Trigonométrie

OBJECTIF DU CHAPITRE

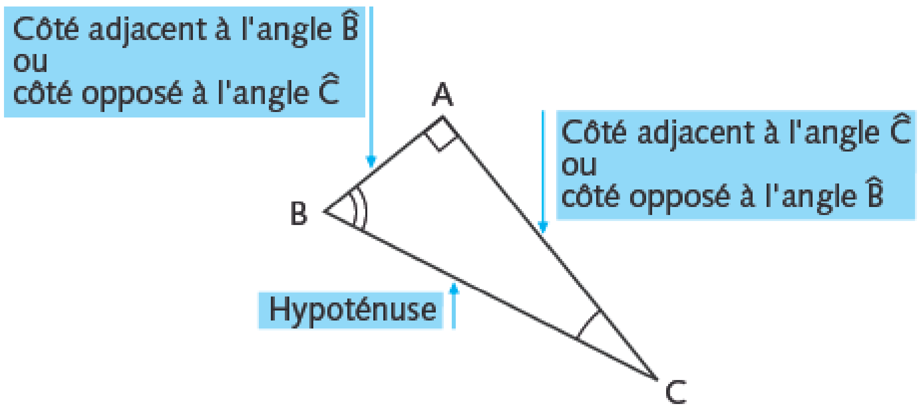
- Savoir utiliser les formules trigonométriques pour calculer la longueur d'un côté ou la mesure d'un angle d'un triangle rectangle

Trigonométrie vient de deux mots grecs « trigone » et « metron » qui signifient respectivement « triangle » et » mesure ». Ainsi la trigonométrie » est la science de la mesure du triangle.

Le Cours

1. Vocabulaire

Dans la suite il sera nécessaire de distinguer les deux côtés de l'angle droit dans un triangle rectangle. C'est pour cela que nous donnons les définitions ci – dessous :



EXERCICE 1 :

Dans le triangle rectangle PQR rectangle en R :

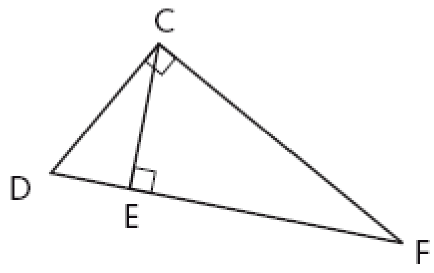
a) Quel est le côté adjacent à l'angle $\hat{P}$?

b) Quel est le côté opposé à l'angle $\hat{Q}$?

c) À quel angle le côté [RQ] est-il adjacent ?

EXERCICE 2 :

Compléter en utilisant le dessin ci - contre :



a) Dans le triangle rectangle CDF, le côté opposé à l'angle $\hat{D}$ est …

b) Dans le triangle rectangle CDF, le côté adjacent à l'angle $\hat{F}$ est …

c) Dans le triangle rectangle CEF, l'hypoténuse est …

d) Dans le triangle rectangle CDE l'angle adjacent à $\hat{D}$ est …

e) Dans le triangle rectangle CDE l'angle opposé à $\hat{C}$ est …

2. Propriétés et définitions :

Dans un triangle rectangle le rapport $\dfrac{\text{longueur du côté adjacent à un angle}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$ ne dépend que de cet angle **il est appelé cosinus de cet angle.**

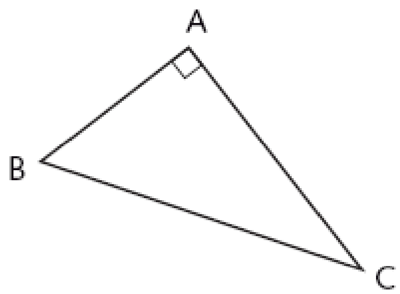
Dans un triangle rectangle le rapport $\dfrac{\text{longueur du côté opposé à un angle}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$ ne dépend que de cet angle **il est appelé sinus de cet angle.**

Dans un triangle rectangle le rapport $\dfrac{\text{longueur du côté opposé à un angle}}{\text{longueur du côté adjacent à cet angle}}$ ne dépend que de cet angle **il est appelé tangente de cet angle.**

cos $\hat{C} = \dfrac{AC}{BC}$ **; sin** $\hat{C} = \dfrac{AB}{BC}$ **; tan** $\hat{C} = \dfrac{AB}{AC}$

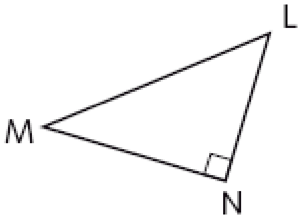
REMARQUES :

(1) La formule SOHCAHTOA permet de retenir les formules ci – dessus (S : sinus ; O : opposé ; H = hypoténuse, . . .)
(2) L'hypoténuse est toujours le plus grand côté d'un triangle rectangle donc le cosinus et le sinus d'un angle aigu d'un triangle rectangle sont toujours compris entre 0 et 1. Cette remarque ne s'applique pas à la tangente.



EXERCICE 3 :

En utilisant le dessin ci – contre, compléter :



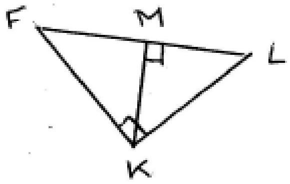
a) Cos $\widehat{M} = \frac{\dots}{\dots}$

b) sin $\widehat{M} = \frac{\dots}{\dots}$

c) tan $\hat{L} = \frac{\dots}{\dots}$

EXERCICE 4 :

Ecrire de deux façons différentes cos $\hat{F}$; sin $\hat{F}$ et tan $\hat{L}$



On peut trouver des valeurs approchée du cosinus, sinus, de la tangente d'un angle en utilisant les touches « cos », « sin » et « tan ».

EXERCICE 5 :

En utilisant une calculatrice donner une valeur approchée à 0 ,001 près par défaut de :

a) cos 25°   b) sin 75°   c) tan 67°

EXERCICE 6 :

ABC est un triangle rectangle en C, démontrer que $\cos^2 \hat{A} + \sin^2 \hat{A} = 1$

Les formules trigonométriques permettent d'établir des formules liant les longueurs de côtés d'un triangle rectangle avec la mesure des angles aigus de ce triangle. Ces formules vont donc permettre de calculer des longueurs de côtés de triangles rectangles et la mesure des angles aigus de ces triangles.

3. Calculer une longueur avec la trigonométrie :

Exemples :

a) Tracer un triangle ABC rectangle en C tel que $\widehat{BAC} = 35°$ et BC = 5 cm.

b) Calculer une valeur approchée de AB à 0,1 cm près par excès.

c) Contrôler la vraisemblance de votre réponse en mesurant AB sur le dessin.

Réponses :

b) Dans le triangle rectangle on a $\sin \widehat{BAC} = \dfrac{BC}{AB}$ donc $\sin 35° = \dfrac{5}{AB}$

donc $AB = \dfrac{5}{\sin 35°}$ donc AB ≈ 8,8 cm.

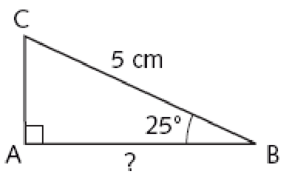
QUELQUES REMARQUES ESSENTIELLES :

- Si on souhaite utiliser la trigonométrie pour calculer la longueur d'un segment, il faut que ce segment soit un côté d'un triangle rectangle et il faut connaître la longueur d'un côté de ce triangle et la mesure d'un angle aigu.
- Pour rédiger la solution il est indispensable :
  - de bien indiquer dans quel triangle rectangle on se place ;
  - de remplacer le sinus, cosinus ou tangente de l'angle par une valeur approchée en toute fin de calcul pour éviter des erreurs d'approximation.
- Il faut toujours penser à contrôler son résultat, quand c'est possible, en se rappelant que la longueur de l'hypoténuse est toujours plus grande que les longueurs des côtés de l'angle droit.

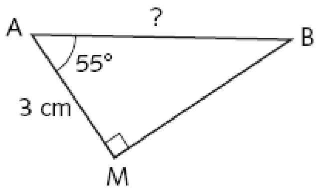
EXERCICE 7 :

Calculer, si possible, une valeur approchée à 0, 1 cm près de AB dans les cas suivants (les dessins ne sont pas réalisés à l'échelle) :

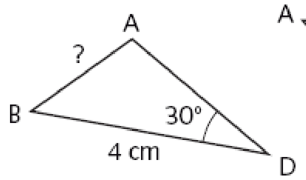
a)



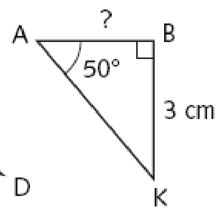
b)



c)



d)



4 . Calculer la mesure d'un angle avec la trigonométrie :

Avec une calculatrice il est possible de calculer des valeurs approchées de la mesure d'un angle quand on connait son sinus, son cosinus ou sa tangente. Pour cela on utilise la touche « cos $^{-1}$ » (ou « arccos ») ou « sin $^{-1}$ » (ou « arcsin ») ou « tan $^{-1}$ » (ou « arctan »)

EXERCICE 8 :

Calculer, si possible, une valeur approchée par excès à 0,1° près de x dans les cas suivants :

a) $\cos x = 0{,}567$ b) $\sin x = 0{,}876$ c) $\tan x = 2{,}37$ d) $\sin x = 1{,}2$

Exemples :

a) Construire un triangle ABC rectangle en A tel que AB = 5 cm et BC = 6 cm.

b) Calculer un arrondi à 1° près de la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.

c) Contrôler la vraisemblance du résultat en mesurant cet angle sur le dessin.

Réponses :

b) Dans le triangle rectangle ABC on a $\cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC}$

donc $\cos \widehat{ABC} = \frac{5}{6}$ donc $\widehat{ABC} \approx 34°$

QUELQUES REMARQUES ESSENTIELLES :

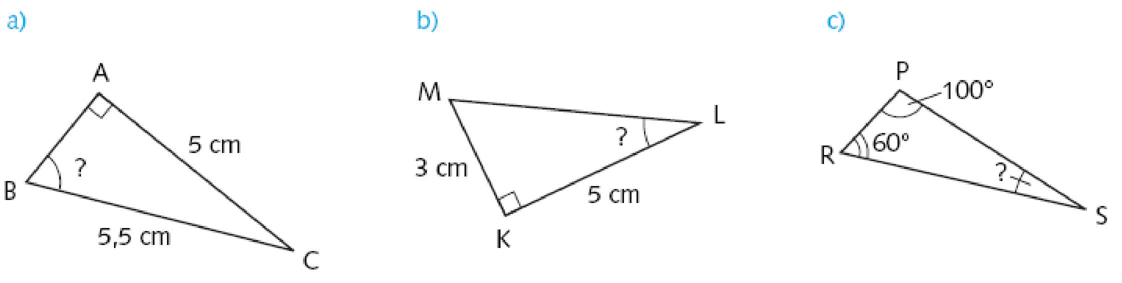
- Si on souhaite utiliser la trigonométrie pour calculer la mesure d'un angle, il faut que cet angle soit l'angle d'un triangle rectangle dont on connait la mesure de deux côtés.

- Ne pas utiliser une valeur approchée du rapport avant de calculer l'angle. Il faut taper directement sur la calculatrice « cos^{-1} » et le rapport. Dans l'exemple ci-dessus prendre une valeur approchée de 5/6 pour calculer la mesure de $\widehat{ABC}$ peut entraîner des erreurs d'approximation.

- Les critères d'une bonne rédaction sont les mêmes que pour le calcul d'une longueur (cf. § 3).

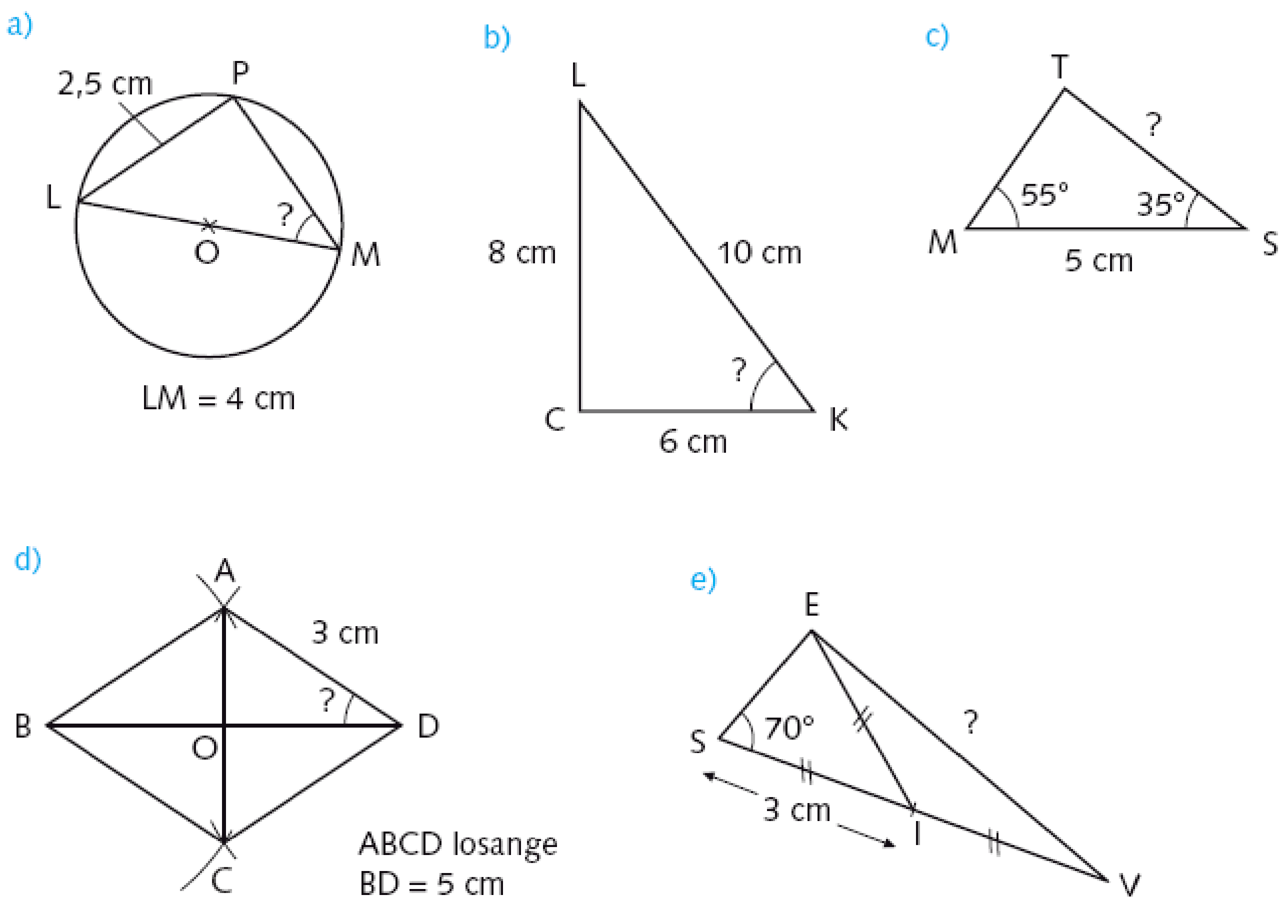
EXERCICE 9 :

Dans chacun des cas ci-dessous calculer, si possible, la mesure de l'angle demandé, on donnera une troncature à 1° près (les dessins ne sont pas tracés à l'échelle).



EXERCICE 10 :

Dans chacun de ces cas, calculer la longueur demandée ou la mesure de l'angle demandée. On donnera une valeur approchée par excès à 0, 1 cm près ou à 1° près (Les dessins ne sont pas tracés à l'échelle).



CORRIGÉS

CORRIGÉ **EXERCICE 1**

a) [PR] b) [PR] c) Q

CORRIGÉ **EXERCICE 2**

a) [CF] b) [CF] c) [CF] d) [DE] e) [DE]

CORRIGÉ **EXERCICE 3**

a) $\cos \widehat{M} = \frac{MN}{ML}$ b) $\sin \widehat{M} = \frac{NL}{ML}$ c) $\tan \widehat{L} = \frac{MN}{NL}$

CORRIGÉ **EXERCICE 4**

a) Dans le triangle rectangle FKL on a $\cos \widehat{F} = \frac{FK}{FL}$

Dans le triangle rectangle FMK on a $\cos \widehat{F} = \frac{FM}{FK}$

b) Dans le triangle rectangle FKL on a $\sin \widehat{F} = \frac{LK}{FL}$

Dans le triangle rectangle FMK on a $\cos \widehat{F} = \frac{KM}{FK}$

c) Dans le triangle rectangle FKL on a $\tan \widehat{L} = \frac{FK}{LK}$

Dans le triangle rectangle MLK on a $\tan \widehat{L} = \frac{KM}{LM}$

CORRIGÉ **EXERCICE 5**

a) cos 25° = 0,906 b) sin 75° = 0,965 c) tan 67° = 2,355

REMARQUE : Si vous ne trouvez pas ces valeurs, vérifiez que l'unité des angles de votre calculatrice est bien en degré.

CORRIGÉ **EXERCICE 6**

cos $\hat{A}$ = AC/AB et sin $\hat{A}$ = BC/AB

cos² $\hat{A}$ = AC²/AB² et sin² $\hat{A}$ = BC²/AB²

Donc cos² $\hat{A}$ + sin² $\hat{A}$ = AC²/AB² + BC²/AB² = $\frac{AC^2+BC^2}{AB^2}$ or d'après le théorème de Pythagore on a AC² + BC² = AB² donc $\frac{AC^2+BC^2}{AB^2} = \frac{AB^2}{AB^2} = 1$

cos² $\hat{A}$ + sin² $\hat{A}$ = 1.

CORRIGÉ **EXERCICE 7**

a) ***Méthode :*** Dans le triangle rectangle ABC on connait l'angle ABC, la longueur de l'hypoténuse de ce triangle et on cherche le côté opposé à cet angle, il faut donc utiliser le sinus.

Dans le triangle rectangle ABC on a :

sin $\widehat{ABC}$ = AC/BC donc sin 25° = AC/5 donc AC = 5 x sin 25°

donc AC ≈ 2,1 cm.

b) En utilisant cos $\widehat{MAB}$ on trouve AB ≈ 5,2 cm.

c) Impossible car il y a une infinité de triangles qui vérifient les conditions données (on sait simplement que le point A est sur la demi-droite qui fait un angle de 30° avec [BD]).

d) En utilisant tan $\widehat{BAK}$ on obtient AB ≈2,5 cm.

CORRIGÉ **EXERCICE 8**

a) x ≈ 55,5 b) x ≈ 61.2 c) x ≈ 67,2 d) Impossible car 0 $\leq$ sinx $\leq$ 1

CORRIGÉ **EXERCICE 9 :**

a) ***Méthode :*** Dans le triangle rectangle ABC on cherche l'angle $\widehat{ABC}$ et on connait la longueur du côté opposé à cet angle et l'hypoténuse. Il faut donc utiliser le sinus.

Dans le triangle rectangle ABC on a sin $\widehat{ABC}$ = AC/BC donc sin $\widehat{ABC}$ = 5/5,5 donc $\widehat{ABC}$ ≈ 65°

b) Dans le triangle rectangle MKL on a tan $\widehat{MKL}$ = MK/KL

donc tan $\widehat{MKL}$ = 3/5 donc $\widehat{MKL}$ ≈ 30°.

c) ***Méthode :*** Ici il est possible de calculer l'angle $\widehat{PSR}$, bien que PRS ne soit pas un triangle rectangle, en utilisant la propriété de la somme des angles d'un triangle.

Dans le triangle PRS on $\widehat{PSR}$ = 180° - ($\widehat{SPR}$ + $\widehat{PRS}$)

Donc $\widehat{PRS}$ = 180° - (60° + 100°) = 20°.

CORRIGÉ **EXERCICE 10**

Méthode : Ici les données ne précise pas que le triangle est rectangle, donc si l'on veut utiliser la trigonométrie il est nécessaire de démontrer que le triangle que l'on souhaite utiliser est rectangle.

a) P est un point du cercle de diamètre [LM] donc le triangle PLM est rectangle en P.

Dans ce triangle sin $\widehat{M}$ = LP/LM donc sin M = 2,5/4 donc $\widehat{M}$ ≈ 39°.

b) On démontre que CKL est rectangle en C en utilisant la réciproque du théorème de Pythagore :

$LK^2 = 10^2 = 100$

$CK^2 + CL^2 = 6^2 + 8^2 = 100$

Donc $LK^2 = CK^2 + CL^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle est rectangle en K.

En utilisant n'importe quelle ligne trigonométrique on trouve $\widehat{K}$ ≈ 54°.

c) Dans le triangle MST on a $\widehat{MTS}$ = 180° - (55° + 35°) = 90° ;

donc le triangle MST est rectangle en T.

En utilisant cos 35° ou sin 55° on obtient TS ≈ 4,1 cm

d) ABCD est un losange donc les diagonales [AC] et [BD] sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu ;

donc AOD est un triangle rectangle en O et OD = 2,5 cm.

En utilisant le cosinus dans le triangle rectangle AOD on obtient : AOD ≈ 34°.

e) Dans le triangle ESV, la droite (EI) est une médiane tel que EI = SV/2 donc le triangle SEV est rectangle en E.

En utilisant le sinus de l'angle $\widehat{ESV}$ on obtient EV ≈ 5,7 cm.

S’entraîner pour le concours

PROBLEME 1

Tracer un triangle ABC tel que AB = 3 cm, BC = 5 cm et AC = 4 cm. Sur la demi droite [BC) placer le point D tel que BD = 8 cm. Tracer le cercle de diamètre [CD]. La droite (AC) coupe ce cercle en E.

1) a) Démontrer que ABC est un triangle rectangle en A.

b) Calculer un arrondi à 1° degré près de $\widehat{ABC}$

2) a) Démontrer que (DE) // (AB)

b) Calculer CE

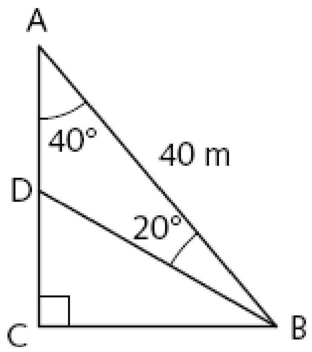
c) Calculer un arrondi à 1° près de $\widehat{DCE}$.

3) Placer un point F sur la demi - droite [AB), sans appartenir à [AB], tel que $\widehat{BCF} = 15°$

Calculer BF

PROBLEME 2

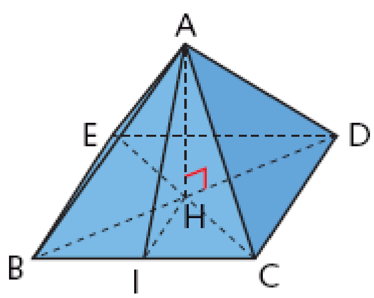
L’entraîneur a placé trois fanions aux points A, B et D.
Les joueurs doivent faire le tour du triangle ABD .
Quelle distance parcourent-ils à chaque tour ?



PROBLEME 3

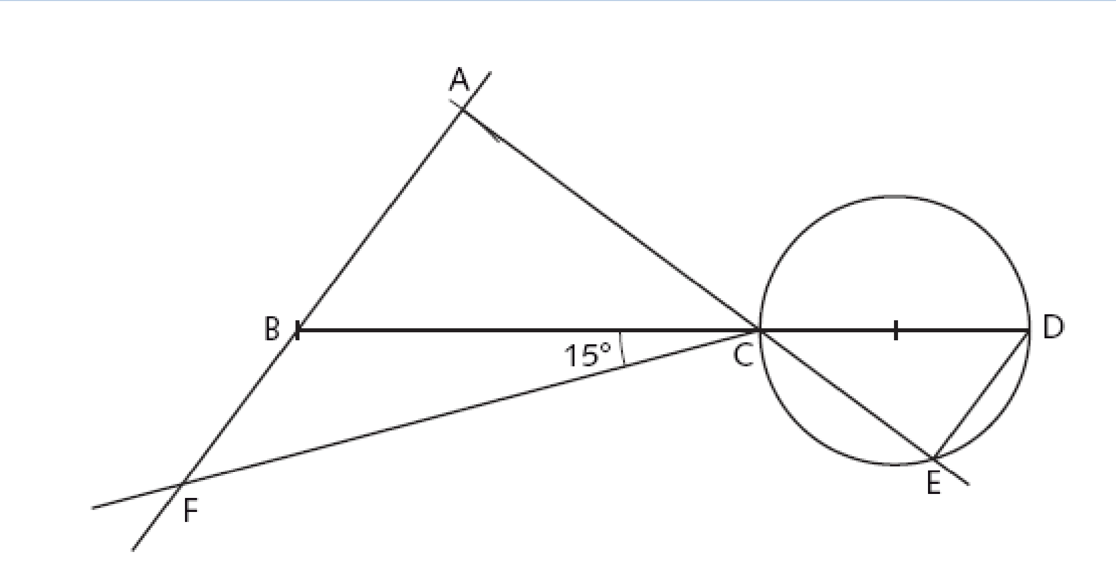
La pyramide ci-contre a une base BCDE de forme carrée de côté 230 m et une hauteur AH de 147m. I est le milieu de [BC].

Calculer l’arrondi au degré près des angles $\widehat{ABH}$ et $\widehat{AIH}$.



CORRIGÉS

CORRIGÉ **PROBLEME 1**



1) a) $AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25$
$BC^2 = 5^2 = 25$ donc $AB^2 + AC^2 = BC^2$
Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle ABC est rectangle en A.

b) Dans le triangle rectangle ABC on a cos $\hat{B}$ = AB/ BC donc cos $\hat{B}$ = 3/5 donc $\hat{B} \approx 53°$

2) a) Le point E est un point du diamètre [CD].
Si dans un cercle un triangle a pour sommet les extrémités d'un diamètre et un point du cercle alors ce triangle est rectangle en ce point.
Donc ECD est un triangle rectangle en E.
Donc (ED) $\perp$ (EC) de plus on sait que (AB) $\perp$ (AE) (car ABC est un triangle rectangle en A).
Donc (AB) // (ED)

b) Les points A, C et E sont alignés ; les points B, C et D sont alignés et (AB) // (DE) ;
donc d'après le théorème de Thalès on a : $\frac{CA}{CE} = \frac{CB}{CD}$ donc $\frac{4}{CE} = \frac{5}{3}$ (CD = 8 – 5 = 3) ;

donc CE = $\frac{12}{5} = 2,4$ cm.

c) Dans le triangle ABC on a $\widehat{ACB} = 180° - (90° + 53°) = 37°$

$\widehat{DCE} = \widehat{ACB}$ (angles opposés par le sommet) donc $\widehat{DCE} = 37°$.

REMARQUE : On peut aussi utiliser la trigonométrie dans le triangle rectangle CDE pour calculer la mesure de DCE.

3) $\widehat{ACF} = \widehat{ACB} + \widehat{BCF} = 37° + 15° = 52°$

Dans le triangle rectangle AFC on a $\tan(\widehat{ACF}) = \dfrac{AF}{AC}$ donc $\tan 52° = \dfrac{AF}{4}$

donc AF = 4 tan 52° donc AF $\approx$ 5,12 cm

or BF = AF – AB donc BF = 5,12 – 3 = 2,12

donc BF $\approx$ 2,1 cm.

CORRIGÉ PROBLEME 2

Il y a plusieurs méthodes pour résoudre ce problème.

Une méthode :

Dans le triangle rectangle ABC on a cos $\widehat{CAB}$ = AC/AB donc cos 40° = AC/40 ;

Donc AC = 40 x cos 40°.

COMMENTAIRE : Pour l'instant on évite de mettre des valeurs approchées. Si certains d'entre vous sont gênés par les expressions littérales assez complexes il est possible d'utiliser des valeurs approchées qu'on choisira au minimum à 0,01 m près pour éviter les erreurs finales d'approximation.

Dans le triangle rectangle ABC on a sin $\widehat{CAB}$ = CB/AB, donc sin 40° = CB/40.

Donc CB = 40 x sin 40°.

Dans le triangle ABC on a $\widehat{CBA} = 180° - (90° + 40°) = 50°$.

Donc $\widehat{CBD} = \widehat{CBA} – 20° = 50° - 20° = 30°$.

Dans le triangle rectangle CBD on a tan CBD = CD/CB donc tan 30° = $\dfrac{CD}{40 \sin 40°}$.

Donc CD = 40 x sin 40° x tan 30°.

AD = AC – CD (car D est un point de [AC]).

AD = 40 x cos 40° – 40 x sin 40° x tan 30°.

Calculons DB :

Méthode : on peut utiliser le théorème de Pythagore ou la trigonométrie dans ce triangle dans le triangle rectangle BCD .

Dans le triangle rectangle BCD on a : cos ($\widehat{CBD}$) = BC/BD.

Donc cos 30° = $\dfrac{40 \times \sin 40°}{BD}$ donc BD = $\dfrac{40 \times \sin 40°}{\cos 30°}$.

La longueur d'un tour en m est de :

40 + 40 x cos 40° – 40 x sin 40° x tan 30° + $\dfrac{40 \times \sin 40°}{\cos 30°}$ ≈ 85,5.

Attention ! Quand on utilise la calculatrice pour effectuer ce type de calculs ne pas oublier de fermer la parenthèse après avoir écrit l'angle de la ligne trigonométrique cherchée.

CORRIGÉ **PROBLEME 3**

(AH) est perpendiculaire au plan BCDE donc elle perpendiculaire à toute droite de ce plan donc entre autres à (BH) et (HI).

Méthode : Pour calculer l'angle $\widehat{ABH}$ on va se placer dans le triangle rectangle ABH.

Calculons BH.

BCDE est un carré de côté 230 m donc sa diagonale a pour longueur BD = 230 $\sqrt{2}$ m.

De plus H est le milieu de [BD] donc BH = 115 $\sqrt{2}$ m.

Dans le triangle rectangle ABH on a : tan $\widehat{ABH}$ = AH/BH donc tan $\widehat{ABH}$ = 147/115 $\sqrt{2}$.

Donc ABH ≈ 42°.

Méthode : Pour calculer l'angle AIH on va se placer dans le triangle rectangle AIH.

Calculons HI : dans le triangle BCE on a H milieu de [CE] et I milieu de [BC].

Donc HI = BE/2 = 115 m.

Dans le triangle rectangle AIH on a : tan $\widehat{AIH}$ = AH/HI donc tan AIH = 147/115.

Donc $\widehat{ABH}$ ≈ 52°.