29 septembre 2015

I – Problème préliminaire

Un ballon de rugby est lâché sans vitesse initiale de la fenêtre d'un immeuble située à environ 12 m du sol (23,7 m).

Problème à résoudre : Vérifier que la vitesse du ballon juste avant de toucher le sol au point O (qui se trouve être l'origine du repère choisi) vaut v = 15,3 m.s^{-1}.

Données :

Toutes les actions de l'air (poussée d'Archimède et frottements) sont négligées.

Repère choisi : origine O au sol, axe Ox vers la droite, axe Oy vers le haut.

Valeur du champ de pesanteur : g = 9,8 dans le système international d'unités.

Piste de résolution : après avoir exploité une loi de Newton, exprimer les coordonnées du vecteur accélération du centre d'inertie du système, puis les coordonnées des vecteurs vitesse et position. Enfin, utiliser les équations horaires obtenues pour résoudre le problème.

Nous appliquons la deuxième loi de Newton dans le cadre d'une chute libre qui nous mènera à la relation $\vec{a} = \vec{g}$ (voir cours).

Les conditions initiales de vitesse donnent $v_{0x} = 0$ et $v_{0y} = 0$

Les conditions initiales de position sont $x_0 = 0$ et $y_0 = 12$

Les vecteur $\vec{g}$ a pour coordonnées $g_x = 0$ et $g_y = -g$

Nous obtenons ainsi les coordonnées de l'accélération : $a_x = 0$ et $a_y = -g$

Nous réalisons une première série de primitives et nous utilisons les conditions initiales pour obtenir les coordonnées de la vitesse : $v_x = 0$ et $v_y = -gt$

Nous réalisons une deuxième série de primitives et nous utilisons les conditions initiales pour obtenir les coordonnées de la position : $x = 0$ et $y = -\frac{1}{2}gt^2 + 12$

Réponse à la question :

Au sol, y = 0, soit $-\frac{1}{2}gt^2 + 12 = 0$, ce qui mène à $t = \sqrt{\frac{12 \times 2}{g}} = 1.6$ s

On en déduit $v_y = -15.3$, donc v = 15,3 m.s^{-1} (puisque $v_x = 0$)

II– Angleterre-Pays de Galles

C'est la pénalité pour le gain du match ! Dan Biggar, le demi d'ouverture gallois a placé son ballon au sol à 50 m en face des poteaux adverses. Après quelques mimiques, il s'élance pour frapper.

Conditions initiales (à la date t = 0s) :

Position : le centre d'inertie du ballon se trouve à l'origine du repère.

Vitesse : la vitesse initiale donnée au ballon peut être modélisée par un vecteur $\overrightarrow{v_0}$ de valeur v_0 = 23,7 m.s^{-1} et faisant un angle de $\alpha = 40°$ avec l'horizontale.

Le plan vertical défini par le vecteur $\overrightarrow{v_0}$ et par le vecteur $\vec{\imath}$ passe entre les deux poteaux.

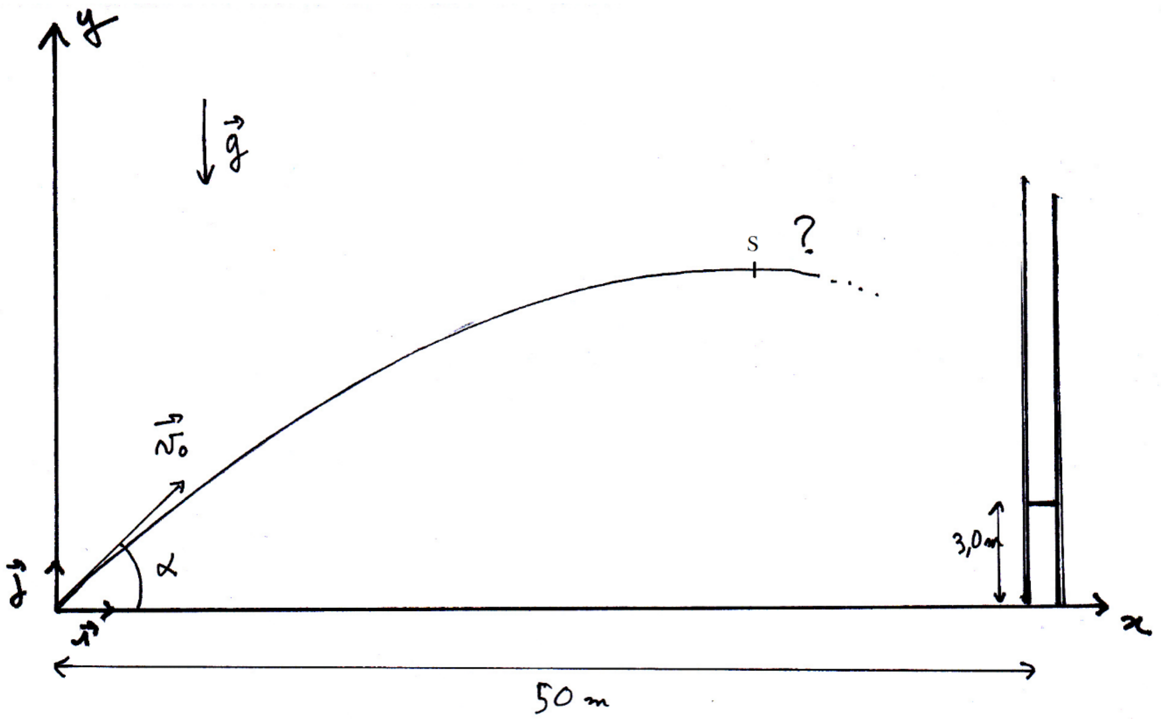
La barre transversale des poteaux se trouve à 3,0 m du sol.

Le champ de pesanteur uniforme est modélisé par le vecteur $\vec{g}$ vertical, vers le bas et de valeur g = 9,8 dans le système international d'unités.

Masse d'un ballon de rugby m = 450 g.

Les actions de l'air (poussée d'Archimède et frottements) sont dans un premier temps négligées.

Le repère d'espace choisi est présenté ci-dessous.



Problème : le ballon va-t-il passer au-dessus de la barre ?

Répondez aux questions suivantes et vous saurez si les 3 points ont été marqués ou non…

1) Quelle loi de Newton va permettre d'avancer dans la résolution ? Enoncer (faire une phrase) cette loi.

Nous appliquons la deuxième loi de Newton : dans un référentiel galiléen, la somme des forces extérieures qui s'exercent sur le système est égale au produit de la masse du système par l'accélération de son centre d'inertie.

2) **Démontrer** que l'accélération du centre d'inertie du système étudié est égale à $\vec{g}$.

La seule force à considérer est le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ (chute libre).

Nous avons donc $m\vec{g} = m\vec{a_G}$, soit $\vec{a_G} = \vec{g}$

3) Quelle est l'unité de g ?

g est donc une accélération et peut s'exprimer en $m.s^{-2}$. Sa présence dans l'expression du poids autorise l'unité $N.kg^{-1}$.

4) Après avoir établi les équations horaires de vitesse, démontrer que les équations horaires de position du système sont :

$x(t) = v_0 \cos\alpha\, t$

$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha\, t$

Les conditions initiales de vitesse donnent $v_{0x} = v_0\cos\alpha$ et $v_{0y} = v_0\sin\alpha$

Les conditions initiales de position sont $x_0 = 0$ et $y_0 = 0$

Les vecteur $\vec{g}$ a pour coordonnées $g_x = 0$ et $g_y = -g$

Nous obtenons ainsi, d'après la relation $\vec{a_G} = \vec{g}$, les coordonnées de l'accélération :

$a_x = 0$ et $a_y = -g$

Nous réalisons une première série de primitives et nous utilisons les conditions initiales pour obtenir les coordonnées de la vitesse : $v_x = v_{0x} = v_0\cos\alpha$ et $v_y = -gt + v_{0y} = -gt + v_0\sin\alpha$

Nous réalisons une deuxième série de primitives et nous utilisons les conditions initiales pour obtenir les coordonnées de la position :

$x = v_0\cos\alpha t + x_0 = v_0\cos\alpha\, t$ **(1)**

$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin\alpha\, t + x_0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin\alpha\, t$ **(2)**

5) Etablir que la trajectoire est de forme parabolique.

De (1) on tire $t = \frac{x}{v_0 cos\alpha}$ **et on remplace dans (2) :**

$y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0 cos\alpha}\right)^2 + v_0 sin\alpha \frac{x}{v_0 cos\alpha} = -\frac{g}{2v_0^2 cos^2\alpha} + \tan\alpha\, x$ **(3)**

6) Le ballon passe-t-il au-dessus de la barre transversale ?

La solution la plus simple, si l'équation de la trajectoire (3) a été établie, est de d'y remplacer x par 50 et de calculer y. On trouve y = 4,8 m, c'est supérieur à 3 m (hauteur de la barre) le ballon passe bien au-dessus.
Sinon, on pouvait utiliser les équations horaires x(t) et y(t) qui étaient données. Dans (1) on remplace x par 50 et on trouve t la date de passage à l'abscisse 50. On utilise cette valeur de t dans l'expression (2) et on trouve y (4,8m).

7) Au cours de sa trajectoire, le ballon passe par un point de hauteur maximum (le sommet de la trajectoire) noté S.

a. Vérifier que S se trouve à environ 12 m du sol

Au sommet, le vecteur vitesse $\overrightarrow{v_S}$**, toujours tangent à la trajectoire, est horizontal. La coordonnée verticale de** $\overrightarrow{v_S}$ **,** v_y**, est nulle.**

On a donc $-gt + v_0\sin\alpha = 0$ **qui nous mène à la date de passage au sommet** $t = \frac{v_0 sin\alpha}{g} = 1{,}6$ **s.**

Reste à calculer y à cette dateà l'aide de l'équation horaire (donnée dans l'énoncé) :

$y(t) = -\frac{1}{2}g(1{,}6)^2 + v_0 \sin\alpha \times 1{,}6 = 11{,}8$ **m**

b. Calculer le travail du poids du ballon entre le point de départ O et le sommet S. Commenter le signe trouvé.

Il n'est pas écrit : « établir l'expression du travail du poids »… Il faut connaître cette expression et l'utiliser directement : $W_{O\to S}(\vec{P}) = mg(z_o - z_S)$**, soit ici** $mg(y_0 - y_S)$**.**
Avec $y_o = 0$ **m et** $y_S = 12$ **m, la masse m = 0,45 kg (le kg est l'unité S.I. de masse) et** $g = 9{,}8\ m.s^{-2}$ **on calcule la valeur W = - 53 J une valeur évidemment négative puisque le système est ici en train de monter. Le poids, dirigé vers le bas, produit un travail résistant.**

c. Justifier qu'au cours de la deuxième partie de la trajectoire, c'est-à-dire entre S le sommet et C le point d'arrivée au sol, la valeur de la vitesse du ballon augmente.

Là, le système descend… Le poids exerce un travail moteur qui va logiquement donner de la vitesse au système.
Certes, le théorème de l'énergie cinétique, vu la veille, n'était pas exigé, mais il fallait essayer de ne pas produire un réponse purement intuitive et trop vague. Débuter la réponse en présentant le fait que la seule force exercée produit un travail moteur apporte un la rigueur nécessaire.

8) Justifier que la composante horizontale de la vitesse du ballon reste constante au cours de l'ensemble du mouvement.

Version 1 : si les équations horaires de vitesse ont été établies, on constate que la coordonnée $v_x = v_0\cos\alpha$ est indépendante de t, donc constante.

Version 2 : la force exercée est verticale, elle ne modifiera pas la composante de la vitesse qui lui est perpendiculaire, c'est-à-dire la composante horizontale v_x (voir cours sur le travail des forces)

9) Justifier que la composante verticale de la vitesse au point C (juste avant de toucher le sol) est $v_{y(C)} = -15{,}2$ m.s^{-1}. *Plutôt -17 m.s^{-1} semble-t-il* (~~toute valeur comprise entre -15,0 et -15,5 obtenue de manière cohérente sera acceptée~~)

On retrouve un raisonnement du type de celui effectué à la question 7.a : trouver d'abord la date associée à un évènement, puis en déduire une grandeur associée.

Au point C, y = 0, soit $-\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha\ t = 0$. Evidemment on ne considère pas la solution t = 0 qui correspond au début du mouvement.

Nous travaillons plutôt la solution $-\frac{1}{2}gt + v_0 \sin\alpha = 0$ menant à $t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} = 3{,}4$ s

On en déduit v_y à t = 3,2 s : $v_y = -g\times3{,}2 + v_0\sin\alpha = -17$ m.s^{1} (une valeur logiquement négative puisque le vecteur vitesse en C est incliné vers le bas et que l'axe des coordonnées verticales est orienté positivement vers le haut)

10) Les frottements ne sont maintenant pas négligés (mais la poussée d'Archimède l'est toujours…)

La trajectoire du ballon a été filmée et celui-ci passe à la verticale de la barre transversale en un point B situé à 3,5 m du sol.

La force de frottement $\vec{f}$ qui s'exerce sur le ballon au cours de sa trajectoire possède les caractéristiques suivantes :

- En permanence de même direction et de sens opposé au vecteur vitesse du centre d'inertie du ballon.
- De valeur proportionnelle à la valeur de la vitesse du ballon.

a) Si l'on souhaite calculer le travail de cette force entre les points A et B, peut-on utiliser la formule $W_{A\to B}(\vec{f}) = \vec{f}.\overrightarrow{AB}$? (Justifier la réponse)

Non ! La trajectoire étant curviligne (pas droite…) , le vecteur vitesse change tout le temps de direction. Le vecteur $\vec{f}$, en permanence opposé à $\vec{v}$, n'est donc pas un vecteur constant. Or, la formule proposée est réservée aux forces constantes (direction, sens et valeur)…

On pouvait aussi raisonner avec le fait que la valeur de v n'étant pas constante au cours de ce mouvement, la valeur de f (proportionnelle à v) ne l'était pas non plus.

b) $\vec{f}$ est-elle une force conservative ? (justifier)

Non, car le travail de cette force dépend chemin suivi pour aller de A à B. La réponse est assez intuitive, mais il faut réaliser que si ça frotte sur un parcours direct de, par exemple, 10 m ou sur un parcours sinueux (entre les mêmes points) de 100 m on n'aura pas dissipé la même énergie à cause des frottements.

Une réponse issue du cours (définition de ce qu'est une force conservative + simple indication qu'une force de frottement n'en est pas une) suffisait.

c) Sans procéder à un calcul, donner le signe du travail de la force de frottement $\vec{f}$. (justifier)

L'angle entre les vecteurs $\vec{f}$ et $\vec{v}$ est en permanence égal à 180° (vecteurs opposés). Si l'on décompose notre mouvement en un ensemble de petits déplacements (des déplacements élémentaires) pour lesquels la direction et le sens du déplacement coïncident avec la direction et le sens de la vitesse, on peut alors avancer qu'en permanence force de frottement et vecteur déplacement sont opposés à 180°. Ce qui implique un travail résistant, de signe négatif.

Un raisonnement plus direct peut être proposé en utilisant l'angle de 180° entre vecteurs $\vec{f}$ et $\vec{v}$ et en concluant que la <u>puissance</u> des frottements est en permanence négative, ce qui implique que le travail de la force l'est aussi (je vous laisse méditer sur cette piste de réponse).

d) Justifier qu'à cause des forces de frottements le ballon passe à la verticale de la barre plus bas qu'avec le modèle dans lequel nous avions négligés toutes les actions de l'air.

Il est attendu ici une réponse clairement rédigée dans laquelle doit figurer au moins un argument permettant de justifier qu'à cause des frottements, le ballon ira probablement moins loin, moins haut, donc en particulier moins haut lors de son passage à l'abscisse x = 50 m, au niveau de la barre transversale.
Attaquer la réponse en soulignant que le travail de cette force supplémentaire est résistant est une bonne approche…

11) Angleterre 25 – Pays de Galles 28 ! Quel était le score avant la pénalité de Dan Biggar ?

2 à 0… Heu, non ! 25-25…