21. - PERSPECTIVE CAVALIÈRE

En dessin perspectif industriel, on cherche à donner une représentation plane d'un objet (ou d'une figure de l'espace) qui permette de se rendre compte, à première vue, de l'aspect général de cet objet.
A cet effet, on utilise généralement la projection cylindrique. Dans cette leçon nous étudierons la perspective cavalière, qui est une application de la projection cylindrique oblique.
Nous étudierons plus loin (23e leçon) la projection axonométrique, qui est une application de la projection cylindrique orthogonale.

1. Définition.

La perspective cavalière d'une figure est sa projection cylindrique oblique sur un plan P, que l'on suppose généralement vertical (plan du tableau).
(La direction oblique des projetantes est quelconque.)

La perspective cavalière d'un objet est donc la figure plane qui représente cet objet lorsqu'il est vu par une personne très éloignée du plan du tableau.

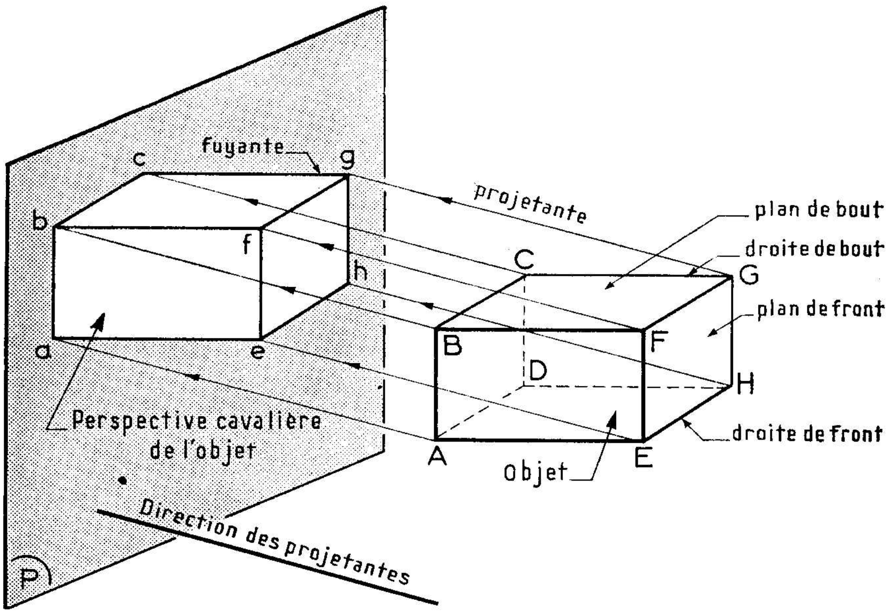


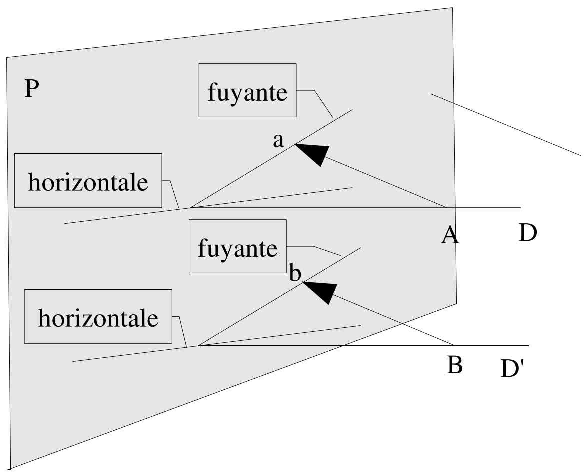
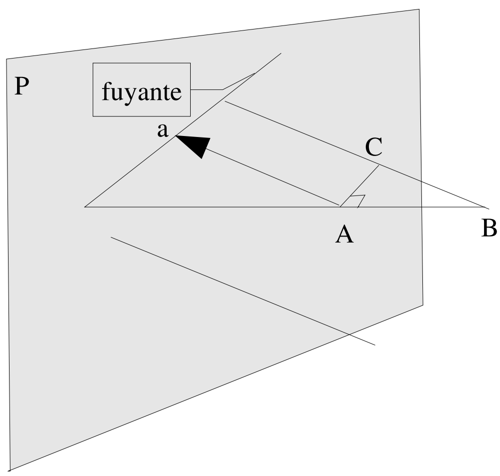
Fig. 1. -- Plan P de projection (plan de tableau). L'objet est ici un parallélépipède rectangle.

Plans de front ABCD et EFGH (parallèles au plan du tableau). Droites de front AB, BC, ..., FG, GH (parallèles au plan du tableau).
Plans de bout ABEF, BCGH ... (perpendiculaires au plan du tableau). Droites de bout AE, BF, CG, DH (perpendiculaires au plan du tableau).

Exemple. La figure 1 représente un parallélépipède rectangle ABCDEFGH (les 6 faces sont des rectangles) tel que le rectangle ABCD (donc EFGH) soit de front, (c'est-à-dire parallèle au plan du tableau ; les arêtes AE, BF, CG, DH sont de bout, c'est-à-dire perpendiculaires au plan du tableau. La figure plane abc... est la perspective cavalière de ce parallélépipède.

Une droite est dite de front (frontale) quand elle est parallèle au plan du tableau.
Un plan est dit de front (plan frontal) quand il est parallèle au plan du tableau. Définition analogue pour une figure plane frontale.
Une droite est dite de bout quand elle est perpendiculaire au plan du tableau.
Un plan est dit de bout quand il est perpendiculaire au plan du tableau. Un plan est dit de profil quand il est vertical et de bout. Définition analogue pour une figure plane de profil.

2. Justification des tracés.
Rappelons les propriétés de la projection cylindrique qui justifient les principaux tracés utilisés en technique graphique.

<table>
<tr>
<td>1° La perspective cavalière d'un segment AB, de front, est un segment ab égal à AB. Sur la figure 1 : ab = AB, bc = BC, ..
La perspective cavalière d'une figure plane de front est une figure qui lui est égale ; ainsi (fig. 1), le rectangle de front ABCD se projette suivant le rectangle égal abcd. Mais, il n'en est pas de même pour une autre face d'un objet, lorsque cette face n'est pas de front.
La perspective cavalière d'une horizontale de front est une horizontale : si BC est horizontale et de front, sa perspective est une horizontale bc du plan P.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>2° La perspective cavalière de deux droites parallèles se compose de deux droites parallèles.
En particulier, les perspectives de droites de bout D, D', ... sont des droites parallèles d, d', ... appelées fuyantes (fig. 1 et 2).
L'angle aigu d'inclinaison α des fuyantes avec les horizontales du plan du tableau dépend de la direction Δ des projetantes.
En dessin technique,on prend généralement α = 45°, parfois 30°, ou 60°.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

3° La perspective cavalière d'un segment de droite AB de bout est un segment ab de fuyante.
Le rapport de réduction (ou d'amplification) est r = ab/AB =AC/AB = tg β

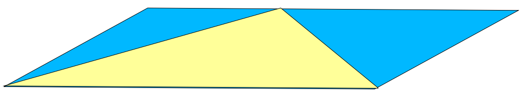
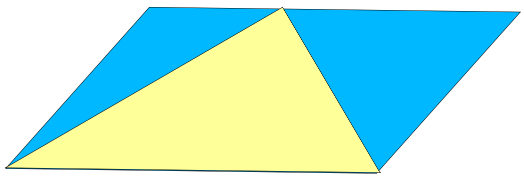
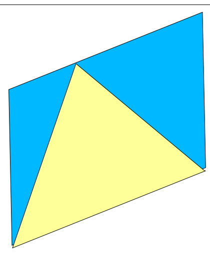
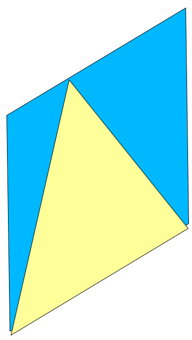
β est l'angle aigu formé par une projetante et une droite de bout.
Ce rapport de réduction r ne dépend donc pas du segment AB perpendiculaire au plan P, mais de la direction Δ des projetantes.
En dessin technique, on donne généralement à r la valeur 5/10 ; on peut également utiliser: 0,4, 0,6, 0,7, 0,8, 0,9, 1.

4° Le rapport de deux segments parallèles est égal à celui de leurs perspectives cavalières : deux segments parallèles AB et A'B' ont pour perspectives deux segments parallèles ab et a'b', et l'on a :

$$AB/A'B' = ab/a'b'$$

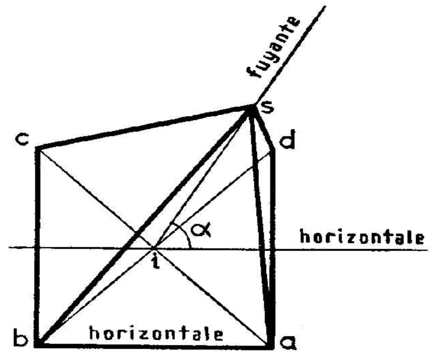
3. Exemples.
La construction de la perspective cavalière d'une figure donnée exige la connaissance :
1° de l'angle α des fuyantes et des horizontales du plan du tableau,
2° du rapport de réduction r.

Exemple I : perspective cavalière d'un rectangle ABCD : Si ce rectangle est de front, sa perspective cavalière est au rectangle abcd qui lui est égal (même figure que ABCD).
Exemple II : perspective cavalière d'un triangle ABC. Si ce triangle est de front, sa perspective cavalière est un triangle abc qui lui est égal (même figure que ABC).

 α = 45° ; r = 0,6. Perspective cavalière d'un rectangle ABCD horizontal, AB étant parallèle au plan du tableau.	 α = 60° ; r = 0,8. Perspective cavalière d'un triangle ABC horizontal, AB étant parallèle au plan du tableau.
 α = 30° ; r = 0,5. Perspective cavalière d'un rectangle ABCD de profil, perpendiculaire au plan du tableau, ab = AB × 0,5.	 α = 45° ; r = 0,5. Perspective cavalière d'un triangle ABC de profil, AB étant perpendiculaire au plan du tableau.

Pour construire la perspective cavalière d'une telle arête, il suffit d'en connaître deux points.
Dans la figure suivante, il s'agit de la perspective cavalière d'une pyramide régulière de sommet S et dont la base est un carré ABCD (SA = SB = SC = SD) ;
le carré ABCD est de front et AB est horizontal; le sommet S est plus éloigné du plan du tableau que le carré.
Si I est le centre du carré, la droite IS est donc de bout :
elle se projette suivant une fuyante is telle que:
is = IS $\times$ r;
le point s étant déterminé, il suffit de joindre sa, sb, sc, sd.
On suppose AB = 30 mm et IS = 50 rnm;
la perspective est dessinée ici avec α = 60°, r = 0,5.

Exemple III. - La plupart des objets, quelles que soient leurs positions par rapport au plan du tableau, ont presque toujours des arêtes qui ne sont, ni de front, ni de bout.



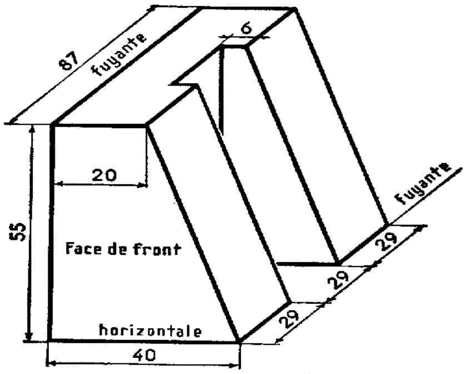


Fig. 11. — *Cale entaillée* { *Échelle 1/4*, α = 45°, r = 0,5.

Exemple IV. - Perspective cavalière d'une cale entaillée (fig. 11).
(Les cotes marquées sont celles de la cale.)

EXERCICES

366. - Dessiner la perspective cavalière d'un carré horizontal ABCD (AB = 40 mm) dans chacun des cas suivants :
1° le côté AB est de front.
2° la diagonale AC est de front. (On prendra α = 60°, r = 0,6)

367.- Dessiner la perspective cavalière d'un carré de profil ABCD (AB = 50 mm) dans chacun des cas suivants :
1° le côté AB est de bout;
2° la diagonale AC est de bout.
(On prendra α = 45°, r = 0,5)

368.- Dessiner la perspective cavalière d'un triangle équilatéral ABC (AB = 52 mm) dans chacun des cas suivants :

1° le triangle ABC est horizontal et AB est de front ;
2° le triangle ABC est de profil et AB est de bout.
(On prendra $\alpha = 30°$, r = 0,8.)

369. - Dessiner la perspective cavalière d'un hexagone régulier ABCDEF (AB = 30 mm) dans chacun des cas suivants :
1° l'hexagone est horizontal et AB est de front ;
2° l'hexagone est de profil et AB est de bout ;
3° l'hexagone est de profil et la diagonale AC est de bout.
(On prendra $\alpha = 30°$ et r = 0,6.)

370. - Dessiner la perspective cavalière d'un parallélépipède rectangle ABCDEFGH (AB = 32 mm, AD = 20 mm, AE = 28 mm). Le rectangle ABCD est de front, AB fait un angle de 30° avecle plan horizontal.
(On prendra $\alpha = 45°$ et r = 0,7.

371. - Un vé de traçage, vu de face (élévation) a la forme indiquée par la figure ci-contre ; l'épaisseur du vé est 40 mm. En supposant que 1a face dessinée est de front et que la base du vé est horizontale, dessiner la perspective cavalière de cette pièce.
On prendra $\alpha = 45°$ et r = 0,7.

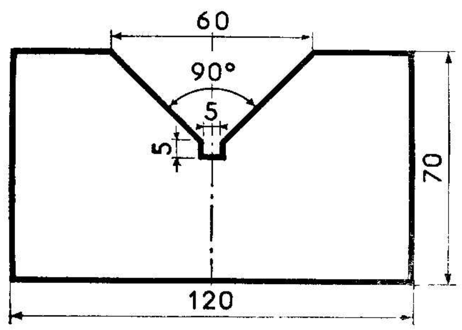
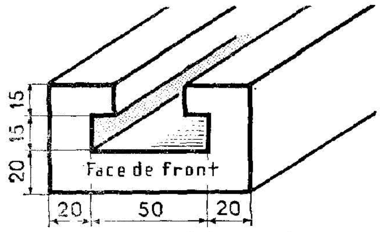


Fig. 12.
Vé de traçage.

372. - On considère la pyramide de l'exemple III. Le carré de base ABCD est de profil, AB est vertical. (AB = 30 mm, IS = 50 mm.) Dessiner la perspective cavalière de cette pyramide . échelle 3/2, $\alpha = 45°$ et r = 0,6.

373. - Un hexagone régulier ABCDEF est horizontal, le côté AB = 25 mm est de front.
Cet hexagone est la base d'un prisme régulier de hauteur 65 mm. Dessiner la perspective cavalière de ce prisme (échelle 1, α =60°, r = 0,5).

374. - Un octogone régulier ABCDEFGH est incliné à 45° sur le plan horizontal. Le côté AB = 20 mm est de bout. Dessiner la perspective cavalière :
1° de cet octogone régulier ; 2° de la pyramide régulière de hauteur 60 mm ayant pour base cet octogone. (Echelle 1, $\alpha = 60°$, r = 0,6.)

375. - Dessiner la perspective cavalière d'une rainure en té représentée par le croquis ci-contre. La longueur de la pièce est 120 mm ; la base est horizontale (échelle 2/3,α =30°, r = 0,6).	 Fig. 13. — *Rainure en té.*

22. - PROJECTIONS ORTHOGONALES SUR UN PLAN
PROJECTION D'UN ANGLE DROIT

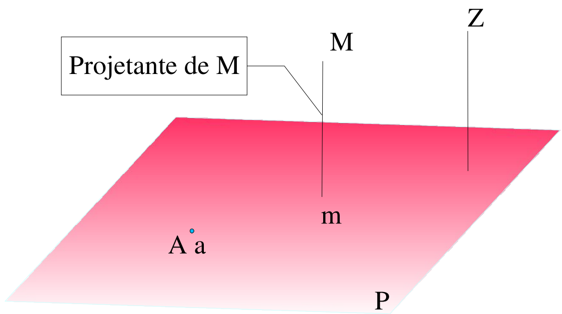
Dans cette leçon, il n'est question que de la projection cylindrique orthogonale.

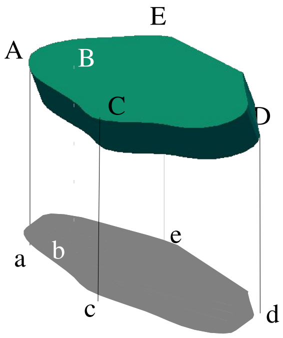
1. Définition.

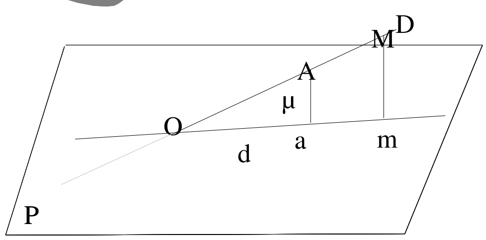
Soit P le plan de projection et Z (perpendiculaire à P) la direction des projetantes. Soit m la projection cylindrique orthogonale de M sur le plan P : la projetante Mm, étant parallèle à Z, est perpendiculaire au plan P ; donc :

la projection orthogonale d'un point sur le plan P est le pied de la perpendiculaire menée de ce point sur le plan P

(Dans le langage courant, on sous-entend le mot "orthogonal". Par la suite, quand on parlera de la projection d'un point ou d'une figure sur un plan, il s'agira, sauf avis contraire, de la projection orthogonale).







La projection orthogonale d'une figure (F) sur un plan P est la figure formée par l'ensemble des projections de tous les points de la figure (F) : c'est le lieu des projections orthogonales de tous les points de la figure (F).

Toutes les propriétés énoncées précédemment (20e leçon, § 2) restent valables. Ainsi :

1° **une droite D, non perpendiculaire au plan P, se projette suivant une droite d** ; mais le plan projetant D (plan contenant D et Aa) est ici perpendiculaire au plan P ;

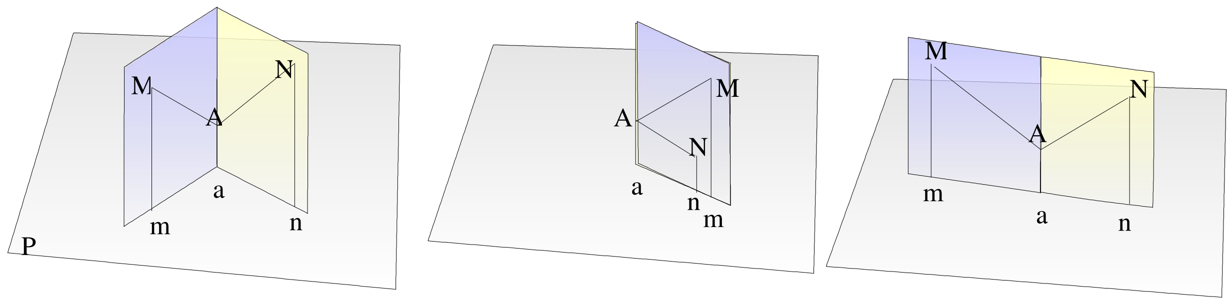
2° **deux droites parallèles D et D' se projettent suivant deux droites parallèles d et d';** il y a exception si le plan (D, D') est perpendiculaire à P (auquel cas d et d' sont confondues), ou si D et D' sont perpendiculaires au plan P (auquel cas la projection de chacune d'elles est un point).

2. Projection orthogonale d'un angle quelconque sur un plan.

Soit un angle quelconque MÂN qui se projette sur le plan P suivant l'angle mân.

Si le plan MAN est parallèle au plan P, on a: mân = MÂN (réciproque non exacte en général : cf. le § 3 suivant relatif à la projection de l'angle droit).

Si le plan MAN n'est pas parallèle au plan, mân n'est pas égal, en général, à MÂN ; en particulier, si le plan MAN est perpendiculaire au plan P, l'angle mân est ou nul, ou plat.

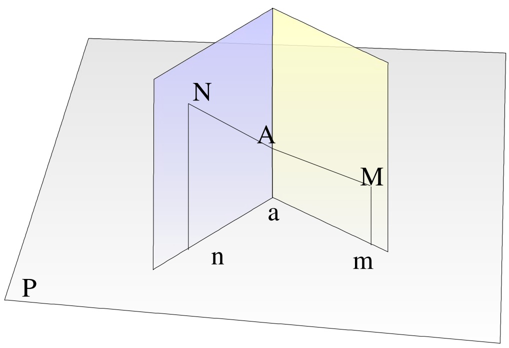


3. Projection orthogonale d'un angle droit sur un plan.

Si un angle droit MÂN est situé dans un plan parallèle au plan P de projection, il se projette sur le plan P suivant un angle droit mân. Mais un angle droit MAN peut, comme le montre le théorème suivant, se projeter sur le plan P suivant un angle droit, sans que 1e plan MAN soit parallèle au plan P.

Théorème.

Si un angle droit a l'un de ses côtés, au moins, parallèle au plan P ou contenu dans P (l'autre côté n'étant pas perpendiculaire au plan P), il se projette sur P suivant un angle droit.



La droite am, qui est parallèle à AM, est donc aussi perpendiculaire au plan R, et par suite à la droite an de ce plan.

L'angle mân est donc droit.

Il en résulte que, si un rectangle a l'un de ses côtés parallèles à un plan P (le plan de ce rectangle n'étant pas perpendiculaire à P), il se projette sur P suivant un rectangle.

4. Remarque.

Dans l'énoncé précédent, il est dit :

1° que l'angle projeté est droit ;

2° que l'un de ses côtés, au moins, est parallèle au plan de projection, ou contenu dans ce plan ;

3° que la projection de l'angle est un angle droit.

Le théorème précédent montre que les hypothèses 1 et 2 entraînent la conclusion 3.

Plus généralement, deux quelconques d'entre ces données entraînent la troisième :

1° et 3° entraînent 2°,

2° et 3° entraînent 1°,

ce sont deux réciproques du théorème § 3.

Nous démontrons au § 5 la première de ces réciproques. Pour la seconde, voir exercice n° 385.

5. Théorème.
Si un angle droit se projette orthogonalement sur un plan suivant un angle droit, l'un de ses côtés au moins est parallèle au plan (ou contenu dans ce plan).

Supposons, par exemple, que AN ne soit pas parallèle à P, donc à sa projection an : nous allons établir que AM est parallèle à P (ou contenue dans P).
Le dièdre (R, Aa, Q) est droit (car son rectiligne, mân, est droit par hypothèse).
Par suite an est perpendiculaire au plan Q projetant AM, donc à AM,
et am est perpendiculaire au plan R projetant AN.
La droite AM est perpendiculaire au plan R (car elle est perpendiculaire aux droites sécantes an et AN).
Les droites AM et am, perpendiculaires au plan R, sont donc parallèles (ou confondues). C'est dire que la droite AM est parallèle à P (ou contenue dans P).

6. Conséquence. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un angle droit se projette orthogonalement sur un plan suivant un angle droit est que l'un de ses côtés au moins soit parallèle au plan (ou contenu dans ce plan).

Cela résulte des deux théorèmes précédents : condition nécessaire théorème 5, condition suffisante théorème3.

Remarquons que si l'un des côtés de l'angle que l'on projette est dans le plan de projection, on retrouve l'énoncé du théorème des trois perpendiculaires (14e leçon, § 5), ou l'une de ses réciproques.
Enfin, les résultats précédents subsistent si, au lieu d'un angle droit, on considère deux droites orthogonales de l'espace.

EXERCICES

376. - Démontrer que si les projections d'une ligne L sur deux plans sécants sont des droites, cette ligne L est, en général, une droite. Cas d'exception.

377. - Soit G le point de concours des médianes d'un triangle ABC. On projette les points A, B, C, G en A', B', C', G' sur un plan P. Démontrer que G' est le point de concours des médianes du triangle A'B'C'.

378. - 1° On donne deux droites D et E non parallèles. Comment faut-il choisir un plan P pour que les projections de D et de E sur P soient parallèles ?
2° On donne un quadrilatère gauche ABCD. Comment faut-il choisir un plan P pour que la projection de ce quadrilatère sur le plan P soit un parallélogramme ? Le problème est-il possible si

ABCD est un quadrilatère plan ?

379. - Démontrer le théorème du § 3 en établissant que $mn^2 = am^2 + an^2$ (utiliser le théorème de Pythagore).

380. - On donne un carré ABCD de côté a. Par AB, on mène un plan P tel que le rectiligne du dièdre des plans P et ABCD soit 60°. Quelle est la nature de la projection du carré sur le plan P ? Quelle est l'aire de cette projection ?
Application numérique : $a = 5$ cm.

381. - Deux droites D et E sont telles que leurs projections sur chacun de deux plans sécants soient parallèles. Démontrer que D et E sont, en général, parallèles. Cas d'exception.

382. - Deux plans P et Q se coupent suivant une droite X. La droite D étant perpendiculaire au plan Q, démontrer que la projection de D sur P est perpendiculaire à X.

383. - On donne deux plans P et Q sécants suivant une droite X. Un point O se projette en O' et O" sur P et Q. Démontrer que les projections de O' et O" sur X coïncident. Réciproque.

384. - Démontrer que si trois points d'une droite D sont également distants d'une droite E,
les droites D et E sont parallèles.

385. - Si un angle dont un côté est parallèle à un plan P (ou contenu dans P) se projette sur ce plan suivant un angle droit, cet angle est lui-même droit (cf. § 4).

386. - Prouver que si un plan R coupe deux plans perpendiculaires P et Q suivant un angle droit AOB, l'une au moins des droites OA et OB est perpendiculaire à l'intersection des plans P et Q.

387. - Les côtés d'un angle droit xAy coupent un plan P en M et N. Soit a la projection de A sur le plan P.
1° Démontrer que $MN^2 > aM^2 + aN^2$, et en déduire que l'angle projeté $M\hat{a}N$ est obtus.
2° Utiliser le résultat précédent pour établir le théorème § 5.

388. - Un angle MAN, dont un seul des côtés est parallèle au plan P de projection, se projette sur P suivant $m\hat{a}n$.
1° Montrer que si $M\hat{A}N$ est aigu, on a $m\hat{a}n < M\hat{A}N$ (d'où $m\hat{a}n$ est aigu).
2° Montrer que si $M\hat{A}N$ est obtus, on a $m\hat{a}n > M\hat{A}N$ (d'où $m\hat{a}n$ est obtus).

389. - Un triangle ABC a ses trois angles aigus.
1° Montrer que l'on peut toujours trouver un plan P passant par B et C tel que l'angle $B\hat{A}C$ se projette sur P suivant un angle droit.

2° En déduire que, par deux droites concourantes, on peut faire passer respectivement deux plans perpendiculaires.
3° Etant donné deux droites de l'espace, montrer que l'on peut toujours trouver un plan de projection sur lequel les deux droites données se projettent suivant deux droites perpendiculaires.

23. - PERSPECTIVES AXONOMÉTRIQUES

Nous avons étudié, 21e leçon, la perspective cavalière, qui est une application de la projection cylindrique oblique. Dans cette leçon, nous étudierons diverses perspectives orthogonales d'un objet : on projette orthogonalement cet objet sur un plan de projection, ou tableau, en ayant soin de définir préalablement la position de l'objet par rapport au tableau, de manière à obtenir un dessin qui rende clairement compte de la forme de l'objet.

1. Définition.

Lorsque l'on projette orthogonalement un objet sur un plan P, les droites perpendiculaires à P se projettent selon des points, les plans perpendiculaires à P se projettent selon des droites (fig. 1).Ces dispositions sont donc nuisibles à la clarté du dessin. D'où la nécessité de placer l'objet dans une position particulière par rapport au plan P du tableau (fig. 2).

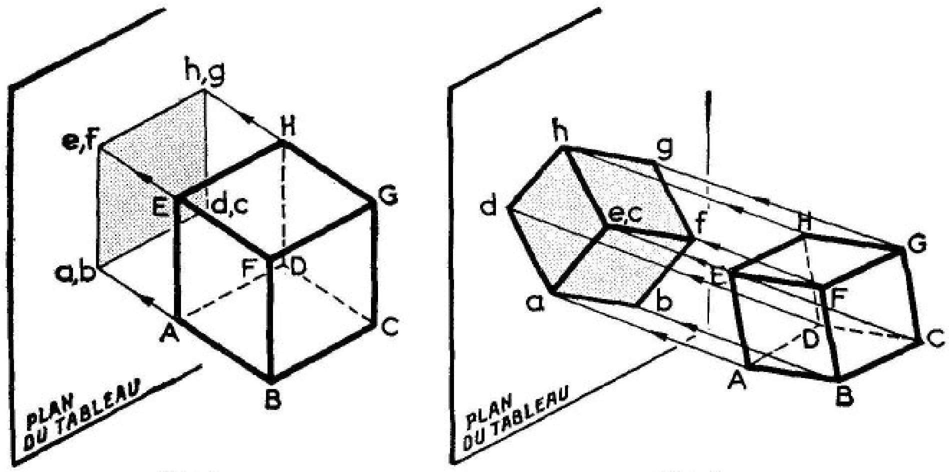


Fig. 1.   Fig. 2.

Comparez ces deux projections d'un même objet (cube) : la projection (fig. 2) rend mieux compte de la forme de l'objet que la projection (fig. 1).

Pour caractériser la position de l'objet par rapport au plan P du tableau, il est clair qu'il suffit de préciser la position, par rapport au plan P, d'un trièdre lié à l'objet considéré.

Généralement, on choisit un trièdre trirectangle dont les arêtes sont des droites remarquables de l'objet à représenter : si l'on connaît la projection de ce trièdre sur le plan P, on peut construire la projection de l'objet considéré.

Les diverses projections orthogonales d'un trièdre trirectangle conduisent donc à divers types de perspectives orthogonales : chaque type est une perspective axonométrique.

D'où la définition : la perspective axonométrique d'un objet, ou d'une figure, est sa projection orthogonale sur un plan P,

que l'on suppose généralement vertical (plan du tableau), lorsque l'on a précisé comment se projetait sur ce plan un trièdre trirectangle de référence.

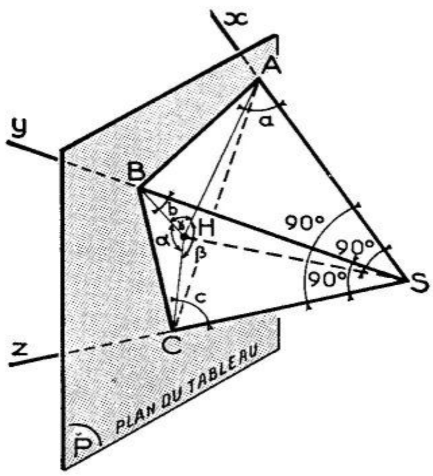
Projection d'un trièdre trirectangle sur un plan coupant ses trois arêtes.

Soit Sxyz le trièdre trirectangle qui définit, par rapport au plan P du tableau, la position de l'objet à projeter (fig. 3).

La projection de ce trièdre est déterminée si l'on se fixe les trois angles a, b, c que forment les arêtes avec le plan P. Mais, comme ces angles sont souvent difficiles à faire apparaître sur l'objet, on considère les trois angles , , , que font entre elles les projections des arêtes.

1° Relations entre les angles , , , et a, b, c.

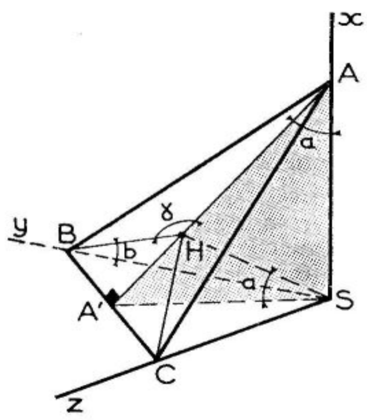
Désignons par A, B, C les points d'intersection respectifs des arêtes Sx, Sy, Sz avec le plan P de projection et par H la projection orthogonale du sommet S sur le plan P.



Rappelons deux propriétés du trièdre trirectangle (Exercice 349) : le point H est l'orthocentre du triangle ABC ; le triangle ABC a tous ses angles aigus.

D'où il résulte que le point H est à l'intérieur du triangle ABC et que, par suite :

+ + = 360°.



Prolongeons AH jusqu'à son intersection A' avec le côté BC (fig. 4); le triangle ASA' est rectangle en S et SH est la hauteur issue de A.

Dans le triangle rectangle SHA' :

HA' = SH. tg a

et, dans le triangle rectangle SHB

SH = HB.tg b ou HB = SH/tg b

Donc HA'/HB = tga. tgb.

Mais, dans le triangle rectangle BA'H

HA'/HB = cos BHA' = - cos

(car BHA' est le supplément de).

D'où, en comparant les deux valeurs de HA'/HB

cos = - tg a tg b (1)

Par permutation circulaire :

cos = - tg c tg a (2)

et cos = tg b tg c (3)

Inversement,les relations précédentes permettent de calculer les angles a, b, c connaissant , , .

En effet, multiplions membre à membre les égalités (1) et (2) :

cos . cos = tg² a. tg b. tg c

soit, compte tenu de la relation (3) :

cos . cos = - tg² a. cos

ou (4)

$$\mathrm{tg}^2\, a = \frac{-\cos\ \ .\ \cos}{\cos}$$

et les formules analogues (5) et (6) par permutation circulaire.

2° Rapports de réduction.

Par définition, ce sont les quotients des longueurs des projections des arêtes par les longueurs des arêtes correspondantes. En les désignant par r1, r2, et r3 :

r1 = HA/SA ; r2 = HB/SB ; r3 = HC/SC

ou r1 = cos a ; r2 = cos b ; r3 = cos c

Calculons ces rapports en fonction des angles , , :

$$\cos^2 a = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2\, a} = \frac{\cos}{\cos\ \ - \cos\ \ \cos}$$

D'où :

$$r1 = \sqrt{\frac{\cos}{\cos\ \ - \cos\ \ \cos}}$$

De même

$$r2 = \sqrt{\frac{\cos}{\cos\ \ - \cos\ \ \cos}} \qquad r3 = \sqrt{\frac{\cos}{\cos\ \ - \cos\ \ \cos}}$$

3. Différents types de perspectives axonométriques.

On obtiendra un type de perspective axonométrique en choisissant trois valeurs des angles , , , valeurs qui, rappelons-le, sont assujetties à la seule condition :

+ + = 360°.

Pour exécuter facilement les tracés, on choisira généralement des angles remarquables (120°, 135°, 150° ...). De plus ces angles seront disposés de manière que les arêtes verticales de l'objet à représenter soient figurées par des droites verticales.

Nous n'étudierons ici que les trois types les plus usuels : la perspective isométrique, la perspective dimétrique et la perspective trimétrique.

1° Perspective isométrique.

Les trois arêtes du trièdre de référence sont également inclinées sur le tableau. L'égalité des angles a, b, c, entraîne celle des angles , , . D'où

= = = 120°.

Dans cette perspective, les surfaces planes de l'objet respectivement parallèles aux trois faces du trièdre de référence sont traitées avec la même importance.

Les rapports de réduction rl, r2, et r3, sont égaux et leur valeur commune r est donnée par la relation :

$$r = \sqrt{\frac{\cos}{\cos \; - \cos \quad \cos}}$$

avec cos = cos = cos = - 0,5

D'où **r** ≅ **0,82.**

Ce qui revient à dire que tout segment parallèle à l'une quelconque des arêtes du trièdre de référence est réduit dans le rapport 0,82 (d'où la justification du mot isométrique).

Les figures 5 et 6 représentent en perspective isométrique un cube et un vé de traçage.

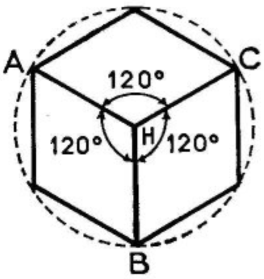
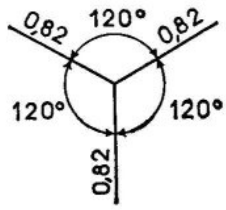


Fig. 5.



Perspective isométrique.

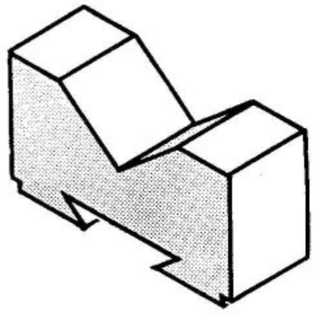


Fig. 6.

2° Perspective dimétrique.

Deux des arêtes du trièdre de référence sont également inclinées sur le tableau.
Si, par exemple, les angles b et c sont égaux, on a = . Le choix du troisième angle dépend de l'importance que l'on veut donner à la projection de la face qui lui correspond.
Dans la perspective dimétrique, dite redressée, on prend **= 150°.**
D'où = = **105°.**
Par suite, les surfaces planes parallèles à la face SBC du trièdre ont moins d'importance en projection que celles qui sont parallèles aux deux autres faces du trièdre.
Les rapports de réduction sont respectivement :
Sur SA :

$$r1 = \sqrt{\frac{\cos 150}{\cos 150 - \cos^2 105}}$$

$$\cong 0{,}96$$

Sur SB et SC :

$$r2 = r3 = \sqrt{\frac{\cos 105}{\cos 105 - \cos 105 \cos 150}}$$

≅ 0,73 (rapports égaux, d'où le nom de dimétrique)

Les figures 7 et 8 représentent en perspective dimétrique un cube et un vé de traçage.

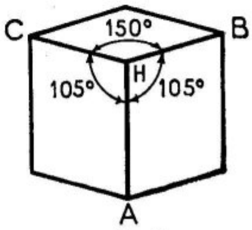
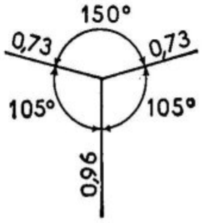


Fig. 7.



Perspective dimétrique.

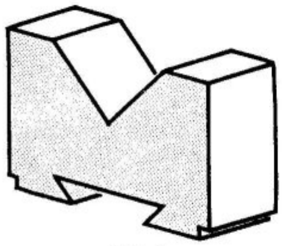


Fig. 8.

3° Perspective trimétrique.

Dans cette perspective, les trois arêtes du trièdre de référence sont inégalement inclinées sur le tableau. Donc :

≠ ≠

On choisit = 105°, = 120°, = 135°.

Les trois faces de l'objet à représenter sont donc traitées avec des importances différentes.

Les rapports de réduction, qui sont différents (d'où le nom de trimétrique), valent respectivement :

sur SA, r1 ≅ 0,65.

Sur SB, r2 ≅ 0,86.

Sur SC, r3 ≅ 0,92.

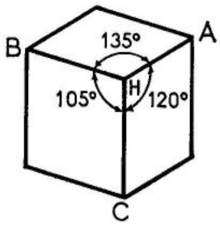
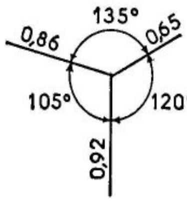


Fig. 9.



Perspective trimétrique.

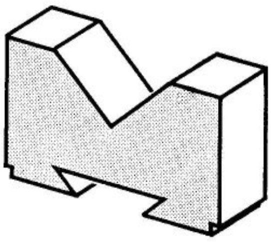


Fig. 10.

Les figures 9et 10 représentent en perspective trimétrique un cube et un vé de traçage.

EXERCICES

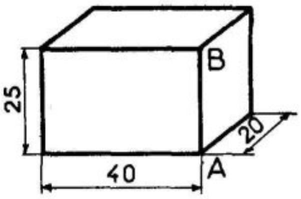


Fig. 11.

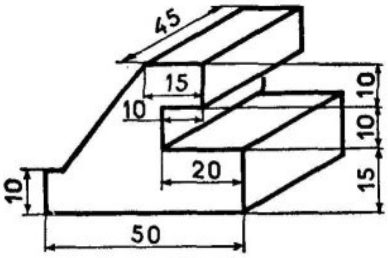


Fig. 12.

390. - On veut dessiner en perspectives isométrique, dimétrique et trimétrique le parallélépipède rectangle représenté en perspective cavalière (fig. 11), l'arête AB étant représentée verticalement.

Calculer dans chacun des cas les dimensions des arêtes AB, AC, AD sur le dessin, puis exécuter les trois dessins.

391. - Représenter en perspective isométrique la pièce (fig. 12).

392. - Représenter en perspective dimétrique une pyramide ayant pour base un carré de 40 mm de côté et dont le sommet, qui se projette orthogonalement sur la base au centre de celle-ci, en est distant de 50 mm.

393. - En appliquant au triangle HAB (fig. 3) le théorème relatif au carré du côté opposé à un angle, établir la relation :

$$\cos = \quad tga\ tgb$$

24. - APPLICATIONS DES PROJECTIONS ORTHOGONALES

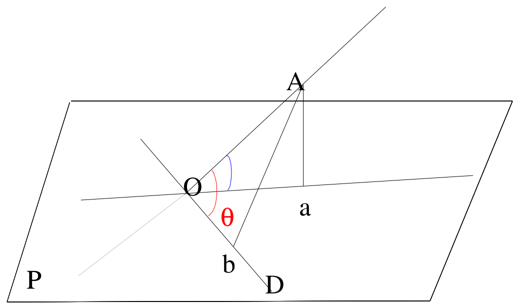
1. ANGLE D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

1. Étude des angles formés par une droite Δ et les différentes droites d'un plan P.

Nous distinguerons trois cas suivant que Δ est oblique, parallèle ou perpendiculaire au plan P.

1° La droite est oblique au plan P.

Soit O le point où la droite Δ perce le plan P ; il suffit de comparer les angles que fait la droite Δ avec toutes les droites du plan P issues de O.
Par le point O, menons une droite quelconque D du plan P (fig. 1). Soit a la projection orthogonale, sur P, d'un point A de Δ : la droite Oa est la projection orthogonale de Δ sur P.
Désignons par   l'angle aigu que fait Δ avec sa projection sur P et par θ l'angle aigu des droites



Δ et D. Comparons   et θ. Pour cela, sur la droite D, portons Ob tel que Ob = Oa.
Ab étant oblique au plan P,

$$Aa < Ab.$$

Les triangles OAa et OAb ont deux côtés respectivement égaux : OA commun, Oa = Ob, par construction.
Puisque Aa < Ab, on en déduit que AÔa < AÔb (Classe de 4e).
Donc : **le plus petit des angles que fait une droite oblique à un plan avec les droites de ce plan, est l'angle aigu qu'elle fait avec sa projection orthogonale sur le plan.**

2° La droite Δ est parallèle au plan P (ou contenue dans P).
Le résultat précédent reste valable car **l'angle   que fait Δ avec sa projection sur P est nul** ; il est donc inférieur à tout autre angle θ qu'elle forme avec une droite quelconque du plan P.

3° La droite Δ est perpendiculaire au plan P.
Le résultat précédent ne s'applique pas ici : l'angle de Δ avec toute droite du plan P est égal à un droit.

2. Angle d'une droite et d'un plan. Définition.
L'angle d'une droite Δ et d'un plan P est le plus petit angle que fait Δ avec les diverses droites du plan P.
De l'étude précédente, il résulte que :
Si Δ est oblique au plan P, l'angle de Δ et de P est l'angle aigu que fait Δ avec sa projection

orthogonale sur P.
Si Δ est parallèle au plan P (ou contenue dans P), l'angle de Δ et de P est nul.
Si Δ est perpendiculaire au plan P, l'angle de Δ et de P est égal à un droit.

3. Remarques.
1° L'angle d'une droite Δ avec un plan P est égal à l'angle de Δ avec tout plan parallèle à P.
2° Si deux droites sont parallèles, elles font le même angle avec un plan donné.
3° Dans le triangle rectangle AOa (fig. 1), les angles AÔa et OÂa sont complémentaires ; d'où l'énoncé suivant qui convient d'ailleurs à tous les cas :
l'angle d'une droite et d'un plan est le complément de l'angle aigu que forme cette droite avec une perpendiculaire au plan.
4° Si une droite Δ fait un angle   avec un plan P, un segment AB porté par Δ se projette orthogonalement sur P suivant ab (fig. 2) tel que : ab = AB cos .

4. Pente d'une droite par rapport à un plan. Définition.
La pente d'une droite par rapport à un plan est la tangente trigonométrique de l'angle de la droite et du plan.
Ainsi, **la pente de la droite Δ par rapport au plan P est p = tga = aA/Oa**
Si la droite Δ est parallèle au plan P, sa pente est nulle (réciproque exacte).
Si la droite Δ est perpendiculaire au plan P, sa pente est infinie (réciproque exacte).
Si deux droites Δ et Δ' sont parallèles, elles ont même pente par rapport au plan P (réciproque inexacte en général).
Cette définition correspond à la notion ordinaire de pente d'une droite (ou de l'axe d'une route rectiligne), le plan P étant alors horizontal.
Dire que la pente d'une route est 6 %, c'est dire que si Oa = 100 m, on a Aa = 6 m. On monte (ou l'on descend) de 6 m pour un déplacement horizontal de 100 m.[1]

II. LIGNES DE PLUS GRANDE PENTE D'UN PLAN PAR RAPPORT A UN AUTRE PLAN

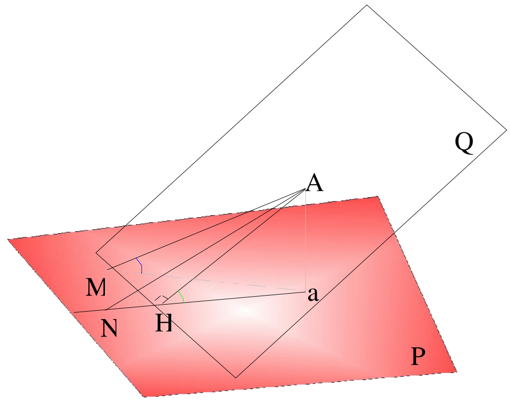
5. Étude des angles que forment les droites d'un plan Q avec un autre plan P.
Nous distinguerons trois cas suivant que P et Q sont sécants, mais non perpendiculaires ; P et Q sont perpendiculaires ; P et Q sont parallèles.

1° P et Q sécants et non perpendiculaires.

1 Note de la présente éditrice : Ce n'est pas tout à fait exact : comme il est difficile sur le terrain de connaître directement la distance horizontale, on la remplace par la distance parcourue sur le plan incliné, donc on prend le sinus de l'angle et non sa tangente ; pour des angles petits, la différence entre la tangente et le sinus est très faible.

Deux droites parallèles du plan Q formant le même angle avec le plan P, il suffit de considérer les droites du plan Q menées par un de ses points, soit A.
Désignons par D l'intersection des plans P et Q, par AH la perpendiculaire à D, par AM une droite quelconque du plan Q rencontrant D en M (fig. 3).
Soit a la projection de A sur le plan P. D'après le théorème des trois perpendiculaires, aH est perpendiculaire sur D. Donc : aH < aM.

Prenons le point N sur le prolongement de aH tel que aN = aM.
Les triangles rectangles AaN et AaM sont égaux. Par suite AMa = ANa.
L'angle AHa est un angle extérieur au triangle ANH.
Donc :
AHa = ANa + NAH
AHa > ANa
ou AHa > AMa
ou $> \theta$.



Ainsi : **de toutes les droites du plan Q menées par A, celle qui fait le plus grand angle avec le plan P est la perpendiculaire à leur intersection.**

2° P et Q sont perpendiculaires.
La droite menée par A perpendiculairement à l'intersection des plans P et Q, est perpendiculaire au plan P. Toute autre droite menée par A dans le plan Q fait un angle aigu avec le plan P. Le résultat précédent reste donc valable.

3° P et Q sont parallèles.
Toutes les droites du plan Q font un angle nul avec le plan P.

6. Lignes de plus grande pente d'un plan par rapport à un autre plan.
La pente de la droite AH par rapport au plan P est:

$$\text{tg} \quad = \text{aA/aH}$$

La pente de la droite AM est : tg θ =aA/aM
Or, aH < aM.

Par suite tg $> \text{tg}\ \theta$.

D'où la définition : **une ligne de plus grande pente d'un plan Q par rapport à un plan P sécant, est une droite du plan Q perpendiculaire à l'intersection des deux plans.**
Cette définition s'applique également au cas des plans perpendiculaires.
L'expression lignes de pente peut être utilisée pour lignes de plus grande pente.

7. Angle de deux plans.

Nous avons donné, 16e leçon, la définition de l'angle de deux plans sécants. Il est aisé de montrer que **l'angle de deux plans sécants est égal à l'angle que fait une ligne de pente de l'un des plans avec l'autre.**
Par convention, l'angle de deux plans parallèles est nul.

8. Pente d'un plan par rapport à un autre plan. Définition.
La pente d'un plan par rapport à un autre plan est la tangente trigonométrique de l'angle de ces deux plans.
Si les plans sont parallèles, = 0, la pente de l'un des plans par rapport à l'autre est nulle (réciproque exacte).
Si les plans sont perpendiculaires, = 90°, la pente de l'un des plans par rapport à l'autre est infinie (réciproque exacte).
Lorsque deux plans sont parallèles, ils font le même angle avec un troisième plan ; ils ont donc la même pente par rapport à ce plan (réciproque inexacte).

EXERCICES

394. - Démontrer que l'angle de deux plans est égal à l'angle aigu de deux droites qui leur sont respectivement perpendiculaires.

395. - Dans la figure 1 (§ 1), soit l'angle aÔb ; démontrer que cos θ = cos . cos . Examiner ensuite le cas où l'angle D tend vers 90°.

396. - Soit A un point extérieur à un plan P. Désigner par D une droite variable passant par A et faisant un angle donné avec P. Quel est le lieu du point d'intersection du plan P et des droites D ?

397. - Une oblique à un plan P le coupe en O. Mener par O, dans le plan P, une droite faisant avec l'oblique un angle donné.

398. - Démontrer que la somme des angles que fait une droite avec deux plans perpendiculaires est au plus égale à un angle droit.

399. - Un triangle équilatéral se projette sur un plan P passant par un de ses côtés suivant un triangle rectangle. Démontrer que ce triangle rectangle est isocèle. Calculer l'angle du plan P et du plan du triangle équilatéral.

400. - Même exercice que le précédent en supposant que le triangle équilatéral se projette sur P suivant un triangle isocèle dont un angle mesure 120°.

401. - Soient P et Q deux plans sécants ; désigner par O un point de leur intersection.

1° M étant un point de l'espace, montrer que si la droite OM fait des angles égaux avec P et Q, M est équidistant de ces plans. Réciproque.
2° Lieu des droites issues d'un point A fixe et faisant des angles égaux avec les plans P et Q ?
3° Construire les droites passant par A et formant des angles égaux avec trois plans donnés.

402. - On donne une droite D et un plan P. Mener un plan Q, passant par D, connaissant l'angle des plans P et Q.

403. - On donne deux plans sécants P et Q, un point O dans le plan P. Mener par O, dans le plan P, une droite faisant un angle donné avec le plan Q.

404. - On donne un cercle (O, R) d'un plan P, et un point A sur ce cercle. Par A, on mène un segment AB = 2 R qui se projette sur P suivant la tangente en A au cercle, et qui fait un angle de 60° avec le plan. Soit X l'axe du cercle (c'est-à-dire la perpendiculaire en O au plan P). Calculer :
1° la distance de B à X ;
2° l'angle des plans (X, A) et (X, B).

405. - On donne un point O d'un plan P, un point A extérieur à ce plan tel que OA = a et OA fait un angle de 60° avec le plan P. Dans P on mène la demi-droite Ox qui fait un angle de 45° avec la projection de OA. Calculer la distance du point A à Ox. Application numérique : a = 4 cm.

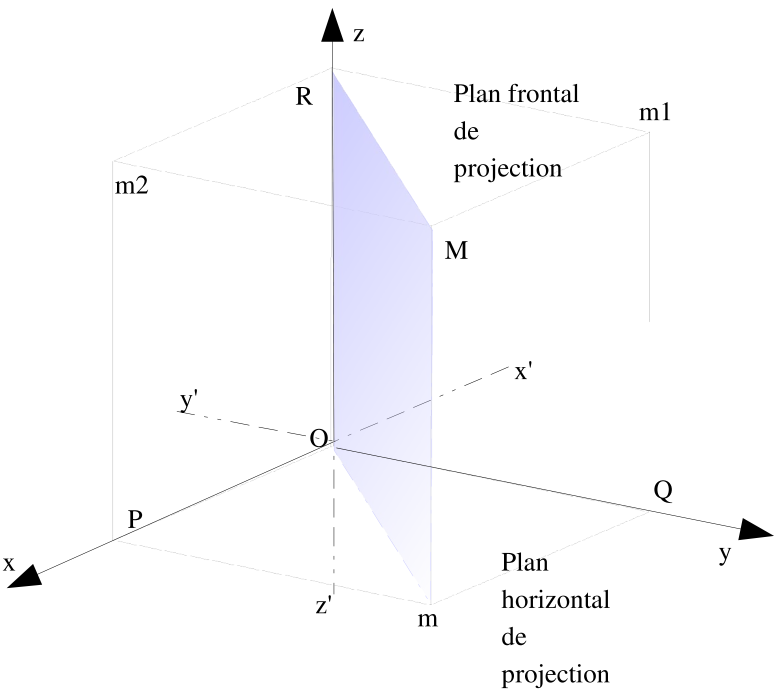
406. - On donne deux droites orthogonales X, Y, et leur perpendiculaire commune OI = d (O sur X, I sur Y). Sur X, de part et d'autre de O, on marque les points A et B tels que
OA = a et OB = b.
1° Soit H la projection de B sur le plan (A, Y). Démontrer que les points A, I, H sont alignés. Calculer, en fonction de a, les longueurs AI, AH, HI pour $b = 2a$ et $d = a\sqrt{3}$.
2° On joint le point A à un point variable M de Y. Trouver le lieu de la projection de B sur la droite AM.
3° A chaque point M de Y correspond un point N de Y tel que les droites AM et BN soient orthogonales :
a) construire géométriquement le point N ;
b) démontrer que les droites AN et BM sont aussi orthogonales.
4° Le point M se déplaçant sur Y, prouver que le produit des mesures algébriques IM. IN reste constant; calculer ce produit, en fonction de a, pour $b = 2\ a$ et $d = a\ \sqrt{3}$.

25. - GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

ÉPURE D'UN POINT

Pour pouvoir représenter sur un plan, par exemple celui d'une feuille de papier, un ensemble de points et de droites n'appartenant pas à un même plan, il est indispensable de faire un certain nombre de conventions.
Nous allons donner ici quelques notions relatives à un système de conventions, dit géométrie descriptive à deux plans de projection, dont le créateur est Gaspard Monge, géomètre français (1746-1818).
Ces notions seront complétées dans le Cours de Première.

1. Repère cartésien orthonormé (géométrie dans l'espace).
Nous allons le définir de la même manière qu'un repère cartésien orthonormé dans le plan (Algèbre, Cl. de Seconde).
Soit un trièdre trirectangle Oxyz (fig. 1). Considérons les axes x'x, y'y et z'z et prenons sur ces axes, d'origine commune O, des vecteurs unitaires de même module : nous obtenons un repère cartésien



orthonormé.

1° Étant donné un point quelconque M de l'espace, désignons par :
m, sa projection orthogonale sur le plan xOy,
R, sa projection orthogonale sur l'axe Oz,
puis par
P, la projection orthogonale de m sur l'axe x'x.

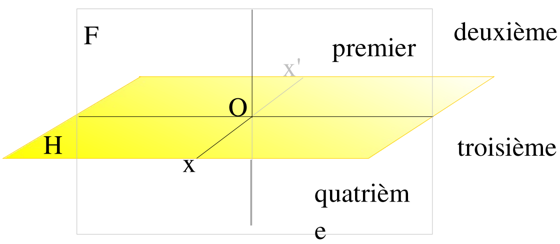
Q, la projection orthogonale de m sur l'axe y'y.
Par définition, les coordonnées de M sont en valeurs algébriques :
x = OP est l'abscisse de M
y = OQ est l'ordonnée de M
z = OR est la cote de M.

2° Réciproquement, donnons-nous trois nombres réels x, y et z.
Au couple (x, y) correspond un point m, unique du plan xOy.
Au nombre z correspond un point R, unique, de l'axe z'z.
Le plan mené par R, parallèlement au plan xOy, coupe la droite menée par m, parallèlement à l'axe z'z, en un point M, bien déterminé.

Conclusion. L'espace étant rapporté à un repère cartésien orthonormé :
l° A tout point de l'espace, on peut associer un triplet unique de nombres réels x, y, z : ce sont les coordonnées du point considéré.
2° Réciproquement, à tout triplet (x, y, z) de nombres réels correspond un point et un seul ayant x pour abscisse, y pour ordonnée et z pour cote.

2. Plans de projection.
Considérons un point M, de coordonnées (x, y, z) dans un repère orthonormé.
Soit m la projection de M sur le plan xOy et m1 la projection de M sur le plan yOz.
Les coordonnées de m dans le repère xOy sont x et y, et celles de m1, dans le repère yOz sont y et z.
Par définition, le plan xOy s'appelle **plan horizontal de projection,** le plan yOz s'appelle **le plan frontal de projection** ; la droite y'y d'intersection de ces deux plans est **la ligne de terre.**
Remarquons que si, dans les dessins, le plan xOy paraît physiquement horizontal (ce qui fait paraître vertical le plan yOz), cette disposition n'a aucun caractère obligatoire : il est seulement nécessaire que ces deux plans soient perpendiculaires.

Remarques.
1° Les deux plans de projection H et F partagent l'espace en 4 dièdres. Chacun d'eux est un ensemble de points que l'on désigne conventionnellement comme suit :
premier dièdre : x > 0 et z > 0
deuxième dièdre : x < 0 et z < 0
troisième dièdre : x < 0 et z < 0
quatrième dièdre : x > 0 et z < 0.



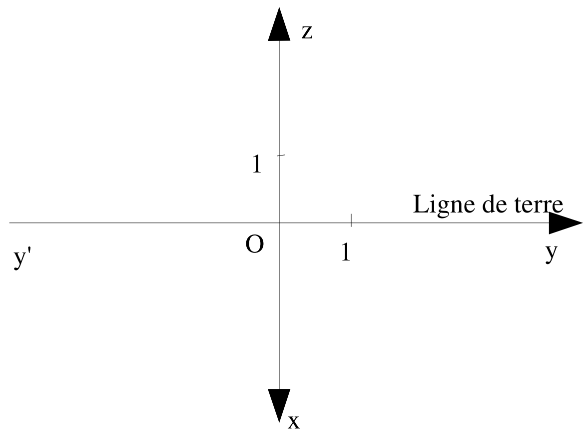
2° Éloignement et cote d'un point.
L'abscisse x d'un point M porte également le nom d'éloignement.

Tout point d'éloignement nul appartient au plan frontal de projection ; tout point de cote nulle appartient an plan horizontal de projection.

3. Convention fondamentale de la géométrie descriptive.

Les deux plans de projection se représentent sur la même feuille de papier en faisant la convention suivante :

les repères xOy et yOz sont tels que le demi-axe positif Oz coïncide avec le demi-axe négatif Ox'.



4. Épure d'un point.

1° Tout point de l'espace étant caractérisé par les trois nombres x, y, z :

la donnée (x, y) détermine dans le repère xOy le point m ; la donnée (y, z) détermine dans le repère yOz le point m'.

Les points m et m' sont situés sur une même perpendiculaire à la ligne de terre.

2° Inversement, la donnée de deux points m et m', situés sur une même perpendiculaire à la ligne de terre détermine les trois nombres x, y, z, donc le point M de l'espace.

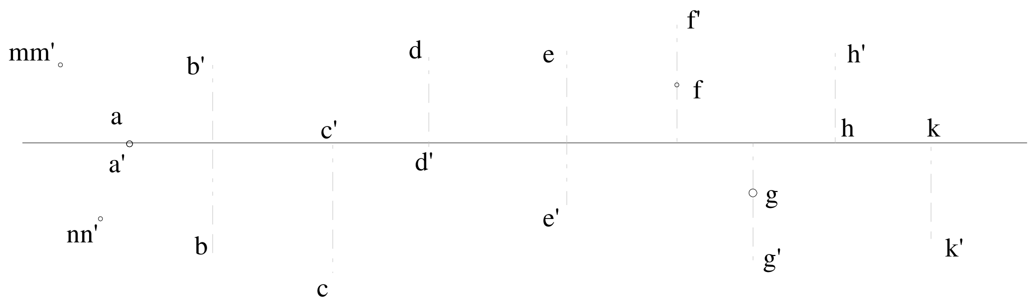
On appelle épure d'un point l'ensemble de deux points (distincts ou confondus) situés sur une même perpendiculaire à la ligne de terre.

Cette perpendiculaire est une **ligne de rappel**. Le point m s'appelle la projection horizontale du point M de l'espace, le point m' s'appelle sa projection verticale.

(m, minuscule correspondant à M, m', même minuscule accentuée).

5. Exemples d'épures de points.

La figure 6 représente les épures de divers points.



A est situé sur la ligne de terre.
B est situé dans le premier dièdre.
C et D sont situés dans le plan horizontal de projection.
E est situé dans le troisième dièdre.

F est situé dans le deuxième dièdre.
G est situé dans le quatrième dièdre.
H et K sont situés dans le plan frontal de projection.

6. Points appartenant aux plans bissecteurs des dièdres.

On désigne par premier bissecteur le plan bissecteur des premier et troisième dièdres et par deuxième bissecteur celui des deuxième et quatrième dièdres.

1° Premier bissecteur : c'est l'ensemble des points dont l'éloignement x et la cote z sont égaux.
Par suite, les projections d'un point de ce plan sont, sur l'épure, symétriques par rapport à la ligne de terre (fig. 7).

2° Deuxième bissecteur : c'est l'ensemble des points dont l'éloignement x et la cote z sont opposés.
Par suite, les projections d'un point de ce plan sont, sur l'épure, confondues (points M et N de la figure).

EXERCICES

Sur une feuille de papier (format 21 x 29,7), prendre pour ligne de terre y'y le petit axe de la feuille et pour axes Ox et Oz son grand axe. L'unité de longueur étant le centimètre, construire les épures des points ci-dessous.

407. A (x = 4, y = -2, z = 5) ; B (x = 2, y = 0, z = - 6) ; C (x = 0, y = 5, z = 7) ; D (x = 6, y= 4, z = 0).

408. A (0, 0, 5) ; B (7, 0, 0) ; C (0, -6, 0). Ces points sont-ils situés dans des plans remarquables ? Lesquels ?

409. A (5, -3, 5) ; B (-6, 2, -6) ; C (3, 4, 3) ; K (5, 1, 5).
Ces points sont-ils situés dans des plans remarquables ? Lesquels ?

26. - GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE
ÉPURE D'UNE DROITE

1. Épure d'une droite.

La projection orthogonale d'une droite sur un plan est, sauf dans le cas où cette droite est perpendiculaire au plan, une droite (20e leçon); les deux projections d'une droite sur les plans de projection sont donc, en général, des droites.

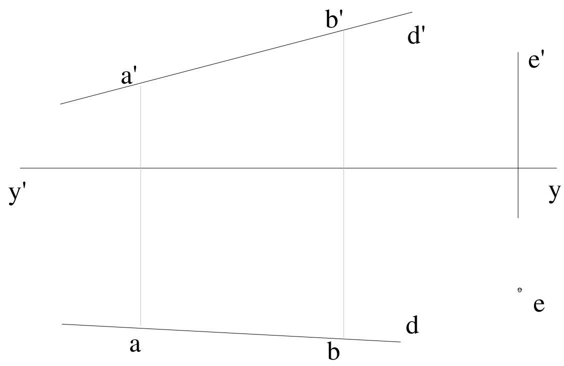
Par suite, l'épure d'une droite est, en général, l'ensemble de deux droites distinctes.

Puisque deux points distincts déterminent une droite, et une seule, l'épure d'une droite peut être tracée quand on connaît l'épure de deux de ses points.

Exemple : Épure de la droite AB déterminée par les points A(x = 5, y = - 4, z = 3) et B(x = 6, y = 5, z = 5).

La projection d'une droite D, sur le plan horizontal de projection H, s'appelle la projection horizontale d de la droite D.

De même, la projection de D sur le plan frontal de projection F s'appelle la projection frontale d' de la droite D.



2. Cas d'exception.

1° L'une des projections de la droite n'est pas une droite. C'est le cas où la droite est perpendiculaire à un plan de projection : plan horizontal, ou plan frontal.

a) **Droite perpendiculaire au plan horizontal de projection : une telle droite est dite verticale.**

Son épure est donc constituée par un point e en projection horizontale et par une droite en projection frontale (cette droite coïncide avec la ligne de rappel d'un point quelconque).

Tout segment d'une verticale se projette frontalement en vraie grandeur.

b) **Droite perpendiculaire au plan frontal de projection : une telle droite est dite de bout.**

Cette dénomination indique qu'une telle droite est supposée vue par le bout, d'où l'écriture « de bout » en deux mots.

Son épure est donc constituée par un point b' en projection frontale et par une droite en projection horizontale (cette droite coïncide avec la ligne de rappel du point b).

Tout segment d'une droite de bout se projette horizontalement en vraie grandeur.

2° Les deux projections de la droite sont confondues.

a) La droite donnée est orthogonale à la ligne de terre.

Une telle droite est dite **de profil** et ses deux projections sont confondues. Son épure est constituée par une ligne de rappel ; mais la donnée de cette ligne de rappel ne suffit pas à déterminer la droite.

Pour déterminer celle-ci (fig. 4), il faut connaître l'épure de deux de ses points, par exemple :
A(x = 3, y = 2, z = 4) et B (x = 5, y = 2, z = 1)

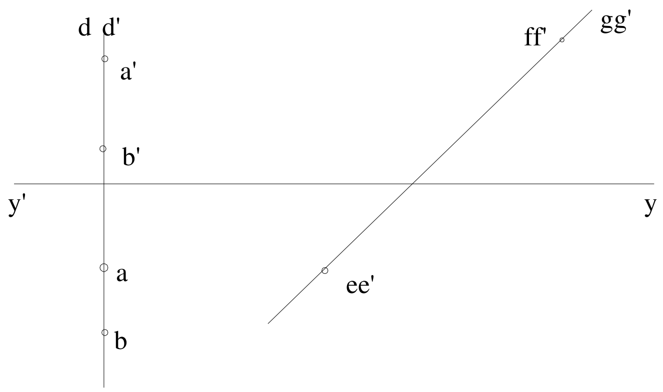
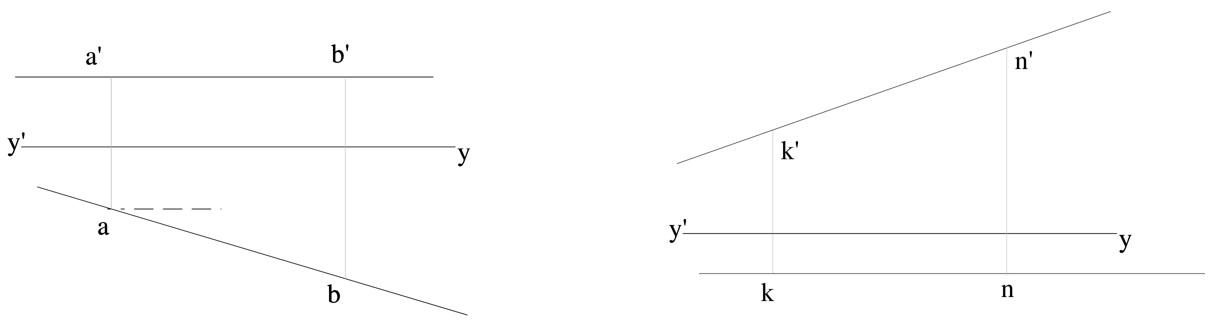


Fig. 4. - Épure de la droite de profil AB. ;
Epure de la droite EF appartenant au deuxième bissecteur.

b) Puisqu'un point du second bissecteur a ses projections confondues, il en sera de même d'une droite contenue dans ce plan.
Exemple : la droite EF, définie par les points
E (x = 2, y = -5, z = - 2) et F (x = -3, y = 1, z = 3).

3. Droites remarquables.
Certaines droites, en raison de la position particulière qu'elles occupent par rapport aux plans de projection, sont douées de propriétés remarquables.
1° Droite horizontale : c'est une droite parallèle au plan horizontal de projection.
Exemple : Droite passant par les points :
A (x = 3, y = - 4, z = 2) et B (x = 5,y = 3, z = 2).
a) Tous les points d'une horizontale ayant la même cote, sa projection frontale est parallèle à la ligne de terre.
b) Tout segment AB d'une horizontale se projette horizontalement en vraie grandeur (ab).
c) L'angle est la vraie grandeur de l'angle de l'horizontale AB avec le plan frontal de projection.



Epure de l'horizontale AB et de la frontale KN.

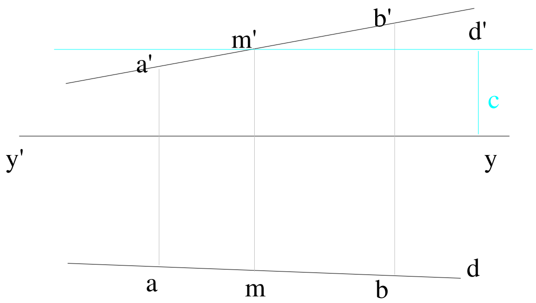
2° Droite frontale : c'est une droite parallèle au plan frontal de projection.

Exemple : Droite passant par les points :
K (x = 3, y = - 3, z = 1) et N (x = 3, y = 5, z = 6).
a) Tous les points d'une frontale ayant le même éloignement, sa projection verticale est parallèle à la ligne de terre.
b) Tout segment KN d'une frontale se projette frontalement en vraie grandeur (k'n').
c) L'angle de la projection frontale avec la ligne de terre est la vraie grandeur de l'angle de la frontale KN avec le plan horizontal de projection.

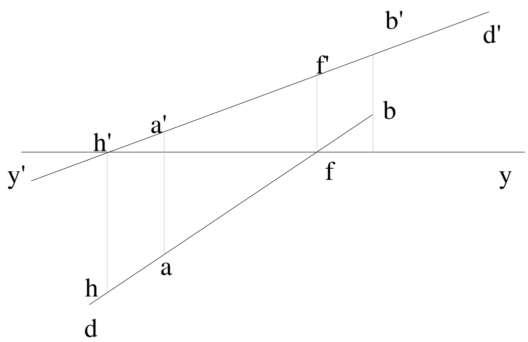
4. Problèmes relatifs à la droite (l'épure de celle-ci étant connue)

1° Construire l'épure d'un point d'une droite D connaissant la cote (ou l'éloignement) de ce point.
Soit à construire, sur la droite (d, d'), le point M de cote c. Si M existe, sa projection frontale m' est à l'intersection de d' et de la parallèle x' à la ligne de terre, à la cote c.

Donc, si D est horizontale, le point m' est indéterminé, ou n'existe pas. Mais, si D n'est pas horizontale, le point m' est bien déterminé. La projection m s'obtient en traçant la ligne de rappel de m'.
Solution analogue connaissant l'éloignement du point M.



2° Construire les traces d'une droite.
On appelle traces d'une droite ses intersections avec les plans de projection :
la trace horizontale est l'intersection avec le plan horizontal ; la trace frontale est l'intersection avec le plan frontal.

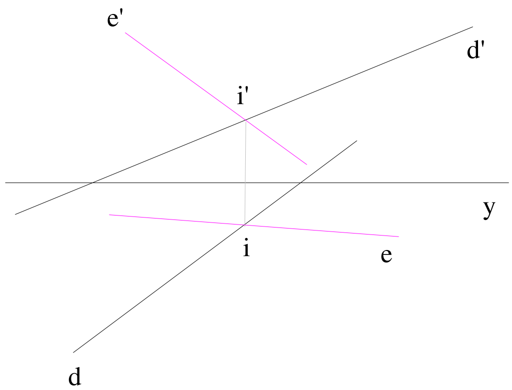


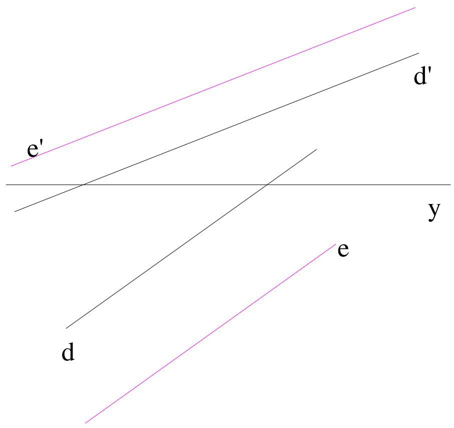
En remarquant que la trace horizontale (h,h') d'une droite est le point de cette droite dont la cote c est nulle, on se ramène au problème ci-dessus.
De même, la trace frontale (f,f') d'une droite est le point de cette droite dont l'éloignement est nul.

Remarques.
a) Les deux problèmes précédents, mais concernant des droites de profil, seront étudiés en Classe de première.
b) Il est clair qu'une horizontale ne possède pas de trace horizontale et qu'une frontale ne possède pas de trace frontale.

5. Reconnaître, sur une épure, quelle est la position relative de deux droites.
Dans l'espace (voir 10e leçon), deux droites distinctes peuvent avoir un point commun (elles sont dites sécantes) ou ne pas avoir de point commun. Dans ce dernier cas, elles peuvent être dans un même plan (droites parallèles) ou ne pas être dans le même plan (droites quelconques). Il s'agit de distinguer ces divers cas, les droites étant données par leurs épures.
(Le cas des droites de profil sera étudié en Classe de première).

1° Droites sécantes D. et E : leur point d'intersection I a une projection horizontale (resp. frontale) commune aux projections horizontales (resp. frontales) des droites.





Réciproquement, si les projections de même nom des deux droites se coupent sur une même ligne de rappel, ces droites sont sécantes.
Donc :
pour que deux droites (non de profil) soient sécantes, il faut et il suffit que les projections de même nom se coupent sur la même ligne de rappel.

2° Droites parallèles D et E. Remarquons d'abord que les droites verticales, ou les droites de bout, ou les droites parallèles à la ligne de terre, sont parallèles.
Supposons D et E parallèles, mais non perpendiculaires à un plan de projection. Leurs projections horizontales sont parallèles, ainsi que leurs projections frontales (deux projections de même nom, mais deux seulement, pouvant être confondues).
Réciproquement, si les projections de même nom sont parallèles, les droites de l'espace, qui sont situées dans les plans projetant horizontalement et frontalement ces droites, sont parallèles.
Donc :
pour que deux droites (non de profil) soient parallèles, il faut et il suffit que leurs projections de même nom soient parallèles (ou éventuellement confondues pour deux projections de même nom).

EXERCICES

410. - Épure de la droite AB dans les cas suivants :
A(x = 7, y = -3, z = 2) ; B(x = 2, y = 3, z = 5).
A(x = 1, y =-5, z = 4) ; B(x = 5, y= -7, z = 6).
A(x = 2, y = 4,z = 6) ; B(x = 4, y = -2, z = 5).

411. - Épures des verticales passant par les points suivants :
A(x = 2, y= -5, z = 3) ; B(x = 5, y = -2, z = 6).

412. - Épures des droites de bout passant par les points suivants :
C (x = 4, y = 0, z = 7) ; D (x = 2, y = 5, z = 6).

413. - Épure de l'horizontale passant par les points A et B :
A (x = 7, y = 2, z = 3) ; B (x = 5,y = -3).

414. - Épure de la frontale passant par les points A et B :
A (4, -2, 5) ; B (y =-4, z = 2).

415. - Épure de la droite de profil AB avec : A (5, 3, 2) et B (7, 3, 1)

416. - Construire, sur la droite AB, les points Q de cote 4 et S d'éloignement 6, connaissant :
A (2, - 7, 5) ; B (3, 5, 6).

417. - Mener, par le point C (2, 5, 6) la parallèle à la droite AB : A (4, 0, 5) et B (2, -3, 1).

418. - Construire les traces des droites AB et CD suivantes :
A (1, - 3, 4) et B (6, -3, 4) ;
C (6, 0, 1) et D (3, 3, 1).

27. - GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE : ÉPURE D'UN PLAN

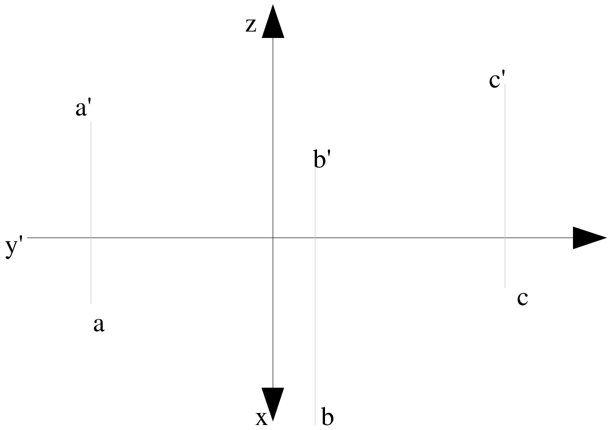
1. Épure d'un plan.

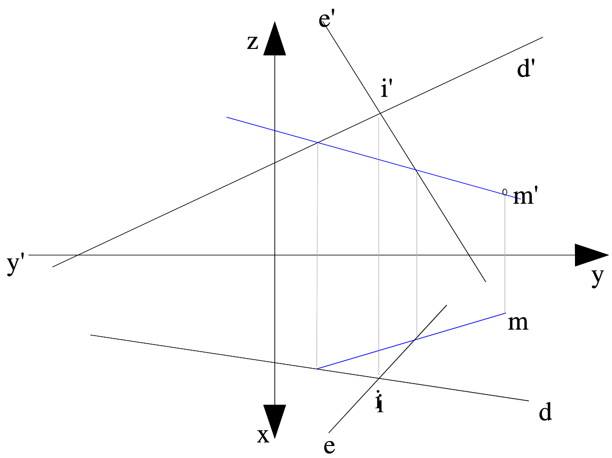
Comme on l'a vu (9e et 10e leçons), un plan peut être déterminé : par trois points non alignés, ou par deux droites sécantes, ou par une droite et un point non situé sur cette droite, ou par deux droites parallèles (chacun de ces cas se ramenant aisément aux trois autres).

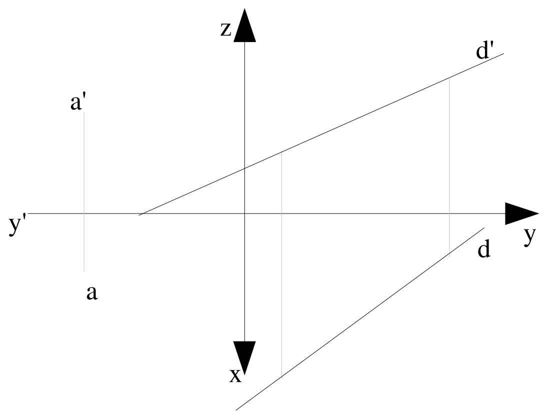
Il en résulte que :

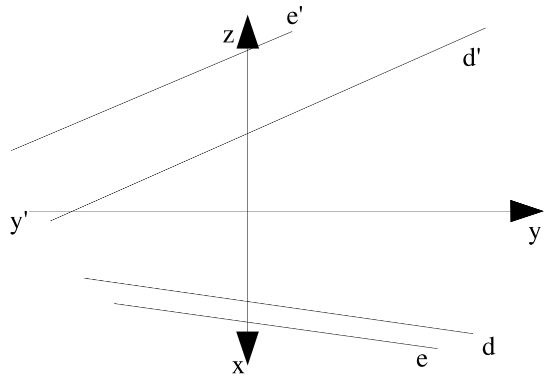
lorsqu'on se donne les épures de trois points A, B, C non alignés (fig. 1), on obtient l'épure du plan (ABC) ;

lorsqu'on se donne les épures de deux droites sécantes D, et E, on obtient l'épure du plan (D, E) ;









lorsqu'on se donne les épures d'un point A et d'une droite D, ne passant pas par A on obtient l'épure du plan (A, D);

lorsqu'on se donne les épures de deux droites parallèles D et E, on obtient l'épure du plan (D, E).

2. Problèmes relatifs au plan (l'épure de celui-ci étant connue).

1° Construire l'épure d'un point M d'un plan (P) connaissant une projection de ce point.

Supposons, par exemple, connue la projection horizontale m du point M, appartenant au plan (P) déterminé par les droites sécantes D, et E (voir figure plus haut).

Traçons par m une droite (bleue) coupant d et e, ces points se rappelant sur les projections frontales d' et e'. La droite bleue appartient au plan (P) : pour obtenir m', il suffit de rappeler m sur cette droite.

2° On remarquera que le problème résolu ci-dessus permet également :

a) de dessiner l'épure d'une droite d'un plan connaissant une projection de cette droite ;

b) de reconnaître si un point donné appartient à un plan donné ;

c) de trouver l'intersection d'un plan quelconque avec une droite verticale ou de bout (car l'une des projections du point d'intersection cherché est donnée).

3. Droites principales d'un plan.

Ce sont les horizontales et les frontales de ce plan.

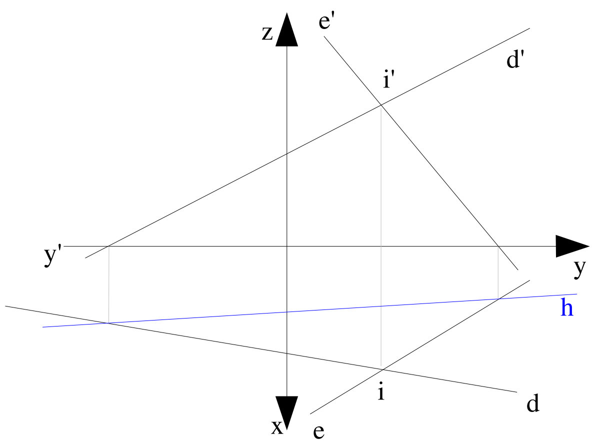
En particulier, l'horizontale de cote nulle (ou intersection du plan avec le plan horizontal de projection) s'appelle la **trace horizontale** de ce plan.

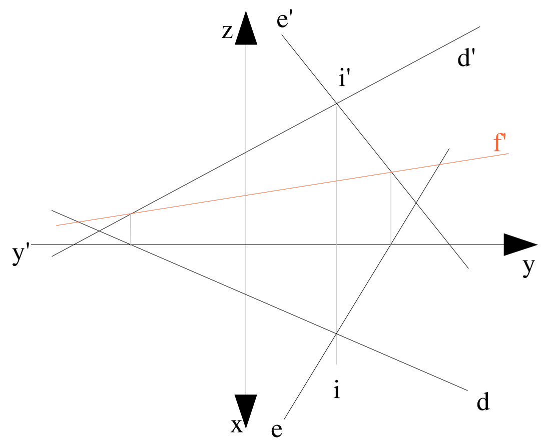
De même, la frontale d'éloignement nul (ou intersection du plan avec le plan frontal de projection) s'appelle la **trace frontale** de ce plan.

Ainsi que le montrent les exemples ci-dessous, les problèmes relatifs à ces droites se ramènent aux précédents.

Exemples : Dans un plan défini par trois points A, B, C, construire l'horizontale de cote 4, puis la trace horizontale du plan.

Dans un plan défini par deux droites sécantes D et E, construire la frontale dont la projection horizontale est donnée, puis la trace frontale de ce plan.





Remarque.

Les deux exemples précédents montrent la construction des traces d'un plan.

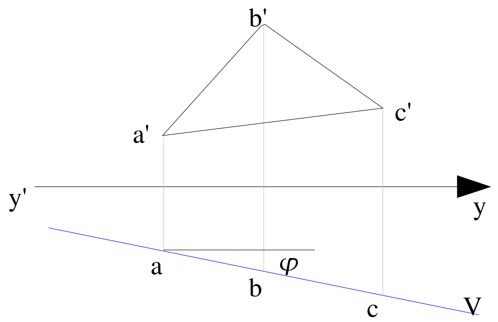
Un plan est déterminé par ses traces (cas particulier de la détermination d'un plan par deux droites concourantes, qui sont ici les intersections du plan avec les plans de projection).

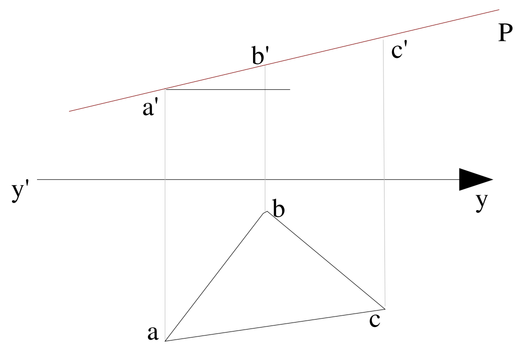
4. Plans remarquables.

Certains plans, en raison de la position particulière qu'ils occupent par rapport aux plans de projection, sont doués de propriétés remarquables.

1° Plan vertical : c'est un plan perpendiculaire au plan horizontal de projection.

a) Tous les points d'un plan vertical se projettent horizontalement sur cette trace, inversement, la donnée de cette droite détermine le plan.
Exemple : le plan ABC, voir ci-après à gauche.
b) Les frontales d'un plan vertical sont des verticales.
c) L'angle φ est la vraie grandeur de l'angle du plan vertical et du plan frontal de projection.





2° Plan de bout : c'est un plan perpendiculaire au plan frontal de projection.

a) Tous les points d'un plan de bout se projettent frontalement sur cette trace ; inversement, la donnée de cette droite détermine le plan.
Exemple : le plan ABC ci-dessus à droite.
b) Les horizontales d'un plan de bout sont des droites de bout.
c) L'angle α est la vraie grandeur de l'angle du plan de bout et du plan horizontal de projection.

3° Plan frontal : c'est un plan parallèle au plan frontal de projection.

Il est donc perpendiculaire au plan horizontal de projection : c'est un plan vertical particulier.
a) Un plan frontal est défini par son éloignement.
b) En projection frontale, une figure tracée dans un plan frontal est vue en vraie grandeur.
c) Toutes les droites d'un plan frontal sont des frontales.
d) Un plan frontal n'a pas de trace frontale.

4° Plan horizontal : c'est un plan parallèle au plan horizontal de projection.

Il est donc perpendiculaire au plan frontal de projection : c'est un plan de bout particulier.
a) Un plan horizontal est défini par sa cote.
b) En projection horizontale, une figure tracée dans un plan horizontal est vue en vraie grandeur.
c) Toutes les droites d'un plan horizontal sont des horizontales.

d) Un plan horizontal n'a pas de trace horizontale.

5° Plan de profil : c'est un plan perpendiculaire à la ligne de terre. L'épure d'un plan de profil est donc une droite perpendiculaire à la ligne de terre.
Les problèmes relatifs aux plans de profil seront étudiés en Classe de Première.

EXERCICES

419. - Épures des plans (ABC) et (DEF) déterminés par les données suivantes :
A (2, - 1, 5) ; B (3, 4, 2) ; C (4, -2, 6)
D (3, - 4, 2) ; E (1, 0, 4) ; F (2, 5, 1).

420. - Un plan P est déterminé par les points A, B, C :
A (3, - 4, 2) ; B (2, 1, 4) ; C (3, 0, 5).
1° Un point M de ce plan se projette horizontalement en m (x = 5, y = 2). Construire m'.
2° Un point N de ce plan se projette frontalement en n' (y = -4, z = 3). Construire n.

421. - Le point M (2, -1, 4) appartient-il au plan déterminé par les points :
A (3, - 4, 2) ; B (1, 0, 5) ; C (2, 3, 6) ?

422. - On donne le plan (P) déterminé par les points : A (2, -1, 4) ; B (1, 5, 3) ; C (4, 0, 5).
Déterminer
1° le point d'intersection de ce plan et de la droite verticale se projetant au point de coordonnées x = 3, y = 4 ;
2° le point d'intersection de ce plan et de la droite de bout se projetant au point de coordonnées : y = 2, z = 5.

423. - Dans le plan P défini par les points : A (3, 5, 1) ; B (2, - 2, 4) ; C (3, 0, 7), tracer :
1° l'horizontale de cote 2 ;
2° la frontale d'éloignement 5.
Déterminer ensuite les deux traces du plan P.

424. - Les traces horizontale et frontale Pμ et μQ' d'un plan sont telles que le point μ a pour ordonnée -5, les angles respectifs de ces traces avec la ligne de terre étant 30° et 45°.
1° Épure de l'horizontale de ce plan de cote 5 ?
2° Épure de la frontale de ce plan d'éloignement 4 ?

425. - Construire l'épure du triangle équilatéral situé dans le plan frontal d'éloignement 5, sachant que les coordonnées du centre de gravité sont y = 0, z = 3 et qu'un sommet du triangle a pour coordonnées y = 1, z = 2.

PROBLÈMES RELATIFS AU CHAPITRE III

426. - L'unité de longueur est le millimètre. On donne un triangle ABC :
BC = 40 ; CA = 35 ; AB = 55.
Un point O, extérieur au plan ABC, est tel que : OA = 90 ; OB = 80 ; OC = 70.
1° Après avoir dessiné le triangle ABC, préciser et construire la projection O' de O sur ABC.
2° Calculer les longueurs O'A, O'B, O'C et la distance du point O au plan du triangle ABC.

427. - Quel est le lieu des droites X issues d'un point A et faisant des angles égaux avec deux droites données D et E ?

428.- Quel est le lieu des droites issues d'un point A et faisant des angles égaux avec deux plans donnés?

429.- On donne une droite D et un point A extérieur à D. Quel est le lieu des droites X passant par A telles que la plus courte distance de D et de X soit donnée ?

430. - Quel est le lieu des droites issues d'un point A sur lesquelles deux segments donnés ont des projections égales ?

431. - Soient G, H, I, trois droites non coplanaires deux à deux et parallèles à un plan P.
Démontrer que toutes les droites X qui rencontrent G, H, I, sont parallèles à un même plan (on pourra projeter sur un plan perpendiculaire à H, par exemple).

432. - On donne un triangle ABC. Trouver le lieu des points M de l'espace tels que :
$MA^2 + BC^2 = MB^2 + CA^2 = MC^2 + AB^2$

433. - Soit OO' la perpendiculaire commune à deux droites orthogonales K et L (O sur K, O' sur L).
Un segment MN, de longueur constante a, se déplace de manière que M et N restent respectivement sur K et L.
1° Démontrer que la somme $OM^2 + O'N^2$ reste constante.
2° Démontrer que la somme $ON^2 + O'M^2$ reste constante.
3° Quelle est le quadrilatère dont les sommets sont les milieux de ON, OO', O'M, MN ?
4° Lieu du milieu de MN ?

434. - Quel est le lieu des points dont le rapport des distances à deux plans fixes est constant ? On examinera d'abord le cas où les deux plans donnés sont parallèles puis le cas où ils sont sécants (on pourra projeter sur un plan fixe perpendiculaire aux deux plans donnés).

435. - On donne un dièdre (P, AB, Q), un point C de P et un point D de Q tels que C et D soient équidistants de l'arête AB :

1° démontrer que les points C et D sont équidistants des plans Q et P ;
2° démontrer que la droite CD est également inclinée sur les plans P et Q ;
3° réciproque du 2°, puis du1°.
4° démontrer que la somme des distances d'un point variable M du segment CD aux plans P et Q reste constante.

436. - Soit D et E deux droites orthogonales, P le plan mené par E parallèlement à D. Trouver le lieu des points M du plan P dont la somme des carrés des distances aux deux droites D et E ait une valeur donnée k^2.

437. - 1° Démontrer que si un plan P coupe un dièdre droit suivant un angle droit, son intersection avec l'une des faces est perpendiculaire à l'arête du dièdre.
2° Démontrer que si deux droites perpendiculaires sont situées dans deux plans perpendiculaires, l'une de ces droites est perpendiculaire à l'intersection des deux plans.

438. - 1° On donne deux droites sécantes X, Y. Une des bissectrices de l'angle de ces droites est parallèle à un plan P. Démontrer que les projections des bissectrices de (X,Y) sur P sont les bissectrices de l'angle des projections de X et de Y sur P.
2° Réciproque du 1°.
3° On donne un dièdre (P, AB, Q) et une droite Oz perpendiculaire à AB et située dans le bissecteur de ce dièdre. Démontrer que tout plan passant par Oz coupe le dièdre suivant un angle dont Oz est la bissectrice.

439. - 1° Un plan P passe par le point d'intersection de deux droites sécantes X et Y. Démontrer que si X et Y font des angles égaux avec le plan P, ce plan P passe par l'une ou l'autre des bissectrices des deux droites données.
2° Réciproque du 1°.
3° On donne trois droites X, Y, Z concourantes en O et non situées dans un même plan. Construire un plan qui passe par O et qui fasse des angles égaux avec les trois droites données.

440. - On donne un cercle de centre O, un point fixe A de ce cercle et la perpendiculaire AB au plan du cercle. Soit MON un diamètre variable de ce cercle.
1° Soit BI (I sur MN) la ligne de plus grande pente du plan BMN par rapport au plan P du cercle ; lieu du point I ?
2° Comment choisir le diamètre MN de manière que la pente du plan BMN par rapport au plan P soit la plus petite possible ?
3° Généraliser en remplaçant le diamètre par une corde variable passant par un point fixe O'.

441. - On donne un plan P et deux points A et B extérieurs au plan P. Trouver le lieu des points M de P tels que les droites MA et MB aient même pente par rapport au plan P.

442. - Soit OO' la perpendiculaire commune à deux droites X et Y (O sur X et O' sur Y). Les points M et N décrivent respectivement ces deux droites de manière que OM = O'N.
1° Démontrer que ON = O'M.
2° Démontrer que MN fait des angles égaux avec X et Y.
3° Lieu du milieu de MN ?
4° Les plans perpendiculaires à X et Y menés respectivement par M et N se coupent suivant une droite Z. Lieu de cette droite Z ?

443. - On donne deux droites non parallèles K et L.
1° trouver un plan P sur lequel les projections de K et L sont parallèles ;
2° démontrer que toutes les droites qui rencontrent K et L, et qui sont parallèles au plan P, rencontrent une droite fixe perpendiculaire à ce plan.

444. - On donne dans un plan P, un point fixe O et un point variable M. Soit un segment OA perpendiculaire à ce plan. Le plan Q mené par A perpendiculairement à MA coupe P suivant une droite Z. Soit N la projection de A sur Z.
1° Démontrer que M, O, N sont alignés.
2° Démontrer que le produit des mesures algébriques OM.ON reste constant.
3° Lieu de N quand M décrit un cercle passant par O?
4° Lieu de N quand M décrit une droite ? Dans ce cas, en déduire que Z passe par un point fixe.

445. - On donne un cercle de diamètre AB, les droites x'Ax, y'By perpendiculaires à AB, non parallèles entre elles et inclinées du même angle μ sur le plan du cercle.
1° Démontrer qu'il existe une infinité de droites Z rencontrant le cercle et les deux droites données.
2° Démontrer que chaque droite Z se projette sur le plan P du cercle suivant une tangente à ce cercle, et que l'angle de Z et du plan P est μ.
3° Lieu du point d'intersection de Z avec un plan P' parallèle au plan P ?

446. - On donne un point A d'un plan P et un point B extérieur à ce plan. On considère les droites Z du plan P telles que les distances AA' et BB' des points A et B à Z soient égales.
1° Démontrer que les milieux de AB et de A'B' sont les pieds de la perpendiculaire commune à ces deux droites.
2° Lieu du milieu de A'B' ?
3° Démontrer que le plan médiateur de A'B' passe par une droite fixe.
4° Démontrer que la distance du point A au plan (B, Z) reste constante.

CHAPITRE V

TRANSFORMATIONS PONCTUELLES

34. - TRANSLATIONS

1. Définition.
Étant donné un vecteur fixe V, faisons correspondre à un point M le point M' tel que les vecteurs : MM' = V.
Nous dirons que le point M' se déduit du point M par la translation de vecteur directeur V.
Cette translation est notée T(V) et on écrira sous forme symbolique

T(V) : M ----> M'

Le point M' est l'homologue (ou le translaté) du point M dans la translation considérée.
Si le point M est élément d'un ensemble (F), l'ensemble (F') des points M' est dit transformé (ou translaté) de (F) par la translation T(V).
Lorsque les ensembles (F) et (F') coïncident, on dit que l'ensemble (F) est globalement invariant dans la translation considérée.

Remarque.
Si le vecteur directeur d'une translation est le vecteur nul, tout point M coïncide avec son homologue M'. Cette translation particulière est appelée translation neutre ou transformation identique.

2. Propriétés des translations.
1° Dans toute translation, tout point a un homologue.
En effet, le vecteur directeur étant donné, l'extrémité M' du vecteur équipollent à V, et d'origine M, est parfaitement déterminée.
2° Translation inverse.
Soit M' l'homologue de M dans la translation T(V). De l'égalité MM'= V, on déduit M'M = -V. Par suite, M est l'homologue de M' dans la translation de vecteur directeur -V.
Cette translation est dite inverse de la translation T(V).

3° Produit de deux translations.
Soient *T*(V1) et *T*(V2) deux translations de vecteurs directeurs respectifs V1 et V2.
Désignons par M1, le translaté, par *T*(V1), d'un point M quelconque, par M2 le translaté, par *T*(V2), du point M1.
De MM2 = MM1 + M1M2, (Relation de Chasles), avec MM1 = V1 et M1M2 = V2,
il résulte que MM2 =V1 + V2.
Or V1 + V2 est un vecteur fixe (indépendant du point M considéré).
Par suite : Quel que soit le point M, le point M2 se déduit du point M par la translation de vecteur directeur V1 + V2.
Cette translation s'appelle le produit (ou la composée) des translations *T*(V1) et *T*(V2).
D'où le théorème :
Le PRODUIT de deux translations est une translation dont le vecteur directeur est la

SOMME des vecteurs directeurs des translations initiales.

4° Groupe des translations.

Considérons l'ensemble *(E)* de toutes les translations du plan [ou de l'espace].Dans cet ensemble, nous venons de définir une opération (le produit ou la composition) qui, à deux translations *T1* et *T2*, en fait correspondre une troisième *T*. Cette opération est donc interne à l'ensemble (*E*). Nous noterons cette opération, *T2 o T1 = T*,

En outre :

Cette opération est associative

$$T3 \circ (T2 \circ T1) = (T3 \circ T2) \circ T1$$

En effet, si *T3, T2, T1* sont trois translations, la translation *T3 o (T2 o T1)* a pour vecteur directeur V3 + (V2 + V1), tandis que celui de la translation *(T3 o T2) o T1* est (V3 + V2) + V1. mais ces sommes sont égales (leçon §6, 4°).Ce qui justifie le résultat énoncé.

Cette opération admet un élément neutre.

En effet, soit I la translation de vecteur directeur 0. Quelle que soit la translation *T*(V), on a

T o I = I o T = T,

ce qui est la conséquence de V + 0 = 0 + V=V (28e Leçon, § 6, 2° c).

Chaque élément de l'ensemble possède un opposé.

Nous avons montré qu'à toute translation *T*(V), pouvait être associée la translation *T'*(-V) (cf. 20). De V + (-V) = 0, il résulte que *T' o T* = I. Donc *T'*(-V) est l'opposée, pour l'opération considérée, de la translation *T*.

Cette opération est commutative.

Cela signifie que, quelles que soient les translations *T1* et *T2*,

$$T1 \circ T2 = T2 \circ T1$$

En effet, les vecteurs directeurs sont V1 + V2 et V2 + V1, qui sont égaux (28e leçon, § 6, 30), il en résulte alors la propriété énoncée.

Toutes ces propriétés nous conduisent à énoncer (voir Algèbre, pages 10 et 11) :

l'ensemble des translations est un groupe commutatif.

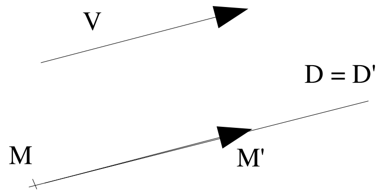
35. - TRANSFORMÉS PAR TRANSLATION D'ENSEMBLES USUELS

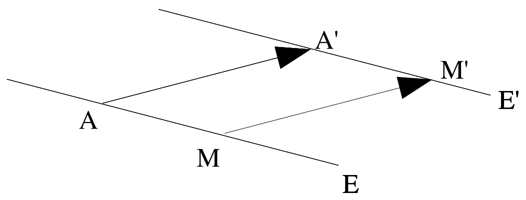
1. Transformée d'une droite D.

Le vecteur directeur V de la translation étant donné, la droite D peut être parallèle au support de V ou ne pas être parallèle à ce support.

1° Dans le premier cas (fig. 1), le transformé M' de tout point M de D est situé sur D et, inversement, tout point de D peut être considéré comme le transformé d'un point de D.

La transformée de la droite D est la droite D elle-même.





2° Dans le deuxième cas (fig. 2), désignons par A' le transformé d'un point fixe A de la droite E. Le transformé M' de tout point M de E est tel que MM' = V = AA'.

D'où A'M' = AM.

Le point M' est donc situé sur la droite E', parallèle à E, passant par A'.

Réciproquement, en utilisant la translation inverse, on montre que tout point de E' est le transformé d'un point de E.

La transformée d'une droite D est la droite parallèle à D menée par le translaté d'un point quelconque de D.

Conséquences.

Dans une translation :

une demi-droite se transforme en demi-droite parallèle et de même sens ;

un segment de droite se transforme en segment de droite égal ;

un vecteur se transforme en un vecteur équipollent.

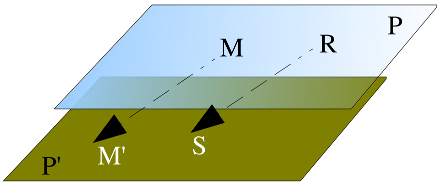
2. Transformé d'un plan P.

Le vecteur directeur de la translation étant V, le plan P peut être parallèle au support de V ou ne pas être parallèle à ce support.

1° Dans le premier cas, le transformé M' de tout point M de P est situé dans P, et inversement, tout point du plan P peut être considéré comme le transformé d'un point de ce plan.

Le transformé du plan P est le plan P lui-même.

2° Dans le deuxième cas (fig. 4), désignons par S le transformé d'un point fixe R du plan P. Le transformé M' de tout point M de P est tel que SM' = RM (§ 1). Le point M' est donc situé dans le plan P', parallèle à P, mené par S.
Réciproquement, en utilisant la translation inverse, on montre que tout point de P' est le transformé d'un point de P.

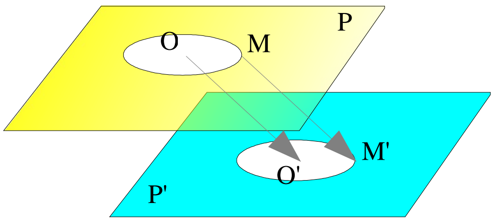


Le transformé d'un plan P est le plan parallèle à P mené par le translaté d'un point quelconque de P.

3. Transformé d'un angle.

Soit un angle XOY et V le vecteur directeur de la translation.
Le plan de XOY se transforme en un plan (§ 2) et les demi-droites Ox et Oy en demi-droites O'x' et O'y' parallèles aux premières et respectivement de même sens que celles-ci.
Par suite, x'Ô'y' = xÔy (10e leçon, p. 82).
Le transformé d'un angle est un angle égal.

4 Transformé d'un cercle.



Soit un cercle (C) de centre O, de rayon R et V le vecteur directeur de la translation.
Le plan P du cercle (C) se transforme en un plan P' (§ 2).Ce dernier est le plan mené par l'homologue O' du centre O, parallèlement à P.
Soit M' l'homologue d'un point quelconque M du cercle (C) :
O'M' = OM = R.
Le point M' décrit donc le cercle (C') du plan P' (centre O', rayon R).
Inversement, soit M' un point du cercle (C'). Par la translation de vecteur -V, le point M' a pour homologue un point M du plan P, tel que OM = O'M'.
Le point M appartient donc au cercle (C) : tout point du cercle (C') est l'homologue d'un point du cercle (C).
Le transformé par translation d'un cercle (C) est un cercle égal (C') dont le plan et le centre sont les transformés des éléments correspondants du cercle (C).

EXERCICES

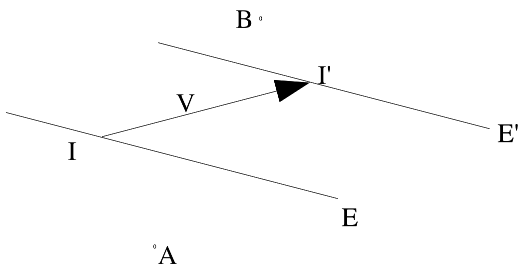
497. - Construire un cercle passant par un point donné et tangent à deux droites parallèles données. Discuter.

498. - Déterminer un parallélogramme ABCD connaissant les points A et B et sachant que les sommets C et D sont situés sur deux droites données.

499. - Construire un trapèze connaissant les longueurs de ses quatre côtés.

500. - On considère deux cercles (C) et (C') et une droite (D). Peut-on déterminer une droite Y, parallèle à (D) et telle que les cordes AB et A'B' qu'elle détermine sur (C) et (C') soient égales ?
[I et I' étant les milieux des cordes AB et A'B', on pourra effectuer la translation de vecteur II' sur le cercle (C)].

501. -Soit H l'orthocentre d'un triangle ABC. On désigne par O le centre du cercle (K) circonscrit à ce triangle, par I le milieu de BC, par A' le point diamétralement opposé à A sur le cercle (K).
1° Démontrer que BHCA' est un parallélogramme.
2° En déduire que AH =2 OI.
3° On suppose que les points B et C étant fixes, le point A varie de telle sorte que l'angle BÂC garde une grandeur constante. Quel est l'ensemble des points A ? Déduire du 2° l'ensemble des points H.

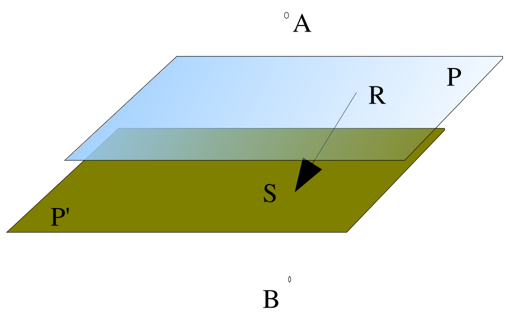


502. - On considère deux droites parallèles E et E', et deux points A et B situés de part et d'autre de la bande (E, E'). I étant un point fixe de E et I' un point fixe quelconque de (E'), on appelle V le vecteur II'. Déterminer un point M de (D) et le point M' de (D') tel que MM'=V et que, de plus

1° AM = BM' ;
ou 2° AM soit perpendiculaire à BM' ;
ou 3° le chemin AM + MM'+ M'B soit le plus court possible ;
ou 4° $AM^2 - BM^2 = k$, k étant donné ;
ou 5° $AM^2 + BM^2 = k^2$, k étant donné.

(Pour toutes ces questions on pourra considérer le point A' déduit de A par la translation de vecteur V).

503. - Étant donnés deux plans parallèles (P) et (P') et deux points A et B situés de part et d'autre des deux plans, on considère deux points R et S situés respectivement dans (P) et (P').
1° Peut-on déterminer un point M de (P) et un point M' de (P') tels que les vecteurs MM' = RS et que AM = BM'?



2° Peut-on déterminer un point M de (P) et un point M' de (P') tels que les vecteurs MM' = RS et que $MA^2 - MB^2 = k$?

3° Peut-on déterminer un point M de (P) et un point M' de (P') tels que les vecteurs MM'= RS et que la somme de distances AM + MM' + M'B soit la plus petite possible ?
On pourra considérer l'homologue A' de A dans la translation de vecteur directeur RS.

504. - Étant données deux demi-droites Ax et By, on appelle M un point quelconque de Ax et M' le point tel que les vecteurs MM'=AB.
1° Soit N le point de By défini par BN = AM ; on appelle J le milieu de NM' et I celui de MM'.
Quel est l'ensemble des points M' ? Quel est l'ensemble des points I ? Comparer les vecteurs JI et BA et en déduire l'ensemble des points I.
2° On suppose maintenant que Ax et By sont orthogonales et que M et N varient sur Ax et By de telle sorte que M'N garde une longueur constante 2 r.
Quel est l'ensemble des points J ? Quel est l'ensemble des points I ?

505. Construire une droite parallèle à un plan donné et s'appuyant sur deux droites données X et Y en des points M et M' tels que MM' ait une longueur donnée d.

506. On donne trois plans P, Q, R ayant un point commun O. Construire un triangle ABC dont les sommets appartiennent respectivement à chacun des plans P, Q, R, et sachant que les vecteurs AB et AC sont équipollents à deux vecteurs donnés V et W.

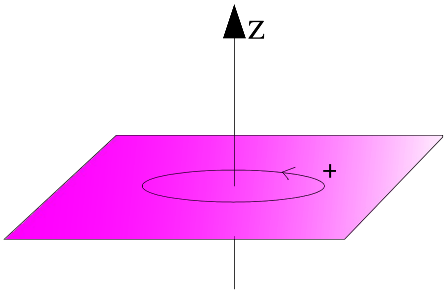
507. - On donne deux plans sécants P et Q et un vecteur V.
1° Peut-on déterminer une droite (D) perçant P en A et Q en B et telle que le vecteur AB = V ?
2° La droite (D) peut-elle, de plus, s'appuyer sur une droite donnée X de l'espace ?

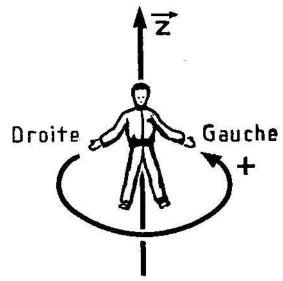
508. - Construire une droite de l'espace, parallèle à un plan donné et s'appuyant sur deux droites données en deux points A et B tels que AB = k (k longueur donnée).

36. - ROTATIONS AUTOUR D'UN AXE

1. Orientation de l'espace.

Considérons un axe Z et un plan P, perpendiculaire à cet axe (fig. 1).
Définissons le sens positif des angles généralisés tracés dans le plan P ou dans un plan quelconque perpendiculaire à l'axe Z.
Imaginons un observateur placé le long de l'axe Z de façon que le sens positif de l'axe soit le sens allant des pieds vers la tête de l'observateur.

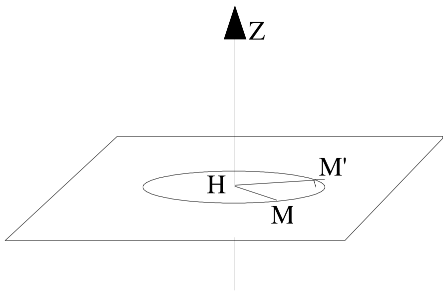




Par convention, le sens positif des angles tracés dans tout plan perpendiculaire à l'axe Z est le sens allant de la droite à la gauche de l'observateur en passant devant lui.

2. Rotation autour d'un axe : définition.

Étant donnés un axe Z et un angle généralisé , à un point M faisons correspondre le point M' tel que :
1° M' soit situé dans le plan P mené par M perpendiculairement à l'axe ;
2° H étant l'intersection de l'axe et du plan P, on ait :
HM = HM'
et (HM,HM') =   (à 360° près).
Nous dirons que le point M' se déduit du point M par la rotation d'axe Z et d'angle .



Cette rotation sera notée *R* (Z,). Le point M'est le transformé, ou l'homologue, de M dans la rotation considérée.
Lorsque le point M est élément d'un ensemble (E), l'ensemble (E') des points M' est dit le transformé de (E) par la rotation *R*(Z,).

Remarques.
1° Si   = 0, le point M' coïncide avec le point M, quelle que soit la position de celui-ci.
On dit que la rotation d'angle nul est la transformation identique.

2° Considérons les rotations R (Z,) et R'(Z,   + k.360°). Elles transforment un point M, arbitraire, en le même point M'. Par suite, sans restreindre la généralité, on peut supposer que

0 <   < 360°.

3° Soit Z' l'axe opposé à Z. Considérons les rotations R1(Z,) et R2(Z', -) . Il est clair que tout point M est transformé, par R1, ou R2, en le même point M'.

3. Propriétés des rotations autour d'un axe (Z).

1° Dans toute rotation autour d'un axe (Z), tout point M a un homologue M' bien défini.

2° Les points de l'axe (Z) sont les seuls points qui coïncident avec leurs homologues : on dit que **les points de l'axe sont invariants.**

3° Rotation inverse.

Soit M' l'homologue de M dans la rotation *R*(Z,).

a) On peut considérer M comme l'homologue de M' par la rotation *R*(Z, -).

b) L'axe (Z') étant l'axe opposé à (Z), on peut également considérer M comme l'homologue de M' dans la rotation *R*(Z',).Cette rotation est dite inverse de la rotation *R* (Z,).

4° Tout plan (P) perpendiculaire à l'axe (Z), est globalement invariant par la rotation *R* (Z,).

En effet, l'homologue M' de tout point M de (P) se trouve dans (P) et, inversement, tout point m' de (P) peut être considéré comme l'homologue d'un point de (P).

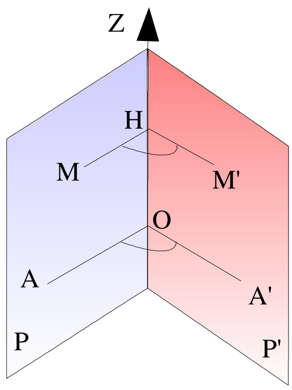
5° Tout plan contenant l'axe de rotation se transforme en un plan contenant l'axe de rotation.

En effet, soient M un point quelconque d'un plan (P) contenant l'axe Z et M' son homologue par la rotation R(Z,).

Considérons un point fixe A, non situé sur Z, du plan (P). Soient A' son homologue par la rotation *R* (Z,) et (P') le plan défini par l'axe (Z) et le point A'.

On a: (OA, OA') = et (HM, HM') = .

Puisque (OA, OA') et (HM, HM') sont deux rectilignes du dièdre (P, Z, P'), le point M' est dans le plan (P'). Réciproquement, tout point de (P') peut être considéré comme l'homologue d'un point de (P) par la rotation inverse de *R* (Z,).



37. - TRANSFORMÉS PAR ROTATION D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

1. Transformée d'une droite   parallèle à l'axe (Z) de rotation.

Soient A un point fixe de la droite   et M un point variable de cette droite, A' et M' les homologues respectifs de A et de M dans la rotation R(Z,).

Considérons le plan défini par l'axe (Z) et la droite . D'après la 36e leçon (§ 3; 5°), ce plan se transforme en un plan contenant (Z) et le point A'. Les quatre points A', O, H et M' sont donc dans un même plan.

De plus HM' et OA' étant perpendiculaires à (Z) sont parallèles. Enfin, d'après la définition de la rotation :

HM' = HM et OA' = OA

et, puisque   et Z sont parallèles : OA = HM.

D'où il résulte que le quadrilatère A'OHM' est un parallélogramme, donc, que le point M' décrit la parallèle ' à (Z) menée par A'.

Réciproquement, en considérant la rotation inverse R(Z, -), on montre que tout point m' de ' est bien l'homologue d'un point m de .

Donc :

la transformée d'une droite parallèle à l'axe de rotation est la parallèle à l'axe de rotation menée par l'homologue d'un point quelconque de cette droite.

2. Transformée d'une droite   orthogonale à l'axe (Z) de rotation.

Soit P le plan contenant la droite   et perpendiculaire à (Z) : ce plan est invariant dans la rotation R (Z,) (36e leçon, § 3, 4°).

Désignons par O l'intersection de P et de (Z), par A le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur   et par M un point quelconque de .

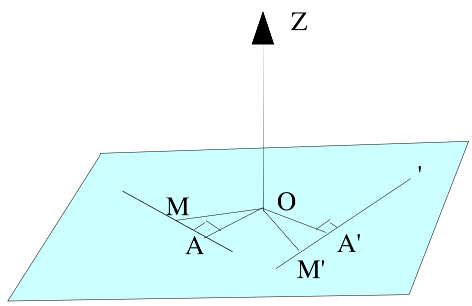
Si M' et A' sont les homologues respectifs de M et de A : (OM, OM') =   et (OA, OA') = .

Donc (OM, OM') = (OA, OA'),

d'où l'on déduit : (OM, OA) = (OM', OA'), égalité qui, avec les suivantes :

OA = OA' et OM = OM',

montre que les triangles OAM et OA'M' sont égaux.

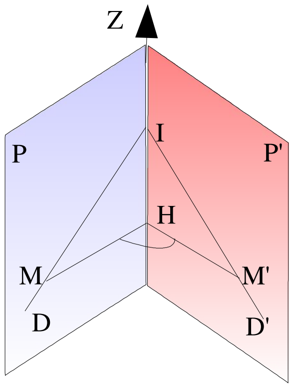


Donc, l'angle OA'M' est droit, ce qui prouve que le point M' décrit la droite ' située dans le plan P et perpendiculaire en A' à OA'.

Réciproquement, pour démontrer que tout point m' de la droite ' provient bien d'un point de   par la rotation *R*(Z,), il suffit de considérer la rotation inverse et d'utiliser le résultat précédent.

Donc : **la transformée d'une droite orthogonale à l'axe de rotation est une droite orthogonale à cet axe.**

Remarque. Le segment AM est transformé en un segment égal A'M'.



3. Transformée d'une droite D rencontrant l'axe (Z) de rotation.

La droite et l'axe (Z) étant sécants, (en I), définissent un plan P.

Dans la rotation *R*(Z,), le plan P se transforme en un plan P' (36e leçon, § 3, 5°); donc l'homologue M' de tout point M de A est situé dans le plan P'.

De plus, les triangles IHMet IHM' qui ont IH commun, HM = HM' et IHM= IHM' = 1 droit, sont égaux.

Par suite MÎH= M'ÎH.

Or, l'angle MÎH étant constant et égal à , lorsque M décrit la droite D, le point M' décrit la droite D' située dans le plan P' et telle que l'angle de A' et de (Z) soit égal à .

Réciproquement, à l'aide de la rotation inverse, on montre que tout point m' de D' est l'homologue d'un point m de D.

Donc : **la transformée d'une droite D rencontrant l'axe (Z) de rotation en I est une droite D' passant par I et faisant avec (Z) un angle égal à celui de D et (Z).**

Pour déterminer D', on construira l'homologue d'un point de D, autre que I.

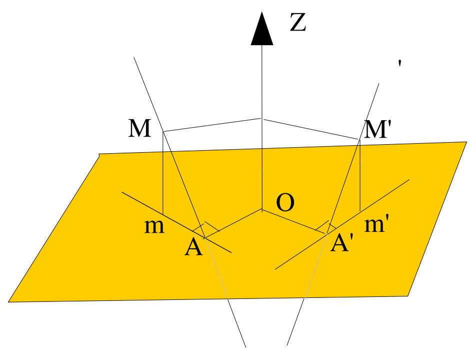
4. Cas général : transformée, par rotation, d'une droite quelconque.

Soient la droite et l'axe de rotation (Z). Désignons par OA leur plus courte distance.

1° Étude de la figure. Désignons par P le plan perpendiculaire à (Z) issu de A ; par d la projection orthogonale de sur le plan P ; par B un point fixe et M un point variable de ;

par b et m leurs projections orthogonales sur P.

Dans la rotation R (Z,), les homologues respectifs de A, B, M sont A', B', M'. Soient b' et m' les projections orthogonales de B et de M sur le plan P.



2° Dans la rotation R (Z,), b' et m' sont les homologues respectifs de b et de m. En effet, MH, M'H, BK et B'K étant parallèles au plan P, on a en projection :

mO = m'O, bO = b'O.

BKB' = bOb', MHM' = mOm' =

Puisque la transformée d'une droite d, orthogonale à Z, est une droite, les points A', m' et b' sont alignés.

3° Dans la relation Am/Ab = mM/bB, remplaçons bB par son égal b'B' et mM par son égal m'M' :

Am/Ab = m'M'/b'B'
et, puisque m et m' divisent Ab et A'b' dans le même rapport, A'm'/A'b' = m'M'/b'B',
ce qui prouve que les points A', M', B', sont alignés.
Réciproquement, en utilisant la rotation inverse on montre que tout point pris sur la droite A'M'B' est le transformé par R(Z,) d'un point de la droite .
Donc : **la transformée d'une droite est une droite.**
Remarque. Un segment de droite est transformé en un segment de droite égal.

5. Transformé par rotation, autour d'un axe Z, d'un plan P.
Nous avons déjà étudié, dans la 36e leçon, les cas particuliers où l'axe de rotation est soit perpendiculaire au plan, soit contenu dans le plan.
Cas général : le plan P étant quelconque, nous pouvons supposer qu'il est engendré par des droites D issues d'un point fixe A de P et s'appuyant sur une droite donnée X du plan P.
Dans la rotation R (Z,), le transformé de A est un point A' ; la transformée de X est une droite bien déterminée X' ; les transformées des droites D seront des droites issues de A' et rencontrant X' : elles engendrent un plan P'.
Donc, le transformé d'un plan est un plan.

EXERCICES

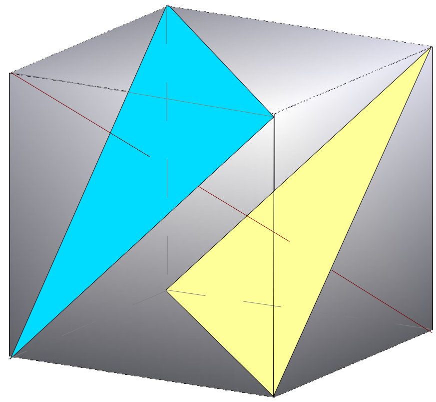
509. - On considère une rotation R (Z,) et un plan P. Quel est l'ensemble des points de P dont les transformés par la rotation R (Z,) sont dans P ? Discuter.
509 bis. - 1° Quel est le lieu des axes de rotation qui transforment un point donné A en un point donné A'?
2° Étant données deux droites de l'espace (D) et (D') on désigne par A un point de (D) et par A' un point de (D'). Trouver l'axe d'une rotation qui transforme (D) en (D'), A et A' étant homologues.

510. - On désigne par (D') l'homologue d'une droite (D) dans une rotation donnée R (Z,).
Soit OA la perpendiculaire commune à (D) et (Z); OA' la perpendiculaire commune à (Z) et (D');
Ox la bissectrice intérieure de l'angle AOA'.
1° M étant un point quelconque de (D), on désigne par M1 le symétrique de M par rapport à OA et par M' le symétrique de M1 par rapport à Ox. Montrer que M'est l'homologue de M dans la rotation R (Z,).
2° Montrer qu'il existe une deuxième symétrie échangeant (D) et (D').

511. - Étant donnée une rotation R (Z,), on désigne par (P') le transformé d'un plan (P).
1° Montrer que (Z) fait des angles égaux avec (P) et P'.
2° Montrer que le lieu des axes de rotation qui transforment un point donné A en un point donné A' est le plan médiateur de AA'.
3° Étant donnés deux cercles de l'espace (C) et (C') de même rayon et de centres différents, montrer

qu'il existe deux rotations transformant (C) en (C').
Étudier le cas où les plans des cercles sont parallèles.

512. - Soit le cube ci-contre.
1° Démontrer que les triangles bleu et jaune sont équilatéraux, que leurs plans sont perpendiculaires à la diagonale rouge, que celle-ci perce ces plans aux centres de gravité des triangles nommés.
2° En déduire l'existence de 4 axes (Z) de rotation tels que le cube soit transformé en lui-même par les rotations (Z, 120°).



38. - SYMÉTRIE PAR RAPPORT A UN AXE (TRANSPOSITION)

1. Définition.

Nous avons étudié, dans les deux leçons précédentes les rotations autour d'un axe (Z).
Dans le cas particulier où l'angle de la rotation vaut 180°, la rotation porte le nom de symétrie par rapport à l'axe (Z), ou transposition d'axe (Z), ou demi-tour d'axe (Z).

2. Propriétés des transpositions.

Les transpositions possèdent évidemment toutes les propriétés des rotations autour d'un axe. De plus :
1° Quelle que soit l'orientation de l'axe, le, transformé par symétrie d'un point M est le point M' tel que le support de l'axe est une médiatrice du segment MM'. Aussi n'est-il pas nécessaire d'orienter l'axe de transposition, ce qui explique que l'on peut dire « symétrie par rapport à une droite ».
2° Si M' est le symétrique de M par rapport à une droite D, inversement M est le symétrique de M'. Ce qui permet d'énoncer : M et M' sont symétriques par rapport à la droite D. (On dit aussi que la transposition est une transformation involutive).

3. Axe de symétrie : définition.

Un ensemble *F* admet une droite D pour « axe » de symétrie lorsqu'il est globalement invariant dans la symétrie par rapport à D, c'est-à-dire lorsque *F* est son propre symétrique dans cette symétrie.
On dit aussi que *F* est autosymétrique par rapport à la droite D.

Exemple.
Dans l'espace, un carré ABCD admet 5 a axes de symétrie : ses diagonales; les médiatrices, dans son plan, de ses côtés ; la perpendiculaire au plan du carré élevée en son centre.

4. Produit de deux transpositions.

Soient T1 et T2 deux transpositions autour de deux droites Dl et D2. Soit M1 l'homologue, par T1, d'un point M et M2, l'homologue, par T2, de M1. Quel est le produit T2 o T1, c'est-à-dire, dans quelle transformation M2 est-il l'homologue de M ?
Puisque deux droites de l'espace peuvent occuper l'une par rapport à l'autre quatre positions relatives, il y a quatre cas à étudier.

Premier cas : Dl et D2 sont confondues.

D'après ce qui précède (§ 2, 2°), les points M et M2 coïncident, quel que soit M. Le produit T2 o T1 (ou T1 o T2) est la transformation identique.

Deuxième cas : Dl et D2 sont parallèles.

Par hypothèse :

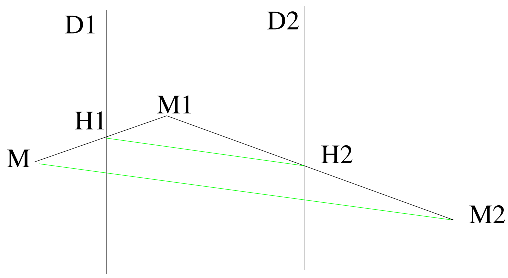
MM1 = 2 H1M1 et M1M2 = 2 M1H2.

Or MM2 = MM1 + M1M2

Donc : MM2 = 2 H1M1 + 2 M1H2

MM2 = 2 H1H2

Le vecteur H1H2 étant un vecteur constant (indépendant du point M considéré), le produit T2 o T1 est la translation de vecteur directeur 2 H1H2.



A remarquer que le produit T1 o T2 (T2 effectuée d'abord) est la translation de vecteur directeur 2 H2H1.

On montrera en exercice (n° 513) que toute translation peut être considérée, d'une infinité de façons, comme le produit de deux transpositions autour de deux droites parallèles.

Troisième cas : Dl et D2 sont sécantes.

Désignons par P le plan défini par les deux droites sécantes Dl et D2. Soient m, m1, m2 les projections orthogonales respectives des points M, Ml, M2 sur P.

Puisque H1 et H2 sont les milieux respectifs des segments MM1 et M1M2, il en résulte que ce sont également ceux de mm1, et m1m2.

On en déduit que Mm = M2m2 : les projections orthogonales de M et M2 sur l'axe Z mené par O perpendiculairement au plan P, sont donc confondues (en H).

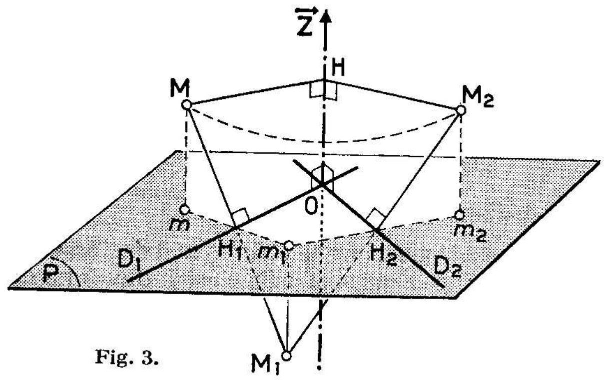


Fig. 3.

De plus HM = Om = Om1 = Om2 = HM2.

Enfin pour les angles de vecteurs : (HM,HM2) = (Om, Om2) = (Om, Om1) + (Ornl, Om2)

= 2 (OH1, Om1) + 2 (Om1, OH2)

= 2 (OH1, OH2) = 2 (Dl, D2)'

En conclusion : le point M2 se déduit du point M par la rotation d'axe Z et d'angle 2(Dl, D2).

Quatrième cas : Dl et D2 sont quelconques. Ce cas sera étudié dans la Classe de Mathématiques Techniques.

EXERCICES

513. - Étant données deux droites parallèles D1 et D2, on désigne par M, le symétrique par rapport à D1 d'un point M quelconque de l'espace et par M2 le symétrique de M1 par rapport à D2.

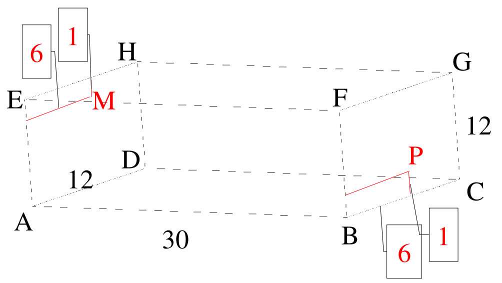
Montrer que, si M appartient à un ensemble (*F*), M2 appartient à l'ensemble (*F2*) déduit de (*F*) par translation.

Inversement, (F') étant le transformé d'un ensemble (F), dans une translation de vecteur directeur V, est-il possible d'obtenir cette translation comme produit de deux symétries par rapport à deux droites ?

514. - (D) et (D') étant deux droites quelconques de l'espace, on désigne par AA' leur plus courte distance et par O le milieu de AA'. Soient Ox et Oy les parallèles menées par O aux droites (D) et (D'). Démontrer que les bissectrices de l'angle xOy et la droite AA' sont des axes de symétrie pour la figure formée de (D) et (D').

515. - Démontrer qu'un cube possède 9 axes de symétrie et neuf seulement.

516. - ABCDEFGH étant le parallélépipède rectangle représenté par la figure ci-dessous, on demande de déterminer le chemin le plus court qui permet de joindre les points M et P (placés ainsi que l'indique la figure) en se déplaçant sur les faces du parallélépipède.
Calculer la longueur de ce chemin.



517. - Soient (X), (Y), (Z) les droites joignant les centres des faces opposées d'un cube.
1° Montrer que le cube est globalement invariant dans chacune des transpositions d'axes (X), (Y), (Z). [L'ensemble de ces trois transpositions sera appelé par la suite, ensemble (T2)].
Montrer que l'ensemble (T2) et la transformation identique forment un groupe.
2° Démontrer qu'il y a six rotations distinctes, leur ensemble sera appelé (T4), autres que les transpositions ci-dessus, d'axes (X), (Y), (Z), laissant le cube globalement invariant [deux rotations de même axe et dont l'angle diffère de 360° x k (k entier) sont considérées comme identiques].
3° Montrer que les quatre diagonales du cube permettent de considérer huit rotations différentes [leur ensemble sera appelé (T3)] laissant le cube globalement invariant.
4° Montrer que les droites joignant les milieux de deux arêtes opposées déterminent six transpositions laissant le cube globalement invariant.
5° On appelle déplacement laissant le cube invariant le produit d'un nombre quelconque des rotations et transpositions mises en évidence ci-dessus. Montrer qu'il y a 24 déplacements laissant un cube invariant.
6° Retrouver le résultat ci-dessus en montrant qu'il existe :
a) quatre façons de superposer deux faces d'un cube, donc (6 x 4) façons de superposer un cube à lui-même;
b) ou bien trois façons de superposer deux sommets, donc (8 x 3) déplacements conservant le cube ;
c) ou bien deux façons de superposer deux arêtes.
7° Montrer que l'ensemble formé de la transformation identique et des ensembles (T2) et (T3) est un groupe.
8° Dresser la « table de multiplication » des 24 déplacements mis en évidence ci-dessus (table des produits deux à deux de ces déplacements).

39. - SYMÉTRIE PAR RAPPORT A UN POINT

1. Définition.

Étant donné un point fixe O, à un point quelconque M, faisons correspondre le point M' tel que O soit le milieu du segment MM'.

Nous dirons que le point M' se déduit du point M par la symétrie de contre O, ou que M' est symétrique de M par rapport au point O.

Lorsque le point M est élément d'un ensemble (F), l'ensemble (F') des points M' est dit symétrique de (F) par rapport au point O.

Si les ensembles (F) et (F') coïncident, on dit que le point O est centre de symétrie de (F), ou que (F) est autosymétrique dans la symétrie de centre O, ou que (F) est globalement invariant dans cette symétrie.

2. Remarques.

1° Le symétrique de M' par rapport au point O est le point M. Nous dirons donc que M et M' sont symétriques par rapport à O. On dit également que toute symétrie centrale est involutive.

2° Le centre est le seul point qui coïncide avec son symétrique : c'est le seul point invariant.

3° Les expressions « symétrie par rapport à un point » et « symétrie centrale » sont équivalentes.

3. Symétrique d'une droite D (centre de symétrie O).

Deux cas sont à envisager selon la position de O par rapport à D.

1er cas : Le point O est situé sur la droite D.

Le symétrique de tout point M de D est un point M' de D et, inversement, tout point de D provient d'un point de D.

La droite D est donc sa propre symétrique dans la symétrie de centre O, ou D est autosymétrique dans cette symétrie, ou globalement invariante.

2e cas : Le point O n'est pas situé sur la droite D.

Dans le plan P défini par le point O et la droite D, les points A' et M' sont les symétriques d'un point fixe A et d'un point variable M situés sur D.

Le quadrilatère AMA'M' est donc un parallélogramme. D'où il résulte que :

la symétrique d'une droite D par rapport à un point est la parallèle à D menée par le symétrique d'un point.

Conséquences :

1° Une demi-droite a pour symétrique une demi-droite parallèle et de sens contraire.

2° Un segment de droite a pour symétrique un segment égal.

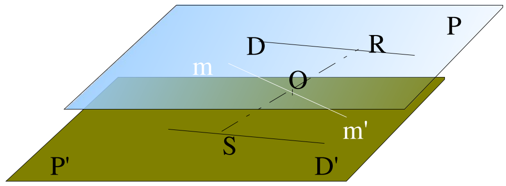
4. Symétrique d'un plan P (centre de symétrie O).

Deux cas sont à envisager selon la position de O par rapport à P.

1er cas : le point O est situé dans le plan P.

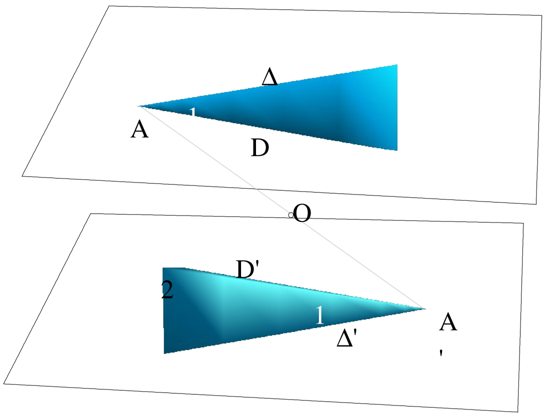
Le symétrique de tout point du plan P est situé dans P et, inversement, tout point de P est symétrique d'un autre point du plan. P est son propre symétrique.

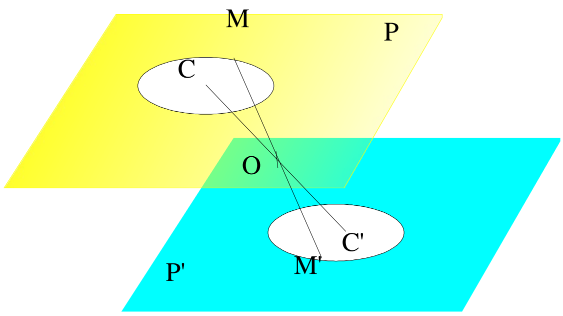
2e cas : Le point O n'est pas situé dans P.
Les symétriques de toutes les droites issues de R dans le plan P sont des droites D' parallèles menées par S, symétrique de R. Les droites D' engendrent le plan P' parallèle à P mené par S.



Inversement, tout point m' de ce plan a bien pour symétrique un point du plan P. Donc :
Le symétrique d'un plan est le plan parallèle mené par le symétrique d'un point.

Conséquences.

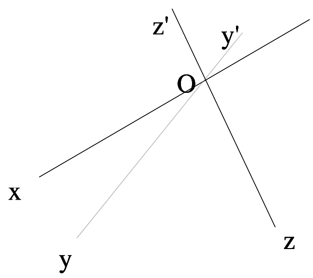




1° Symétrique d'un angle.
Soit un angle (D,A,).
Le plan de cet angle se transforme en un plan et les côtés, en des demi-droites respectivement parallèles aux côtés et de sens contraire : la figure symétrique d'un angle est un angle égal.

2° Symétrique d'un cercle.
Soit (C) un cercle de centre C. Si le centre de symétrie coïncide avec le centre du cercle (C), le cercle est globalement invariant (autosymétrique dans la symétrie de centre O).
Sinon, soit C' le symétrique, par rapport à O, du point C. Le plan (P) du cercle (C) se transforme en le plan (P'), parallèle à (P), et passant par C'. La relation CM = C'M' prouve de plus que :
le symétrique d'un cercle est un cercle de même rayon, les plans des cercles et leurs centres étant homologues dans la symétrie considérée.

5. Remarque.
Dans une symétrie par rapport à un point O nous venons de montrer qu'un segment de droite et un angle se transformaient respectivement en un segment égal et en un angle égal.
Considérons le trièdre Oxyz et son symétrique par rapport à O, le trièdre Ox'y'z'. Leurs faces sont respectivement égales. Si nous supposons que le trièdre Oxyz a ses faces inégales, la possibilité de



faire coïncider les faces xOy et x'O'y', par exemple, n'amènera pas les arêtes Oz et Oz' en coïncidence.
Ainsi, il n'est pas possible, en général, de faire coïncider deux figures de l'espace symétriques par rapport à un point O.
Remarquons qu'au contraire, deux figures planes symétriques par rapport à un point O peuvent toujours être amenées en coïncidence.

6. Produit de deux symétries centrales.
Soient S et S', deux symétries de centres respectifs O et O'. Désignons par m le symétrique, par rapport à O, d'un point M quelconque et par M' le symétrique de m par rapport à O'. La transformation ponctuelle dans laquelle M' est l'homologue de M, quel que soit le point M considéré, est le produit des symétries S et S', dans cet ordre, et noté S' o S.
Quelle est cette transformation?
Premier cas : O et O' confondus.
D'après ce qui précède (§ 2, 1°), il résulte que, quel que soit M, les points M' et M coïncident. **Le produit S' o S, est la transformation identique.**

Deuxième cas : O et O' sont distincts.
Par hypothèse :
Mm = 2 Om et mM' = 2 mO'.
Or : MM' = Mm + mM' = 2 (Om + mO') = 2 OO'.
Le vecteur 2 OO' étant indépendant du point M considéré, **le produit de la symétrie S par la symétrie S' est la translation de vecteur directeur 2 OO'.**

Remarques. 1° Le produit de la symétrie S' par la symétrie S est la translation de vecteur directeur 2 O'O.
2° On montrera en exercice (n° 525) qu'inversement, toute translation peut, d'une infinité de façons, être considérée comme le produit de deux symétries centrales (si le premier centre est choisi de façon arbitraire, le second est alors parfaitement déterminé).

EXERCICES

518. - Démontrer qu'un cube possède un, et un seul, centre de symétrie.
519. - Caractériser les triangles possédant un centre de symétrie.
520. - Caractériser les tétraèdres possédant un centre de symétrie.

521 . - Dans un repère cartésien xOy, on considère les points A (1, 4) ; B (0, - 3) ;
C (1 + √3; 2 - √3) ; S (2, 3). Déterminer les coordonnées des points A', B', C' symétriques de A, B, C par rapport à S.

522. - Dans un repère cartésien xOy, on trace la droite (D) d'équation $y = 2x + 1$. Quelle est l'équation de la symétrique D' de D par rapport au point S (- 2, - 3) ?

523. - Même question pour la droite d'équation $3x - 2y + 5 = 0$ et sa symétrique par rapport au point S (- 1, - 2).

524. - L'espace étant rapporté à un repère cartésien Oxyz, on considère les points A (0, 2,-3), B (3, 0, 5) ; C (-1, 2, -3). Déterminer les coordonnées des symétriques de ces points par rapport au point S (2, 1, -1).

525. - On désigne par M1, le symétrique d'un point M par rapport à un point O1 donné, par M2 le symétrique de M1 par rapport à un autre point donné O2.
1° Montrer que l'ensemble des points M2 se déduit de l'ensemble des points M par une translation bien déterminée.
2° Inversement, soit T une translation de vecteur directeur V. Montrer que T peut être considérée comme le produit de deux symétries centrales. Comment choisir le deuxième centre de symétrie, le premier étant donné ?

526. - Montrer que les symétriques de l'orthocentre d'un triangle par rapport aux milieux des côtés sont situés sur le cercle circonscrit à ce triangle.

527. - Un point M est élément d'un ensemble (E). Soient (F) l'ensemble symétrique de (E) par rapport à un point O et (F') l'ensemble symétrique de (E) par rapport à un point O' (distinct de O). Enfin, on désigne par (F1) le symétrique de l'ensemble (F) par rapport à O'. Que peut-on dire des ensembles (F1) et (F') ?

528. - 1° En géométrie plane, on considère deux droites D et D' et un point A n'appartenant à aucune de ces droites. Peut-on déterminer un point M de D et un point M' de D' tels que A soit le milieu du segment MM'?
2° Même question en remplaçant la droite D par un cercle (C), la droite D' étant toujours donnée.

529. - Montrer qu'un ensemble de points de dimension finie (c'est-à-dire pouvant être contenu à l'intérieur d'un tétraèdre) ne peut admettre deux centres de symétrie.

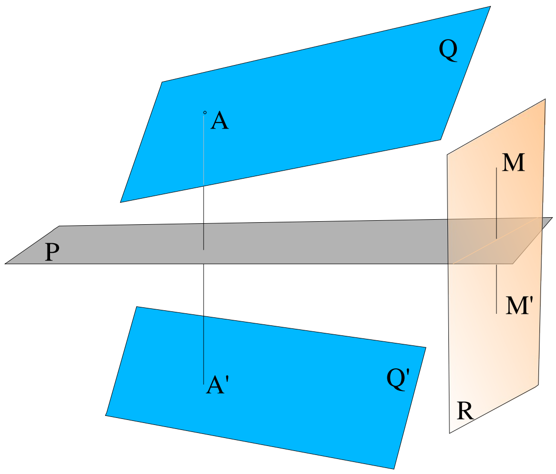
530. - Soit G le centre de gravité d'un triangle ABC et M un point quelconque (du plan du triangle ou non).
1° Démontrer que pour les vecteurs : 3 MG = MA + MB + MC.
2° On désigne par P, Q, R les symétriques respectifs du point M par rapport aux milieux des côtés BC, CA, AB. Démontrer que les segments AP, BQ et CR ont même milieu I.
3° Démontrer que les points M, G, I sont alignés et préciser la position de I par rapport aux points M et G.

40. - SYMÉTRIE PAR RAPPORT A UN PLAN

1. Définition.

Étant donné un plan fixe P, à un point M faisons correspondre le point M' tel que le plan P soit plan médiateur du segment MM'.

Nous dirons que :
le point M' se déduit du point M dans la symétrie par rapport au plan P ou bien que M' est symétrique de M par rapport au plan P.
Lorsque le point M est élément d'un ensemble (F), l'ensemble (F') des points M' est dit symétrique de (F) par rapport au plan P.
Si les ensembles (F) et (F') coïncident, on dit que l'ensemble (F) est autosymétrique par rapport au plan P ou que le plan P est plan de symétrie de l'ensemble (F).



2. Remarques.

1° Le symétrique du point M' par rapport au plan P est le point M. Nous dirons donc que : M et M' sont symétriques par rapport au plan P ou que la symétrie par rapport à un plan est involutive.
2° Les points du plan P sont les seuls points qui coïncident avec leurs symétriques ; on dit que les points du plan P sont invariants.

3. Symétrique d'une droite D (plan de symétrie P).

Trois cas sont à envisager selon la position de D par rapport à P.

Premier cas. La droite D est dans le plan P.

Le symétrique de tout point M de la droite D est le point M lui-même : la droite D est donc sa propre symétrique par rapport au plan P.

Deuxième cas. La droite D est perpendiculaire au plan P.

Le symétrique de tout point M de la droite D est un point M' de cette droite et réciproquement : la symétrique de la droite D est donc la droite D elle-même.

Troisième cas : La droite D et le plan P sont quelconques.

Soit M' le symétrique d'un point M de la droite D. Lorsque M varie, les droites MM' engendrent le plan Q, contenant D et perpendiculaire à P. Les plans P et Q se coupent selon une droite X.
Les points M et M' sont symétriques par rapport à X. D'après la 38e leçon, la symétrique de D est donc une droite D'.

Remarques.

1° Si la droite D est parallèle au plan P, sa symétrique par rapport au plan P est aussi parallèle à ce plan.

2° Le symétrique d'un segment de droite est un segment de droite égal.

4. Symétrique d'un plan Q (plan de symétrie P).

Deux cas sont à envisager selon la position de Q par rapport à P (voir figure ci-dessus).

Premier cas : Le plan R est perpendiculaire au plan P.

Tout point M du plan R a pour symétrique un point M' contenu dans le plan R et réciproquement : le plan R est donc son propre symétrique par rapport à P.

Deuxième cas : Le plan Q n'est pas perpendiculaire au plan P.

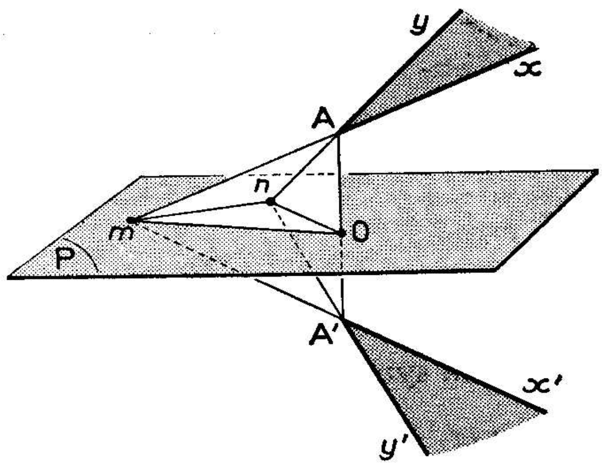
Soit A' le symétrique d'un point A du plan Q. Le plan Q peut être considéré comme engendré par les droites D passant par A et s'appuyant sur une droite fixe Y du plan Q.

Or, les droites D ont pour symétriques les droites D' passant par A' et s'appuyant sur la droite Y' symétrique de Y : les droites D' engendrent un plan Q' qui est le symétrique de Q par rapport à P.

Le symétrique d'un plan est un plan.

5. Conséquences.

1° Symétrique d'un angle.



a) Soit un angle xAy.

Dans la symétrie par rapport à P, les demi-droites Ax et Ay sont transformées en des demi-droites A'x' et A'y' (§ 3) et le plan défini par Ax et Ay a pour symétrique le plan défini par A'x' et A'y' (§ 4). Donc, le symétrique d'un angle est un angle.

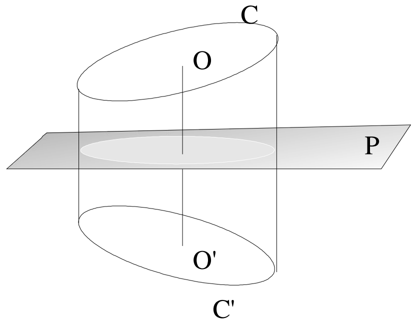
b) Comparons les angles symétriques xAy et x'A'y'. Supposons que les droites définies par Ax et Ay percent respectivement P en m et n, (le cas où Ax et Ay sont parallèles à P se traite immédiatement).

P étant le plan médiateur de AA', les triangles mAA' et nAA' sont isocèles. Par suite, les triangles mnA et mnA', qui ont leurs côtés respectivement égaux, sont égaux. D'où $m\hat{A}n = m\hat{A}'n$.

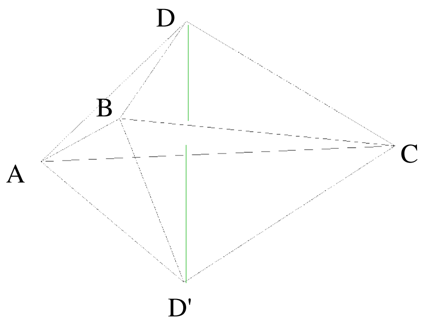
Dans toute symétrie par rapport à un plan, le symétrique d'un angle est un angle égal.

2° Symétrique d'un cercle.

Soit (C) un cercle, de centre O, situé dans un plan Q.
Dans la symétrie par rapport à P,le plan Q se transforme en un plan Q', le point O en un point O'.
Soit M un point du cercle (C) ; son symétrique M' appartient au plan Q' et O'M' = OM. Par suite :
dans toute symétrie par rapport à un plan, le symétrique d'un cercle est un cercle égal ; les plans et les centres se correspondent dans la symétrie considérée.



6. Remarque.



Considérons quatre points A, B, C, D non situés dans un même plan. Désignons par P le plan ABC et construisons les symétriques des points A, B, C, D par rapport à ce plan P.
Il est clair qu'en général la figure formée par les points ABCD ne peut pas être amenée en coïncidence avec sa symétrique ABCD' bien que les segments et les angles homologues soient respectivement égaux.

La figure (F') symétrique d'une figure (F) par rapport à un plan P n'est pas, en général, superposable à la figure (F).

Noter qu'au contraire, s'il s'agit d'une figure plane, la superposition est toujours possible[2].

7. Produit de deux symétries.
Pl et P2 étant deux plans donnés, on désigne par M1 le symétrique par rapport à P1 d'un point M quelconque, par M2 le symétrique de M1 par rapport à P2.
Quelle est la transformation, indépendante de M, dans laquelle M2 est l'homologue du point M ?
Cette transformation s'appelle le produit de la symétrie S1 par la symétrie S2.
Puisque deux plans ne peuvent occuper l'un par rapport à l'autre que trois positions relatives (page 75, § 12), trois cas sont à étudier.

Premier cas : les plans Pl et P2 sont confondus.
Il résulte de ce qui précède (§ 2, 1°), que le produit cherché est la transformation identique (celle dans laquelle tout point est invariant).

Deuxième cas : les plans Pl et P2 sont parallèles (figure analogue à celle du produit de deux symétries par rapport à des droites parallèles, la démonstration est identique).

2 Note de la présente éditrice : si le plan de la figure F est parallèle au plan de symétrie, on peut considérer que F' est image de F par une translation, donc les figures sont superposables ; si le plan de F est sécant au plan de symétrie, F' est image de F par rotation autour de la droite d'intersection, donc ici aussi les figures sont superposables.

Par hypothèse
MM1 = 2 HM1, et M1M2 = 2 M1H2.
Or MM2=MM1 + M1M2
par suite MM2 = 2 (H1M1 + M1H2) = 2 H1H2
Le vecteur 2 H1H2 est indépendant du point M considéré. Donc :
le produit de la symétrie par rapport au plan P1 et de la symétrie par rapport au plan P2 est la translation de vecteur directeur 2 H1H2.

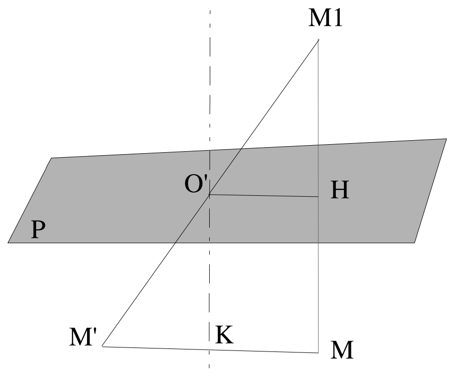
Inversement, il est aisé de montrer que toute translation peut, d'une infinité de façons, être considérée comme le produit de deux symétries par rapport à deux plans parallèles. On peut choisir l'un ou l'autre des plans de symétrie, sous la seule réserve qu'il soit perpendiculaire au vecteur directeur de la translation.

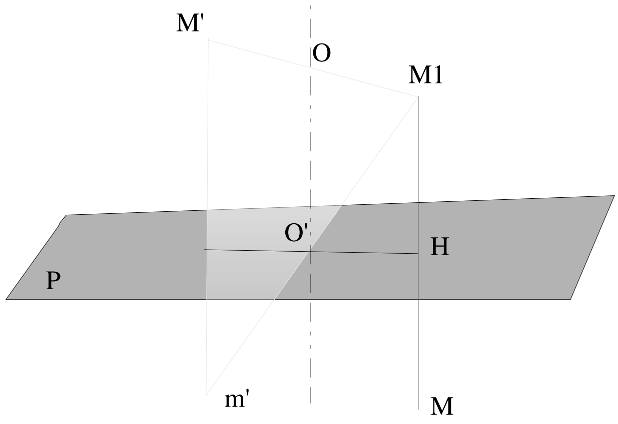
Troisième cas : les plans P1 et P2 sont sécants.
Puisque MM1 est perpendiculaire au plan Pl et MM2 perpendiculaire au plan P2, l'intersection Z des plans Pl et P2 est perpendiculaire au plan MMIM2. (figure et démonstration analogues à celles de la composition de deux symétries par rapport à deux droites sécantes).
Soit K le point où la droite Z perce ce plan. Puisque Pl est plan médiateur de MM1, on a
KM = KM1. De même
KM1 = KM2. Donc KM = KM2.
De plus, les angles :
M2KM =M2KM1+ M1KM = 2 (H2KM1 + M1KH1) = 2 H2KH1.
Par suite : **le point M, est l'homologue du point M, dans une rotation d'axe porté par Z et dont l'angle est le double de l'angle des plans Pl et P2.**

Remarque. Si les plans P1 et P2 sont perpendiculaires, le produit des symétries par rapport à ces plans est la transposition autour de leur droite d'intersection.

8. Produit d'une symétrie par rapport à un plan et d'une symétrie centrale.
Étant donnés un plan P et un point O, désignons par M1 le symétrique, par rapport à P, d'un point M quelconque et par M' le symétrique de M1 par rapport à O.
Quelle est la transformation, indépendante du point M choisi, dans laquelle le point M' est l'homologue de M?
Cette transformation s'appelle le produit de la symétrie par rapport un plan P par la symétrie de centre O.
Puisque le point O ne peut occuper, par rapport au plan P, que deux positions, il y a deux cas à étudier.
Premier cas : le point O appartient au plan P.
Le plan MM1M' contient la perpendiculaire Δ en O au plan P et cette droite, parallèle à MM1 et passant par le milieu O de M1M', coupe MM' orthogonalement en son milieu K. Par suite :
le produit de la symétrie par rapport au plan P et de la symétrie de centre O est la

transposition autour de la perpendiculaire en O au plan P.





Remarque. La transposition considérée est également le produit de la symétrie de centre O suivie de la symétrie par rapport au plan P.

Deuxième cas : le point O n'appartient pas au plan P.

Soient O' la projection orthogonale de O sur le plan P et m' le symétrique de M1 par rapport à O'. Le point M' se déduit de m' par le produit de la symétrie de centre O' par la symétrie de centre O, donc par la translation de vecteur directeur 2 O'O. (39e leçon, § 6).

Or m' est l'homologue de M dans le produit de la symétrie par rapport au plan P et de la symétrie de centre O', donc dans la transposition autour de OO'.

En résumé :

le produit d'une symétrie par rapport à un plan P et d'une symétrie de centre O est le produit de la transposition, autour de la perpendiculaire menée de O au plan P, et de la translation de vecteur directeur 2O'O (O' projection orthogonale de O sur P).

EXERCICES

531. - Démontrer qu'un cube possède neuf, et neuf seulement, plans de symétrie.

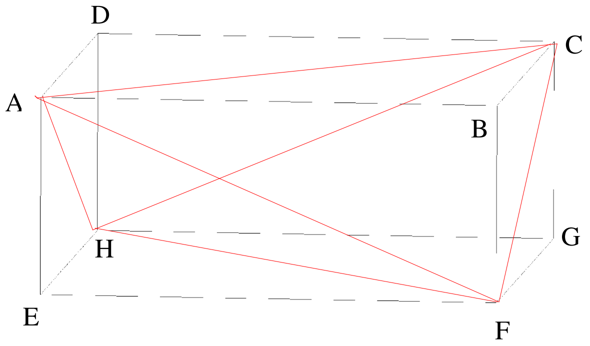
532. - On joint les centres des faces d'un cube. Quels sont les éléments de symétrie de la figure obtenue ?

533. - Étant données deux droites D1 et D2, non situées dans un même plan et non orthogonales, on considère : la famille (F1) des droites déduites de D1, par toutes les rotations d'axe Z ; la famille (F2) des droites symétriques de D2 par rapport à un plan quelconque passant par D1.

1° Démontrer que deux droites d'une même famille sont transformées l'une de l'autre par une rotation et ne sont jamais coplanaires.

2° Démontrer que deux droites appartenant à deux familles distinctes sont symétriques l'une de

l'autre par rapport à un plan passant par D1 et sont toujours coplanaires.
3° Les familles (F1) et (F2) ont-elles une droite commune ?



534. - Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle. Montrer que le tétraèdre AHFC (figure ci-contre) admet trois axes de symétrie deux à deux perpendiculaires, mais n'admet ni centre de symétrie, ni plan de symétrie.