DEVOIR SURVEILLE DE MATHEMATIQUES N°4

☞ ***<u>Seule la calculatrice personnelle est autorisée.</u>*** *Laissez une marge supplémentaire. Les exercices sont indépendants. Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.* ***Tout résultat fourni par l'énoncé, même non démontré, peut être utilisé pour poursuivre.*** *Bon travail !*

■ Exercice 1 .... (4 points)

Depuis le 1^{er} janvier 2015, une commune dispose de vélos en libre service. La société Bicycl'Aime est chargée de l'exploitation et de l'entretien du parc de vélos.

La commune disposait de 200 vélos au 1^{er} janvier 2015.

La société estime que, chaque année, 15 % des vélos sont retirés de la circulation à cause de dégradations et que 42 nouveaux vélos sont mis en service.

On modélise cette situation par une suite (u_n) où u_n représente le nombre de vélos de cette commune au 1^{er} janvier de l'année $2015 + n$.

1. Justifiez que la suite (u_n) est définie par : $u_0 = 200$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,85u_n + 42$.

2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = u_n - 280$.

a) Montrez que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,85$.

b) Calculez son premier terme v_0.

c) Quel est le sens de variation de la suite (v_n) ? Justifiez

d) Donnez l'expression, pour tout entier naturel n, de v_n en fonction de n.

e) Déduisez-en que, pour tout entier naturel : $u_n = -80 \times 0,85^n + 280$.

3. a) Calculez la limite de la suite (u_n).

b) Interprétez ce résultat.

4. a) Montrez que, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} - u_n = 12 \times 0,85^n$.

b) Déduisez-en le sens de variation de la suite (u_n).

c) Interprétez ce résultat.

■ Exercice 2 .... (8 points)

On joint en annexe, dans le plan muni d'un repère orthogonal, la courbe C d'une fonction f définie sur ℝ, ainsi que la tangente T à la courbe C au point $A(3\ ;\ 2)$. Cette tangente T passe aussi par le point $B(2\ ;\ -9)$. On a aussi tracé deux tangentes à C parallèles à l'axe des abscisses, dont l'une au point d'abscisse 2.

1. Indiquez en une phrase ce que représentent graphiquement les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
Lisez graphiquement une valeur approchée de chacune d'elles, sans chercher une grande précision.

2. Sans justifier, par simple lecture graphique, dressez le tableau de variations de f.

3. On donne que f est définie sur ℝ par, pour tout réel x :

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c.$$

a, b et c sont trois constantes réelles que l'on va déterminer dans cette question.

a) Lisez graphiquement la valeur de $f(0)$ et déduisez-en la valeur de c.
b) On note $f\,'$ la fonction dérivée de la fonction f.
Pour tout réel x, exprimez $f\,'(x)$ en fonction de x, a et b.
c) Déterminez graphiquement la valeur de $f\,'(2)$ et déduisez-en une relation entre a et b.
d) Déterminez graphiquement la valeur de $f\,'(3)$ en justifiant très soigneusement, et déduisez-en une seconde relation entre a et b.
e) Déduisez des questions précédentes les valeurs de a et b, puis l'expression de $f(x)$.

4. On donne que f est définie sur ℝ par, pour tout réel x :

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 5.$$

a) Pour tout réel x, calculez $f\,'(x)$.
b) Etudiez le signe de $f\,'(x)$. Retrouvez alors les variations de f.

5. a) Vérifiez par le calcul que 1 est l'une des solutions de l'équation $f(x) = 0$.

b) En utilisant un théorème du cours, montrez que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur chacun des intervalles $[-2\ ;\ -1]$ et $[2\ ;\ 3]$. On note α et β respectivement ces deux solutions.

c) En utilisant la calculatrice, encadrez sans justifier au millième près chacune des deux solutions évoquées à la question précédente.

6. a) Vérifiez que, pour tout réel x :

$$(x - 1)(x^2 - x - 5) = x^3 - 2x^2 - 4x + 5.$$

b) Déduisez-en par le calcul les valeurs exactes de solutions dans ℝ de l'équation $f(x) = 0$.
c) Résolvez graphiquement (expliquez par une phrase), puis par le calcul, l'inéquation : $f(x) \geq 0$.

■ **Exercice 3 .... (4 points)**

Une ébénisterie fabrique entre 10 et 40 bibliothèques par mois. On estime le coût de fabrication en euros de q bibliothèques à :

$$C(q) = 0{,}1q^3 + 50q + 200.$$

Chaque bibliothèque est vendue 320 €.

1. **a)** Déterminez le coût de fabrication de 12 bibliothèques.

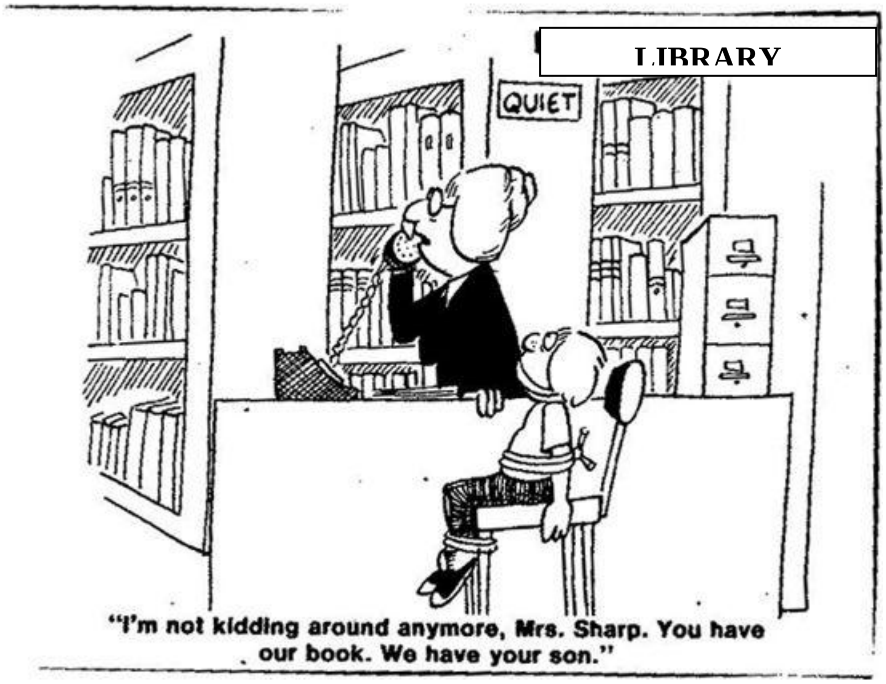
b) L'ébénisterie dégage-t-elle des bénéfices pour la fabrication et la vente de 12 bibliothèques ?

2. On note $B(q)$ le bénéfice en euros obtenu par la fabrication et la vente de q bibliothèques.

a) Montrez que : $B(q) = -0{,}1q^3 + 270q - 200$.

b) Déterminez la fonction dérivée B' de B ; étudiez le signe de $B'(q)$ sur l'intervalle [10 ; 40] et déduisez-en le tableau des variations de la fonction B **sur cet intervalle**.

c) Déduisez-en le nombre de bibliothèques que l'ébénisterie doit fabriquer et vendre par mois pour dégager un bénéfice maximal.



Rappel : « library » est un faux ami et signifie « bibliothèque ».

Nom : ______________________

■ Exercice 4 .... (4 points)

1. Un article coûte 120 €. Ce prix subit une majoration de 25 %, puis une minoration à un taux inconnu, *y* %, sur le prix majoré. Calculez *y* sachant que le prix de l'article est à nouveau 120 €.

2. D'une façon générale, un prix *P* subit une majoration de *x* %, puis une minoration à un taux inconnu, *y* %, sur le prix majoré. Il est alors revenu à sa valeur initiale *P*. En détaillant le calcul, montrez que : $y = \dfrac{100x}{x+100}$.

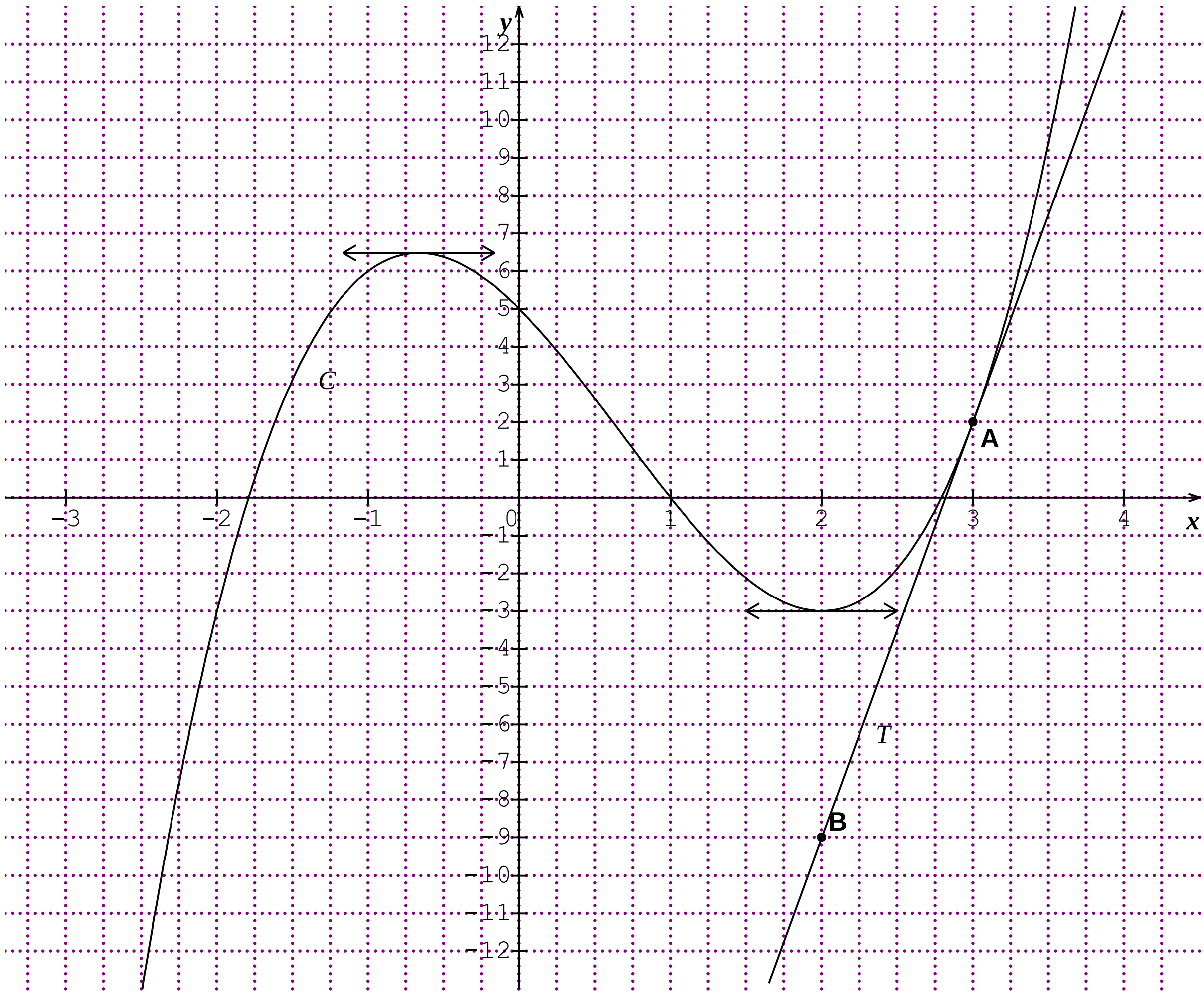
3. On veut étudier, sur l'intervalle [0 ; 100], la fonction *f* telle que : $f(x) = \dfrac{100x}{x+100}$.

a) Déterminez la fonction dérivée *f'* de *f* et déduisez-en le sens de variation de la fonction *f* sur [0 ; 100].

b) On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction *f* dans le plan muni d'un repère orthonormé. Indiquez par des tracés sur ce graphique comment l'utiliser pour retrouver le résultat de la question **1.**. Aucune explication n'est demandée sur la copie.

c) Sans justifier, tracez sur le graphique ci-dessous la droite *D* d'équation $y = \frac{2}{3}x$. Utilisez ce graphique pour trouver une valeur approchée de la variable *x* (supposée non nulle) telle que le prix final est égal aux deux tiers du prix initial *x*. Retrouvez ce résultat par le calcul.

ANNEXE



<u>Rendez la page 4/5 avec votre copie, conservez le reste de l'énoncé.</u>

Corrigé 2 ....

1. Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont les abscisses des points de C d'ordonnée 0 (autrement dit, des points d'intersection de C avec l'axe des abscisses).

On constate qu'il y en a trois, respectivement égales à environ : **–1,8 ; 1 et 2,8**.

2.

x	$-\infty$		$-0{,}7$		2		$+\infty$
$f(x)$		↗	$6{,}5$	↘	-3	↗	

3. a) C passe par le point de coordonnées $(0\,;5)$ donc : $\boldsymbol{f(0) = 5}$.

Or $f(0) = 0^3 + a \times 0^2 + b \times 0 + c = c$. Donc $\boldsymbol{c = 5}$.

b) f est une fonction polynôme donc est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x : $\boldsymbol{f'(x) = 3x^2 + 2ax + b}$.

c) La tangente à C au point d'abscisse 2 est parallèle à l'axe des abscisses donc : $\boldsymbol{f'(2) = 0}$.

$f'(2) = 3\times 2^2 + 2a\times 2 + b = 12 + 4a + b$. Or $f'(2) = 0$ donc : $\boldsymbol{4a + b = -12}$.

d) La tangente T passe par les points $A(3 ; 2)$ et $B(2 ; -9)$, son coefficient directeur est :

$\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-9-2}{2-3} = 11$; mais ce coefficient directeur est aussi $f'(3)$ donc : $\boldsymbol{f'(3) = 11}$.

$f'(3) = 3\times 3^2 + 2a\times 3 + b = 27 + 6a + b$. Donc : $27 + 6a + b = 11$ donc : $\boldsymbol{6a + b = -16}$.

e) Ainsi, a et b vérifient le système suivant : $\boxed{\begin{cases} 4a + b = -12 \\ 6a + b = -16 \end{cases}}$.

$$\begin{cases} 4a + b = -12 & (1) \\ 6a + b = -16 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + b = -12 & (1) \\ 2a = -4 & (2)-(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -4 \end{cases}.$$

$\boxed{S = \{(-2\,;-4)\}}$. D'où, pour tout réel x : $\boxed{f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 5}$

4. a) Pour tout réel x : $f'(x) = 3x^2 - 4x - 4$.

b) Le trinôme $3x^2 - 4x - 4$ admet $64 = 8^2$ pour discriminant donc deux racines : $\dfrac{4-8}{6} = -\dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{4+8}{6} = 2$. $f'(x)$ est du signe de $a = 3$, donc positif, « en dehors des racines », donc sur $\left]-\infty\,;-\dfrac{2}{3}\right]$ et sur $[2 ; +\infty[$; f est donc croissante sur chacun de ces intervalles. $f'(x)$ est du signe de $-a = -3$, donc négatif, « entre les racines », donc sur $\left[-\dfrac{2}{3}\,;2\right]$; f est donc décroissante sur cet intervalle. On retrouve bien les variations de f lues graphiquement au **2.** vu que : $-\dfrac{2}{3} \approx -0{,}7$. On peut préciser que : $f\left(-\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{175}{27} \approx 6{,}5$.

5. a) $f(1) = 1 - 2 - 4 + 5 = 0$ donc $\boxed{\text{1 est l'une des solutions de l'équation } f(x) = 0}$.

b) • f est continue sur $[-2 ; -1]$ et strictement croissante sur $[-2 ; -1]$. $f(-2) = -3$ et $f(-1) = 6$ donc 0 est compris entre $f(-2)$ et $f(-1)$. Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires :

$$\boxed{\text{l'équation } f(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ sur l'intervalle } [-2 ; -1]}.$$

• f est continue sur $[2 ; 3]$ et strictement croissante sur $[2 ; 3]$. $f(2) = -3$ et $f(3) = 2$ donc 0 est compris entre $f(2)$ et $f(3)$. Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires :

$$\boxed{\text{l'équation } f(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \beta \text{ sur l'intervalle } [2 ; 3]}.$$

c) • En utilisant la calculatrice, on trouve : $f(-1{,}792) \approx -0{,}009$ et $f(-1{,}791) \approx 0{,}004$

donc : $f(-1{,}792) < 0 < f(-1{,}791)$ c'est-à-dire : $f(-1{,}792) < f(\alpha) < f(-1{,}791)$.

Comme f est strictement croissante sur$]-\infty ; -0{,}7]$, on en déduit : $\mathbf{-1{,}792 < \alpha < -1{,}791}$.

• De même : $f(2{,}791) \approx -0{,}002$ et $f(2{,}792) \approx 0{,}006$

donc : $f(2{,}791) < 0 < f(2{,}792)$ c'est-à-dire : $f(2{,}791) < f(\beta) < f(2{,}792)$.

Comme f est strictement croissante sur $[2 ; 4]$, on en déduit : $\mathbf{2{,}791 < \beta < 2{,}792}$.

6. a) Pour tout réel x : $(x-1)(x^2-x-5) = x^3 - x^2 - 5x - x^2 + x + 5 = x^3 - 2x^2 - 4x + 5$.

Pour tout réel x : $(x-1)(x^2-x-5) = x^3 - 2x^2 - 4x + 5$.

b) (E) $\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 4x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-x-5) = 0$

$\Leftrightarrow x - 1 = 0$ ou $x^2 - x - 5 = 0$.

Cette dernière équation de degré 2 admet pour discriminant $\Delta = 21$.

L'équation (E) admet donc trois solutions réelles : $\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}$; 1 et $\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$.

Vérifiez avec la calculatrice que les valeurs approchées des première et troisième solutions coïncident avec celles lues graphiquement et les encadrements trouvés au **5.c)**.

c) • Les solutions de l'inéquation : $f(x) \geq 0$ sont les abscisses des points de C d'ordonnée supérieure ou égale à 0 (autrement dit, des points de C situés au-dessus de ou sur l'axe des abscisses). $\boxed{S = [-1{,}8 ; 1] \cup [2{,}8 ; +\infty[}$.

• $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-x-5) \geq 0$.

Le trinôme $x^2 - x - 5$ admet deux racines : $\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}$ et $\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$. Ce trinôme est du signe de $a = 1$, donc strictement positif, « en dehors des racines », et négatif « entre les racines ».

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{21}}{2}$		1		$\frac{1+\sqrt{21}}{2}$		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-x-5		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1)(x^2-x-5)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\boxed{S = \left[\frac{1-\sqrt{21}}{2} ; 1\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{21}}{2} ; +\infty\right[}.$$

Corrigé 3 ....

1. a) $C(12) = 0{,}1 \times 12^3 + 50 \times 12 + 200 = 972{,}8$.

$$\boxed{\text{Le coût de fabrication de 12 bibliothèques est égal à 972,80 €}}.$$

b) La recette est alors de 320 × 12 = 3 840 euros, ce qui est supérieur au coût.

L'ébénisterie dégage des bénéfices pour la fabrication et la vente de 12 bibliothèques.

(Ce bénéfice est : 3 840 – 972,8 = 2 867,20 €.)

2. q est un réel de l'intervalle [10 ; 40].

a) La recette en euros obtenue par la fabrication et la vente de q bibliothèques est $320q$.

$B(q) = 320q - (0{,}1q^3 + 50q + 200) = 320q - 0{,}1q^3 - 50q - 200$ d'où :

$$\boxed{B(q) = -0{,}1q^3 + 270q - 200.}$$

b) • $B'(q) = -0{,}3q^2 + 270 = 0{,}3(900 - q^2) = 0{,}3(30 - q)(30 + q)$.

• $B'(q)$ s'annule en $q = 30$ (et en $q = -30$, mais cette valeur n'appartient pas à l'intervalle [10 ; 40] en fait).

• $B'(q)$ est du signe de $a = -0{,}3$ en dehors de ses racines, donc sur [30 ; 40], et du signe contraire entre ses racines, donc sur [10 ; 30].

• On peut aussi dresser un tableau de signes :

q	10		30		40
$30 + q$		+		+	
$30 - q$		+	0	–	
$B'(q)$		+	0	–	

• On pouvait aussi dire que comme : $0{,}3(30 + q) > 0$, $B'(q)$ est du signe de $30 - q$ et :

$$B'(q) > 0 \Leftrightarrow 30 - q > 0 \Leftrightarrow 10 < q < 30.$$

• On en déduit le tableau de variations de B :

x	10		30		40
$B'(q)$		+	0	–	
$B(q)$	2400	$\nearrow$	5 200	$\searrow$	4 200

c) La fonction B admet un maximum égal à 5 200 en $q = 30$. **L'ébénisterie doit fabriquer et vendre 30 bibliothèques par mois pour dégager un bénéfice maximal** (égal à 5 200 euros).

Corrigé 4 ....

Rappel : augmenter une quantité de t % revient à la multiplier par $\left(1+\frac{t}{100}\right)$; ainsi augmenter une quantité de 10 % revient à la multiplier par 1,1. De même, diminuer une quantité de t % reviendrait à la multiplier par $\left(1-\frac{t}{100}\right)$; ainsi diminuer une quantité de 10 % reviendrait à la multiplier par 0,9.

1. Le prix d'un article est de 120 €. Après majoration de 25 %, l'article coûte : 120 × 1,25 = 150 €.

Après minoration de y % sur ce prix majoré, il coûte : $150\left(1-\frac{y}{100}\right) = 150 - 1{,}5y$.

Comme le prix de l'article est à nouveau 120 € :

$$150 - 1{,}5y = 120 \Leftrightarrow 1{,}5y = 30 \Leftrightarrow \boldsymbol{y = 20}.$$

On constate qu'une hausse de 25 % n'est pas compensée par une baisse de 25 %, mais de 20 % !

2. Le prix d'un article est de P €. Après majoration de x %, l'article coûte : $\left(1+\dfrac{x}{100}\right)P$ €. Après minoration de y % sur ce prix majoré, il coûte : $\left(1-\dfrac{y}{100}\right)\left(1+\dfrac{x}{100}\right)P$.

Comme le prix de l'article est à nouveau P € :

$$\left(1-\frac{y}{100}\right)\left(1+\frac{x}{100}\right)P = P \Leftrightarrow \left(1-\frac{y}{100}\right)\left(1+\frac{x}{100}\right)=1 \Leftrightarrow 1+\frac{x}{100}-\frac{y}{100}\left(1+\frac{x}{100}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{100}-\frac{y}{100}\left(1+\frac{x}{100}\right)=0 \Leftrightarrow x-y\left(1+\frac{x}{100}\right)=0 \Leftrightarrow y=\frac{x}{1+\frac{x}{100}} \qquad \text{d'où : } \boxed{y=\frac{100x}{x+100}}.$$

3. a) f est dérivable sur [0 ; 100] comme quotient de fonctions dérivables sur [0 ; 100] et, pour tout x de [0 ; 100] :

$u(x) = 100x$ $\qquad$ $v(x) = x + 100$

$u'(x) = 100$ $\qquad$ $v'(x) = 1$

$$f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}=\frac{100(x+100)-100x\times 1}{(x+100)^2}=\frac{10\,000}{(x+100)^2}>0.$$

f est strictement croissante sur [0 ; 100]

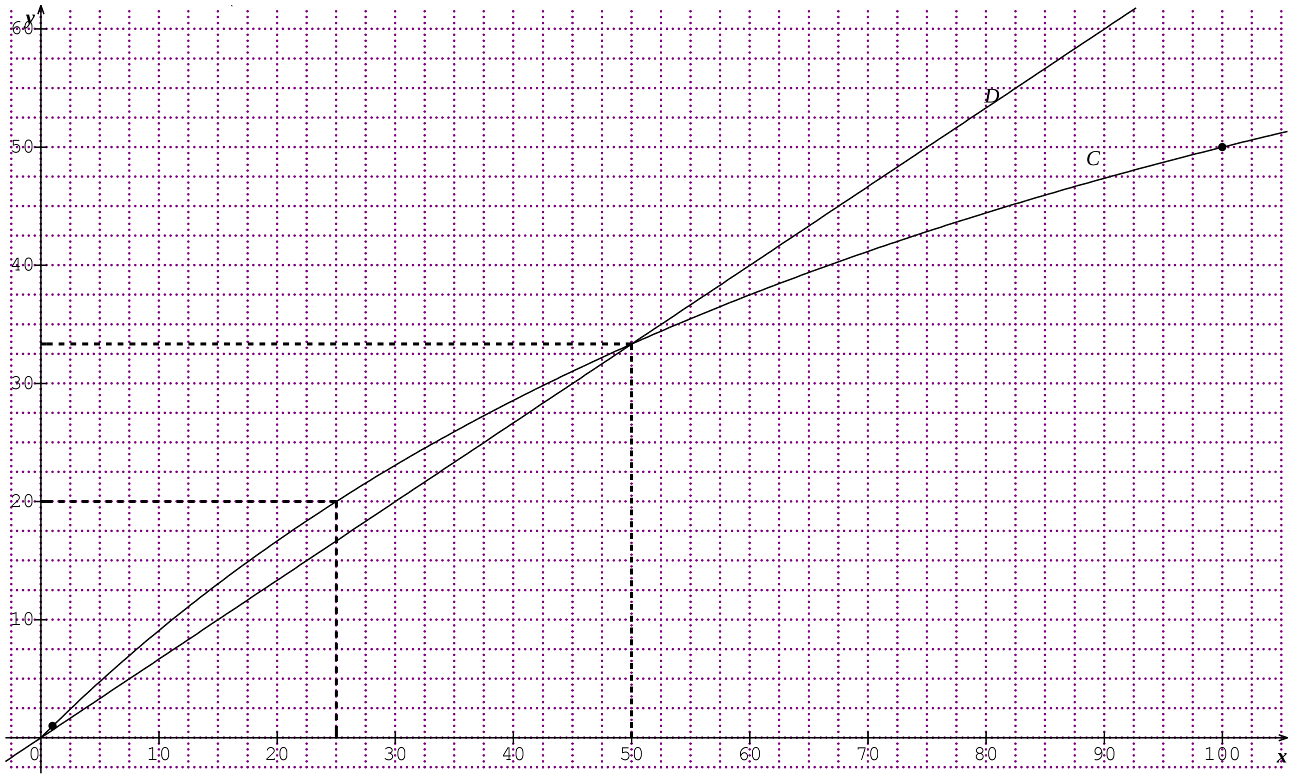
x	0		100
$f'(x)$		+	
$f(x)$	0	$\nearrow$	50

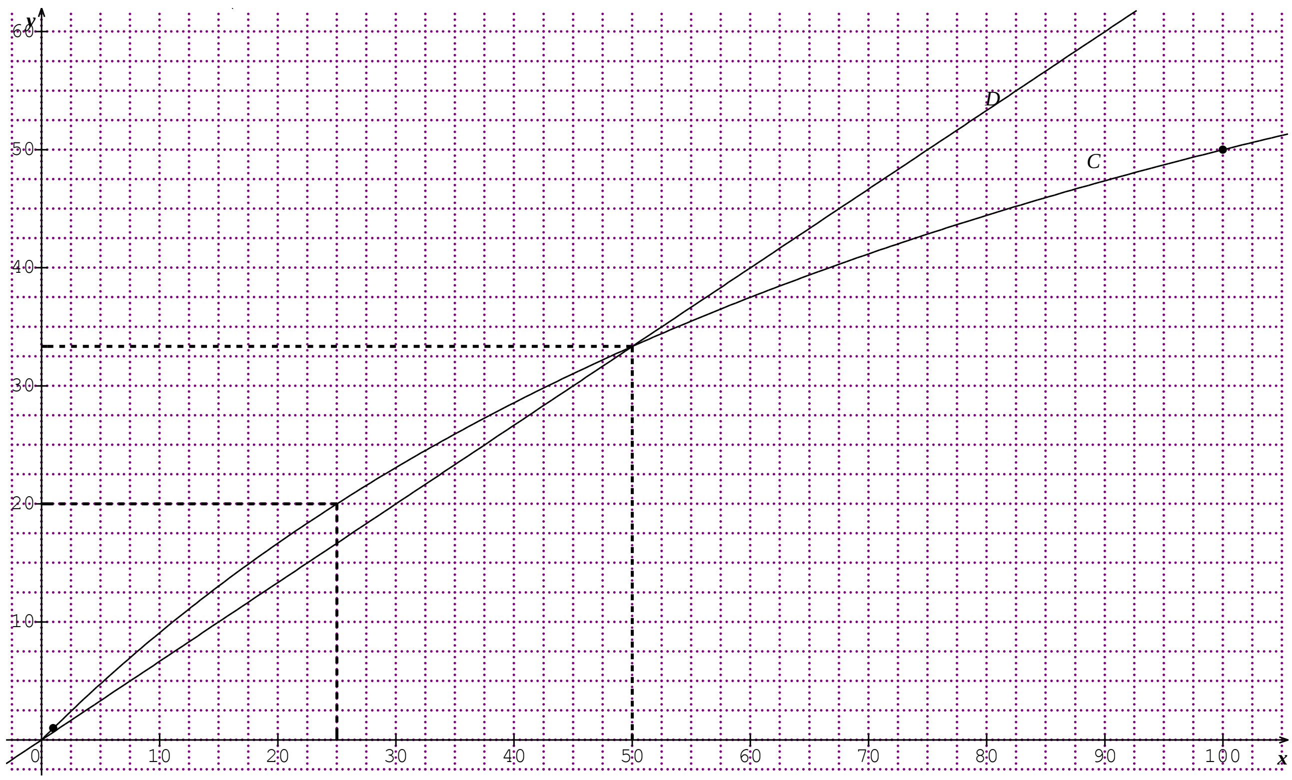
b) C passe par le point de coordonnées (25 ; 20) ce qui permet de retrouver le résultat de **1.**.

c) La solution de l'équation $y=\dfrac{2}{3}x$ est l'abscisse du point d'intersection de C et de la droite D d'équation $y=\dfrac{2}{3}x$. Graphiquement, on lit : $\boldsymbol{x = 50}$.

Par le calcul : $y=\dfrac{2}{3}x \Leftrightarrow \dfrac{100x}{x+100}=\dfrac{2}{3}x \Leftrightarrow \dfrac{100}{x+100}=\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow 300=2x+200 \Leftrightarrow \boldsymbol{x=50}$.

(Notez qu'on a divisé les deux membres d'une égalité par x car celui-ci est supposé non nul.)


y
60
50
40
30
20
10
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
x
D
C


y
60
50
40
30
20
10
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
x
D
C