.20 (Inégalité des accroissements finis) *$f : D \longmapsto \mathbb{R}$ continue sur et dérivable sur un intervalle D ouvert. S'il existe une constante M tel que*

$$\forall x \in D \ \ |f'(x)| \leq M$$

alors

$$\forall x, y \in D \ \ |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

Parfois, cette inégalité est réécrite ainsi

$$|f(x) - f(y)| \leq \max_{x \in D} |f'(x)| \ \ |x - y|$$

Démonstration. Fixons $x, y \in D$, il existe alors $c \in]x, y[$ ou $]y, x[$ tel que

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)| |x - y|$$

et comme

$$\forall x \in D \ \ |f'(x)| \leq M$$

alors

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

Ce théorème est très important car il possède une généralisation pour la notion de différentielle que vous verrez l'année prochaine, tandis que ce n'est pas le cas de l'égalité des accroissements finis. ∎

Exemple : Soit

$$f(x) = \sin(x)$$

Comme $f'(x) = \cos(x)$ alors $|f'(x)| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. L'inégalité des accroissements finis s'écrit alors :

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$$

En particulier si l'on fixe $y = 0$ alors on obtient

$$|\sin(x)| \leq |x|$$

ce qui est particulièrement intéressant pour x proche de 0.

Corollaire 3.7.21 (Prolongement des fonctions dérivables) *Soient $x_0 \in [a, b]$ et $f : [a, b] \longmapsto \mathbb{R}$. Supposons que*

1. *f est continue sur $[a, b]$*
2. *f est dérivable sur $]a, b[\, / \{x_0\}$ et*

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = \ell \quad x_0 \neq x$$

alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \ell$

3. *Si f' a une limite infinie quand x tend vers x_0, f n'est pas dérivable en x_0 et le graphe de f admet une tangente verticale au point x_0.*

Démonstration. D'après le théorème des accroissements fini, f est continue sur $[x_0, x]$ et dérivable sur $]x_0, x[$ donc il existe $c \in [x_0, x]$ tel que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c)$$

Lorsque x tend vers x_0, c tend vers x_0, et f' tend vers ℓ lorsque x tend vers x_0, nous obtenons que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$$

$f'(x_0)$ existe et vaut ℓ. ■

Remarque 3.7.22 *Ce corollaire est particulièrement utilse pour calculer la dérivée de fonctions qui ont été définies par prolongement par continuité. En effet, il suffit de dériver la fonciton en dehors du point qui pose problème, et ensuite de prendre la limite.*

3.7.3 Les règles de L'Hospital.

Proposition 3.7.23 (Règle de l'Hospital) *Soient f et g deux applications de D dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. un point adhérent à D. On suppose qu'il existe un voisinage V de x_0 tel que f et g soit dérivable sur $D \cap V$ et que $\forall x \in D \cap V \setminus \{x_0\}$; $g'(x) \neq 0$. On suppose en outre que*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$$

alors

$$Si \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad alors \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

Démonstration.

– Pour simplifie on considéré la cas ou $D = [a, b]$. Fixons $a \in D \setminus \{x_0\}$ avec par exemple $a \leq x_0$. Soit

$$h : D \longmapsto \mathbb{R}$$

définie par

$$h(x) = g(a)f(x) - f(a)g(x).$$

Alors h est continue sur $[a, x_0] \subset D$.

– h est dérivable sur $]a, x_0[$

– $h(x_0) = h(a) = 0$.

. Donc par le théorème de Rolle il existe $c_a \in]a, x_0[$ tel que

$$h'(c_a) = 0$$

Or

$$h'(x) = g(a)f'(x) - f(a)g'(x)$$

donc

$$g(a)f'(c_a) - f(a)g'(c_a) = 0$$

Comme

$$\forall x \in D \setminus \{x_0\} \;\; g'(x) \neq 0$$

cela conduit à

$$\frac{f'(c_a)}{g'(c_a)} = \frac{f(a)}{g(a)}$$

Comme $a \leq c_a \leq x_0$ lorsque l'on fait tendre a vers x_0 on obtient $c_a \to x_0$. Cela implique

$$\lim_{a \to x_0} \frac{f(a)}{g(a)} = \lim_{a \to x_0} \frac{f'(c_a)}{g'(c_a)} = \lim_{c_a \to x_0} \frac{f'(c_a)}{g'(c_a)} = \ell$$

■

Exemples :

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{(x+1)^n - 1}, \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}, \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin(x)}{x^3} \quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{\tan(x)}$$

alors

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{(x+1)^n - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{n(x+1)^{n-1}} = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sqrt{x}}{x+1} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin(x)}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{3x^2} = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{\tan(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{\frac{1}{\cos^2(x)}} = \lim_{x \to 0} \sin(x)\cos^2(x) = 0$$

Proposition 3.7.24 (Régle de l'Hospital au point infini) *Soient f et g deux applications de D ($+\infty$ adhérent à D) dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un voisinage V de $+\infty$ tel que f et g soit dérivable sur $D \cap V$ et que $\forall x \in D \cap V$; $g'(x) \neq 0$.On suppose en outre que*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$$

alors

$$Si \ \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad alors \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

Démonstration. On pose $D \cap V =]b, +\infty[$ $b > 0$ et on définit

$$u(t) = f\left(\frac{1}{t}\right) \text{ et } v(t) = g\left(\frac{1}{t}\right) \quad pour \quad 0 < t < \frac{1}{b}.$$

Il est clair que u et v sont dérivable sur $\left]0, \frac{1}{b}\right[$ et que l'on a :

$$u'(t) = -\frac{1}{t^2} f(1/t) \ \ et\ v'(t) = -\frac{1}{t^2} g(1/t)$$

Maintenant

$$\lim_{x \to 0^+} u(x) = \lim_{x \to 0^+} v(x) = 0$$

et $v'(x)$ ne s'annule pas sur $\left]0, \frac{1}{b}\right[$. On a

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{u'(x)}{v'(x)} = \ell$$

donc d'après le théorème précédent :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{u(x)}{v(x)} = \ell$$

c'est à dire

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

Ce résultat reste bien évidemment valable en $-\infty$ ■

Proposition 3.7.25 (Règle de l'Hospital généralisée) *Soient f et g deux applications de D dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un point adhérent à D. On suppose qu'il existe un voisinage V pointé de x_0 tel que f et g soit dérivable sur $D \cap V$ et que $\forall x \in D \cap V$; $g'(x) \neq 0$. On suppose en outre que*

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$$

alors

$$Si\ \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \quad \ell \in \overline{\mathbb{R}}$$

Remarque 3.7.26 (Mise en garde) *Il est tres important, pour ne pas se tromper, d'appliquer avec grandes précautions les règles de l'Hospital. Les erreurs les plus fréquemment commises consiste à appliquer ces règles dans le mauvais sens (c'est à* *dire de penser que si* $\dfrac{f}{g}$ *à une limite alors* $\dfrac{f'}{g'}$ *à la même) où d'oublier une des conditions d'application (par exmple d'oublier de vérifier que* f *tend vers* 0*). Illustrons ces remarques. Montrer que si*

$$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad g(x) = x$$

on a

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

mais

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0^+} \left(2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right) \text{ n'existe pas}$$

C'est le cas où l'on applique dans le mauvais sens la règle. Toutefois on peut dire la chose suivante : Si f *et* g *sont deux applications qui vérifient les hypothèses de la règle de l'Hospital et que* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$ *alors*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ existe} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$$

Soient

$$f(x) = x + 1 \text{ et } \quad g(x) = x$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \neq \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Le problème vient ici du fait que l'on a pas supposé que f *tendait vers* 0 *en* 0.

3.7.4 Dérivées Successives.

Définition 3.7.27 *Soit* D *est un intervalle ouvert. Soit* $f\ D \longmapsto \mathbb{R}$ *une fonction dérivable et soit* f' *sa dérivée. Si la fonction* $f'\ D \longmapsto \mathbb{R}$ *est aussi dérivable on note* $f'' = (f')'$ ***la dérivée seconde*** *de* f *. Plus généralement on note :*

$$f^{(0)} = f \quad f^{(1)} = f' \ f^{(2)} = f'' \quad f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$$

Si la dérivée n*-ième existe on dit que* f *est* n ***fois dérivable***

Définition 3.7.28 *L'ensemble des fonctions de D dans $\mathbb{R}$ n fois dérivable est noté $\mathfrak{D}^n(D,\mathbb{R})$.*

Définition 3.7.29 *L'ensemble des fonctions de D dans $\mathbb{R}$ n fois dérivable et telles que $f^{(n)}$ est continue est noté $C^n(D,\mathbb{R})$. Dans ce cas, f est dite de classe C^n.*

Remarque 3.7.30 *f est de classe C^n si et seulement si f' est de classe C^{n-1}.*

Définition 3.7.31 *Une fonction infiniment dérivable C^∞ est une fonction de classe C^n pour tout n.*

Théorème 3.7.32 (Formule de Leibniz) *Soit $f,g : D \longmapsto \mathbb{R}$ n fois dérivables alors fg est n fois dérivable et*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Démonstration. Montrons la formule de Leibniz par récurrence sur n.

$$H_n : \text{"}Pour\ tout\ f,g\ de\ classe\ C^n\ \ (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$$

H_0 est évident. Supposons H_n et montrons H_{n+1}. Soient f et g de classe C^{n+1}

$$(fg)^{(n+1)} = \left[(fg)^{(n)}\right]' = \left[\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}\right]' = \left[\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(f^{(k)} g^{(n-k)}\right)'\right]$$

$$= \left[\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n+1-k)}\right)\right] = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k+1)} g^{(n+1-(k+1))} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} f^{(k+1)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

$$= f^{(k+1)} g + g^{(n+1)} f + \sum_{k=1}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n+1-k)} = \sum_{k=1}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

■

Théorème 3.7.33 (Taylor-Lagrange à l'ordre n) *Soit $f : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$. Supposons que f est de classe C^n sur $[a,b]$ et $n+1$ fois dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(x-c)^k$$

Démonstration. Soit $x \in [a,b]$ tel que $x > a$ et posons pour tout $t \in [a,b]$

$$\begin{array}{ccc} [a,b] & \longmapsto & \mathbb{R} \\ t & \rightarrow & g(t) = f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k \end{array}$$

et

$$h(t) = g(t) - \left(\frac{x-t}{x-a}\right)^{n+1} g(a)$$

remarquons que h est continue sur $[a,x]$, dérivable sur $]a,x[$ et

$$h(a) = h(x) = 0$$

D'aprés le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,x[$ tel que

$$h'(c) = 0.$$

Or on a

$$\begin{aligned} h'(t) &= g'(t) + (n+1)\left(\frac{1}{x-a}\right)^{n+1}(x-t)^n g(a) \\ &= -\sum_{k=0}^{n}\left[-\frac{k\ f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^{k-1} + \frac{(x-t)^k}{k!}f^{(k+1)}(t)\right] \\ &\quad + (n+1)\left(\frac{1}{x-a}\right)^{n+1}(x-t)^n g(a) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} - \sum_{k=0}^{n}\frac{(x-t)^k}{k!}f^{(k+1)}(t) \\ &\quad + (n+1)\left(\frac{1}{x-a}\right)^{n+1}(x-t)^n g(a) \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) - \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)$$

$$+ (n+1)\left(\frac{1}{x-a}\right)^{n+1} (x-t)^n g(a)$$

On pose $k' = k-1$ dans la prmière somme on obtien

$$= \sum_{k'=0}^{n-1} \frac{f^{(k'+1)}(t)}{(k')!}(x-t)^{k'} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) - \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)$$

$$+ (n+1)\left(\frac{1}{x-a}\right)^{n+1} (x-t)^n g(a)$$

donc

$$h'(t) = -\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) + (n+1)\left(\frac{1}{x-a}\right)^{n+1} (x-t)^n g(a)$$

alors pour tout $t \in]a, x[$

$$h'(t) = (n+1)\frac{(x-t)^n}{(x-a)^{n+1}}\left[-\frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) + g(a)\right]$$

d'où

$$h'(c) = (n+1)\frac{(x-c)^n}{(x-a)^{n+1}}\left[-\frac{(a-c)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) + g(a)\right] = 0$$

Donc il existe $c \in]a, x[$ tel que

$$g(a) = \frac{(a-c)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

c'est à dire l'égalité attendue. Cette formule il s'agit d'une généralisation de la formule des accroissements finis en effet au rang $n = 1$, est exactement l'égalité des accroissements finis de plus cette formule permet de minorer (resp. majorer) f sur $[a, b]$ par une fonction polynômiale dés lors que $f^{(n+1)}$est minorée (resp majorée) sur $[a, b]$. ■

Exercice 3.7.1 *On considére la fonction polynômiale*

$$P(x) = x^n + ax + b$$

avec $n \geq 2$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que la fonction P posséde au plus trois racines réelles distinctes