H Prépa

Analyse

2e année
PC-PC*-PSI-PSI*

- Le cours
- De nombreux exercices
- Tous les corrigés

HACHETTE
Supérieur

H Prépa

Analyse

2e année PC-PC*-PSI-PSI*

Bernard BECK
Professeur en classes préparatoires au lycée Fénelon-Sainte-Marie à Paris

Isabelle SELON
Professeur en classes préparatoires

HACHETTE
Supérieur

Crédits photographiques

Toutes les photographies de cet ouvrage proviennent de la photothèque HACHETTE LIVRE.

Composition, mise en page et schémas : Publilog
Maquette intérieure : SG Création et Pascal Plottier
Maquette de couverture : Alain Vambacas

www.hachette-education.com
I.S.B.N. 978-2-01-181903-1

Avant-propos

L'objectif premier de cet ouvrage est la réussite aux concours et aux examens.

Pour cela, nous avons tenté de rendre intelligible et attrayante une petite partie des mathématiques : celle du programme.

Dans cette optique, nous souhaitons que ce livre soit un outil de travail efficace et adapté aux besoins des enseignants et des étudiants de tout niveau.

Le cours est agrémenté de nombreux **Exemples** et **Applications**.

Les **Exercices** aident l'étudiant à tester sa compréhension du cours, lui permettent d'approfondir sa connaissance des notions exposées... et de préparer les oraux des concours.

Les **Exercices résolus** et **TD** sont plus axés vers les écrits des concours.

L'algorithmique et le calcul formel font partie du programme des concours.

De nombreux exercices prennent en compte cette exigence ainsi que des **TD d'Algorithmique** entièrement rédigés.

Les auteurs

Sommaire

1

Séries numériques

Introduction

Archimède (environ 287-212 av. J.-C.) étudie l'aire délimitée par un arc de parabole et la corde qui le sous-tend. Il introduit alors la série :

$$1+\frac{1}{4},\quad 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16},\quad 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\cdots$$

et détermine sa limite $\frac{4}{3}$.

Le XVI^e siècle apporte un double progrès : un effort de symbolisme mathématique rend les calculs plus aisés et la notion de fonction se dégage de son origine géométrique.

Vers 1660, soucieux d'exprimer des fonctions (ainsi $\ln(1+x)$ *et* $(1+x)^{\alpha}$*) comme somme de séries, les mathématiciens s'intéressent à l'étude systématique des séries.*

Toutefois, la définition rigoureuse de la convergence et certains outils ci-dessous exposés n'apparaîtront qu'au début du XIX^e siècle, avec Abel, Cauchy et Gauss. Les travaux de Dedekind, Weierstrass et Cantor, à la fin du XIX^e siècle, permettront de compléter la théorie.

Ce chapitre vous présente, dans le langage mathématique d'aujourd'hui, cette définition et les techniques qui en découlent. De plus, nous verrons que ces outils peuvent éventuellement être mis en œuvre pour déterminer la nature d'une suite donnée, laquelle est alors transformée en une série.

OBJECTIFS

- Notion de série convergente.
- Somme et reste d'une série convergente.
- Comparaison de séries à termes positifs pour en déterminer la nature.
- Séries de Riemann.
- Comparaison à une intégrale.
- Règle de d'Alembert.
- Écriture décimale d'un réel positif (*PSI*).
- Critère de Cauchy des séries (*PSI*).
- Critère spécial des séries alternées.
- Séries absolument convergentes.
- Produit de Cauchy de séries absolument convergentes.

Dans ce chapitre, l'appellation « série » désignera uniquement des séries à termes réels ou complexes. $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Généralités

1.1. Définition d'une série

Soit $u = (u_n)$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$: $S_n = \sum_0^n u_k$. La suite ainsi définie $S = (S_n)$ est une suite d'éléments de $\mathbb{K}$, appelée **série** associée à la suite u. On la note $\sum u_n$ ou $\sum_n u_n$, s'il y a un risque de confusion sur l'indice.

L'élément de $\mathbb{K}$: $S_n = \sum_0^n u_k$ est appelé la **somme partielle** d'indice n de la série $\sum u_k$.

Exemple : La série de terme général $\left(\frac{1}{k}\right)$, c'est-à-dire la série $\sum \frac{1}{k}$, est appelée **série harmonique**.

■ Il arrivera que la suite u ne soit définie qu'à partir d'un certain rang, le plus souvent $k = 1$ ou $k = 2$. La série ne sera alors définie qu'à partir de ce rang.

■ En pratique, connaissant (u_n), la suite (S_n) des sommes partielles de la série $\sum u_k$ est définie par la formule :

$$\forall n \quad S_n = \sum_0^n u_k.$$

Réciproquement, si la suite (S_n) est connue, le terme général u_n de la série est déterminé par $S_0 = u_0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = S_n - S_{n-1}.$$

La suite u est alors parfaitement déterminée et unique.

1.2. Convergence et divergence d'une série

La **série** de terme général u_k est dite **convergente** si la suite (S_n), où $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$, converge dans $\mathbb{K}$. Sinon, elle est dite **divergente**.

Notation

Lorsque la série $\sum u_k$ converge, la limite de la suite (S_n) des sommes partielles est appelée **somme de la série** et notée $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ ou $\sum_0^{\infty} u_n$.

Rapport Mines-Ponts, 2003

« De trop nombreux étudiants confondent la notion de série et la somme d'une telle série quand elle converge. Plus généralement, on déplore un amalgame entre les notations :

$$\sum u_n, \sum_{n\geqslant 0} u_n, \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \textit{ et } \sum_{k=0}^{n} u_k. \text{ »}$$

Théorème 1

Si la série $\sum u_n$ converge, son terme général tend vers 0.

Démonstration

Le terme général de la série est : $u_n = S_n - S_{n-1}$.

Une série dont le terme général ne tend pas vers 0 diverge. Elle est dite **série grossièrement divergente**.

Il faut bien distinguer la série $\sum u_k$ de la somme, $\sum_0^{\infty} u_n$, de la série qui n'est définie que lorsque la série converge.

Exemple : Une **série géométrique** est une série associée à une suite géométrique. La série $\sum a^n$ converge si, et seulement si, $|a| < 1$. Plus généralement, pour $|a| < 1$, p fixé dans $\mathbb{N}$ et c fixé dans $\mathbb{C}$, la série géométrique

Deux séries qui diffèrent par un nombre fini de termes sont de même nature, c'est-à-dire sont simultanément convergentes ou divergentes.

de terme général $\left(c\,a^k\right)_{k\geqslant p}$ converge et a pour somme :

$$\sum_{k=p}^{\infty} c\,a^k = \frac{c\,a^p}{1-a}.$$

Lorsque $|a| \geqslant 1$ et c est non nul, la série est grossièrement divergente.

La somme d'une série géométrique convergente est donc obtenue par la formule :

$$\frac{\text{premier terme}}{1 - \text{raison}}$$

Théorème 2

La suite (u_n) converge si, et seulement si, la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge.

Démonstration

Soit $u = (u_n)$ une suite numérique. La somme partielle S_n de la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ est :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0.$$

La série converge si, et seulement si, la suite u converge.

▶ ***Pour s'entraîner : ex. 1 à 4.***

Exemple : *Nature de la série* $\sum \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n^2}}$

- La suite (S_n) des sommes partielles de la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est croissante, ainsi que celle, (T_n), de la série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$.

De plus :

$$\forall n \geqslant 2 \quad \frac{1}{n(n+1)} \leqslant \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n(n-1)}.$$

On en déduit :

$$T_n - \frac{1}{2} \leqslant S_n - 1 \leqslant T_{n-1}.$$

Les suites (S_n) et (T_n) sont donc de même nature.

- La convergence de la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ entraîne celle de la série $\sum\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)$, donc celle de la série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$, puis celle de la série $\sum \frac{1}{n^2}$.

Enfin :

$$T_N = \sum_{1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{1}^{N}\left(\frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{N+1}.$$

La série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ converge donc vers 1.

Rapport Centrale, 2001

« Il est très courant de manipuler des séries ou des intégrales alors que ce ne sont encore que des symboles. »

Cauchy, en 1821, écrivait :

« J'ai été forcé d'admettre diverses propositions qui paraîtront peut-être un peu dures ; par exemple, qu'une série divergente n'a pas de somme ».

Rapport E4A, 2002

« Quelques erreurs trop souvent rencontrées : si le terme générique de la série tend vers 0, alors celle-ci converge ; $u(n)$ est équivalent à 0, donc la série converge. »

Avec Maple

```
> Sum(1/(n*(n+1)),n=1..1000)=
sum(1/(n*(n+1)),n=1..1000); >
Sum(1/(n*(n+1)),n=1..infinity)=
sum(1/(n*(n+1)),n=1..infinity);
```

$$\sum_{n=1}^{1\,000} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1\,000}{1\,001}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

1.3. Reste d'une série convergente

Lorsque la série $\sum u_k$ converge, on peut alors, pour n fixé dans $\mathbb{N}$, définir $R_n = S - S_n$, où S est la somme de la série $\sum u_k$.

R_n est appelé **reste d'ordre n** de la série $\sum u_k$.

Théorème 3
Soit $\sum u_k$ une série convergente et (R_n) la suite des restes de cette série. Alors :

- la suite (R_n) tend vers 0 ;
- pour tout n, on a $R_n = \sum_{n+1}^{\infty} u_k$;
- pour tout n, $\sum_{0}^{\infty} u_k = S_n + R_n$.

En calcul numérique, majorer $|R_n| = |S - S_n|$, c'est majorer l'erreur commise en approximant S par S_n.

1.4. Linéarité

Théorème 4
L'ensemble des séries convergentes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et l'application qui, à une série convergente, associe sa somme, est linéaire.

- Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors la série $\sum (u_n + v_n)$ converge.
- Si la série $\sum u_n$ converge et la série $\sum v_n$ diverge, alors la série $\sum (u_n + v_n)$ diverge.
- Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, on ne peut rien dire, *a priori*, de la série $\sum (u_n + v_n)$.

Les séries $\sum \left(n + \frac{1}{2^n}\right)$ et $\sum n$ divergent, mais la série $\sum \left[\left(n + \frac{1}{2^n}\right) - n\right]$ converge et la série $\sum \left[\left(n + \frac{1}{2^n}\right) - 2n\right]$ diverge.

Application 1

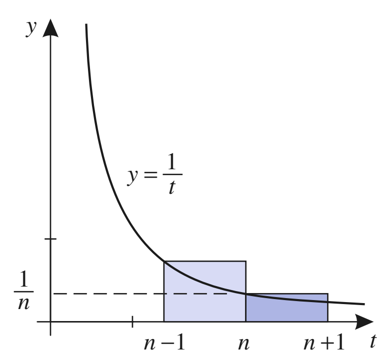
Étude de la série harmonique $\sum \frac{1}{k}$

1) *Montrer la divergence de la série harmonique par la comparaison à une intégrale.*

2) *En utilisant la comparaison à une intégrale, donner un équivalent de* $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

3) *Donner un développement asymptotique à deux termes de* S_n.

4) *En utilisant ce résultat, montrer que la série* $\sum \frac{1}{(2n+1)n}$ *converge et calculer sa somme.*



Doc. 1.

1) Montrons la divergence de la série.

La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est positive, continue et décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

On en déduit : $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

Sommons cette inégalité de $k = 1$ à n :

$$\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \int_1^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

En calculant les intégrales, on obtient :

$$\ln(n+1) \leqslant S_n \leqslant 1 + \ln(n).$$

Donc, S_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, la série harmonique diverge.

2) On obtient même, plus précisément, que $\dfrac{S_n}{\ln(n)}$ admet pour limite 1, c'est-à-dire que :

$$S_n \sim \ln(n).$$

Avec Maple :

```
> Sum(1/n,n=1..10000)
=evalf((sum(1/n,n=1..10000)));
ln(10000.);
```

$$\sum_{n=1}^{10\,000} \frac{1}{n} = 9.787606036$$

$$9.210340372$$

3) On pose, pour tout $n \geqslant 1$:

$$a_n = \sum_1^n \frac{1}{k} - \ln(n) \quad \text{et} \quad b_n = \sum_1^n \frac{1}{k} - \ln(n+1)$$

et on établit que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes. En effet :

- la suite (a_n) est décroissante ;
- la suite (b_n) est croissante ;
- $a_n - b_n = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ tend vers 0.

On note γ leur limite commune. $\gamma \approx 0{,}57$. Le nombre γ est appelée la constante d'Euler. À ce jour, on ignore si la constante d'Euler est rationnelle ou non.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

4) Remarquons tout d'abord que :

$$\frac{1}{(2n+1)n} = \frac{-2}{2n+1} + \frac{1}{n}$$

et calculons la somme partielle S_N de la série.

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{-2}{2n+1} + \ln(N) + \gamma + o(1).$$

De plus :

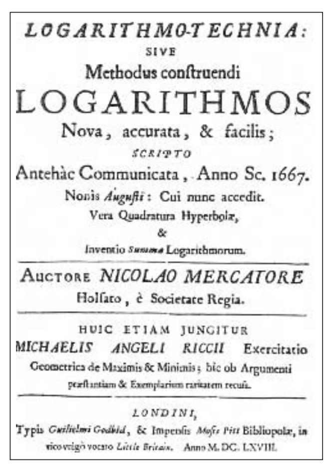
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{-2}{2n+1} &= -2\left(\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n} - 1 - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n}\right)\\ &= -2(\ln(2N+1) + \gamma + o(1)) + 2\\ &\qquad +(\ln(N) + \gamma + o(1)).\end{aligned}$$

Donc :

$$S_N = -2\ln\left(2 + \frac{1}{N}\right) + 2 + o(1).$$

Finalement, nous pouvons conclure que la série $\displaystyle\sum \frac{1}{(2n+1)n}$ converge et que sa somme est :

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{(2n+1)n} = -2\ln 2 + 2.$$


LOGARITHMO-TECHNIA:
SIVE
Methodus construendi
LOGARITHMOS
Nova, accurata, & facilis;
SCRIPTO
Antehàc Communicata, Anno Sc. 1667.
Nonis Augusti: Cui nunc accedit.
Vera Quadratura Hyperbolæ,
&
Inventio Summæ Logarithmorum.
AUCTORE NICOLAO MERCATORE
Holsato, è Societate Regia.
HUIC ETIAM JUNGITUR
MICHAELIS ANGELI RICCII Exercitatio
Geometrica de Maximis & Minimis; hic ob Argumenti
præstantiam & Exemplarium raritatem recusa.
LONDINI,
Typis Gulielmi Godbid, & Impensis Mosis Pitt Bibliopolæ, in
vico vulgò vocato Little Britain. Anno M. DC. LXVIII.

Nicolaus ***Mercator*** (1620-1687), *mathématicien allemand. Il a défini le logarithme népérien comme primitive de la fonction* $x \mapsto \dfrac{1}{x}$. *C'est lui qui, le premier, a comparé la série harmonique et le logarithme. Ses travaux concernent la trigonométrie sphérique, l'astronomie, la cosmographie. À la fin de sa vie, il participa à la construction des jeux d'eau de Versailles.*

2 Séries à termes positifs

2.1. Premiers critères

Théorème 5
La suite (S_n) des sommes partielles de la série à termes positifs $\sum u_n$ est croissante.

L'étude suivante s'applique également à des séries à termes négatifs, en adaptant les énoncés. Plus généralement, elle s'applique à toute série réelle dont les termes sont de signe constant à partir d'un certain rang.

Corollaire 5.1
Une série $\sum u_n$ de réels positifs converge si, et seulement si, la suite (S_n) des sommes partielles de cette série est majorée et, dans ce cas :

$$\sum_{0}^{\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} S_n .$$

Théorème 6
Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que, à partir d'un certain rang n_0, on ait :

$$\forall n \geqslant n_0 \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$$

Si :
- $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge ;
- $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Rapport Centrale, 2001
« Ce n'est pas parce que les sommes partielles d'une série sont bornées que celle-ci est convergente ; dans le cas envisagé, cet argument suffisait parce que la série est à termes positifs, mais encore fallait-il le dire et justifier la convergence de la série avant d'écrire l'inégalité. »

Exemple : *Étude de la série* $\sum \mathbf{sin}\left(\pi\sqrt{4n^2+2}\right)$

Remarquons que :

$$u_n = \sin\left(\pi\sqrt{4n^2+2} - 2n\pi\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{\sqrt{4n^2+2}+2n}\right).$$

Pour $n \geqslant 2$, $\dfrac{2\pi}{\sqrt{4n^2+2}+2n}$ est compris entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$, donc u_n est positif.

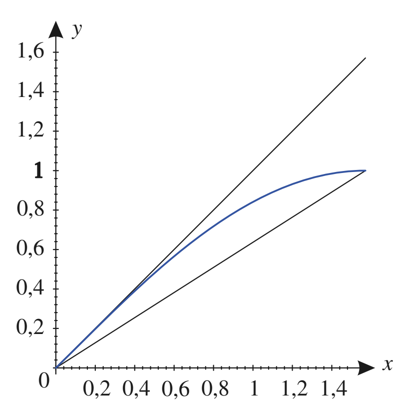
Rappelons l'inégalité $\dfrac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x$, due à la concavité de la fonction sinus sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Nous en tirons :

$$u_n \geqslant \frac{2}{\pi}\frac{2\pi}{\sqrt{4n^2+2}+2n} \geqslant 2\frac{1}{2n+1} \geqslant \frac{1}{n+1} \geqslant 0.$$

Or la série $\sum \dfrac{1}{n+1}$ diverge. Donc la série $\sum u_n$ diverge.

▶ ***Pour s'entraîner : ex. 5 à 7.***



Doc. 2. *Inégalité de concavité de la fonction sinus.*

2.2. Règle de comparaison

Théorème 7 : (Règle de comparaison)

Soit (u_n) et (α_n) des suites de nombres réels positifs tels que $u_n = O(\alpha_n)$, alors la convergence de la série $\sum \alpha_n$ implique celle de la série $\sum u_n$.

Par contraposée

Soit (u_n) et (α_n) deux suites de nombres réels positifs tels que $u_n = O(\alpha_n)$, la divergence de la série $\sum u_n$ implique celle de la série $\sum \alpha_n$.

Démonstration

L'hypothèse $u_n = O(\alpha_n)$ se traduit par :

$$\exists M \in \mathbb{R}^{+*} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant u_n \leqslant M\,\alpha_n.$$

Le *théorème* 6 permet de conclure.

Corollaire 7.1

Soit (u_n) et (v_n) des suites de nombres réels positifs telles que $u_n \sim v_n$. Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature, c'est-à-dire qu'elles sont simultanément convergentes ou divergentes.

Rapport Centrale, 1997

« La règle des équivalents ne s'applique qu'aux séries à termes réels de signe constant. Le jury a trop souvent entendu $u_n \sim \frac{(-1)^n}{n}$, *donc* $\sum u_n$ *converge. »*

► ***Pour s'entraîner : ex. 8 et 9.***

Exemple : *La série* $\sum \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt[3]{n^3+a\,n^2+b\,n+c}$

Soit $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt[3]{n^3+a\,n^2+b\,n+c}$.

Modifions l'expression de u_n afin de pouvoir préciser la nature de la série.

$$\begin{aligned} u_n &= n\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} - n\sqrt[3]{1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}} \\ &= \left(\frac{1}{2}-\frac{a}{3}\right) + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{b}{3}+\frac{a^2}{9}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Pour que la série converge, il est nécessaire que :

$$a = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad b = \frac{15}{8}.$$

Réciproquement, si $a = \frac{3}{2}$ et $b = \frac{15}{8}$, alors $u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et la série $\sum u_n$ converge.

L'hypothèse « u_n est de signe constant » est indispensable. Considérez la série $\sum \left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right]$ *pour vous en convaincre.*

2.3. Les séries de Riemann

On appelle **série de Riemann** toute série de terme général $\frac{1}{n^a}$, où a est un réel fixé.

Théorème 8

La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^a}$ converge si, et seulement si, $a > 1$.

Nous démontrerons simplement avec les séries de Fourier que :

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

et que :

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Pour p entier naturel non nul, on sait prouver que :

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^{2p}} = \pi^{2p} \times q,$$

où q est rationnel, mais on ignore actuellement ce qu'il en est de $\sum_1^\infty \frac{1}{n^{2p+1}}$ pour $p \geqslant 2$.

Apéry a démontré, dans les années 1970, que la somme $\sum_1^\infty \frac{1}{n^3}$ est un irrationnel.

Démonstration

- Pour $a \leqslant 0$, la série est grossièrement divergente.
- Pour $b > 0$, la série de terme général $u_k = \dfrac{1}{k^b} - \dfrac{1}{(k+1)^b}$ converge.

Or $u_k = \dfrac{1}{(k+1)^b}\left(\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^b - 1\right) \sim \dfrac{b}{k^{b+1}}$.

Ainsi, pour $b > 0$, la série $\sum \dfrac{1}{k^{b+1}}$ converge, ce qui nous donne la convergence de la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{k^a}$ lorsque $a > 1$.

- Pour a dans $]0,1]$, $\dfrac{1}{n} = O\left(\dfrac{1}{n^a}\right)$. La divergence de la série harmonique $\sum \dfrac{1}{n}$ entraîne celle de la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^a}$.

Exemple

Étudions la nature de la série $\sum \dfrac{1}{n^a + \text{Arctan}\,(n)}$, où a est un réel fixé.

Si $a \leqslant 0$, la série est grossièrement divergente.

Si $a > 0$, alors :

$$\frac{1}{n^a + \text{Arctan}\,(n)} \sim \frac{1}{n^a}.$$

La série $\sum \dfrac{1}{n^a + \text{Arctan}\,(n)}$ converge si, et seulement si, $a > 1$.

► ***Pour s'entraîner : ex. 10.***

2.4. Comparaison à une intégrale (*PSI*)

Théorème 9

Soit f une application de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}^+$, continue par morceaux, positive et décroissante.

La série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)$ est convergente.

Démonstration

Puisque f est décroissante, positive, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k-1),$$

donc :

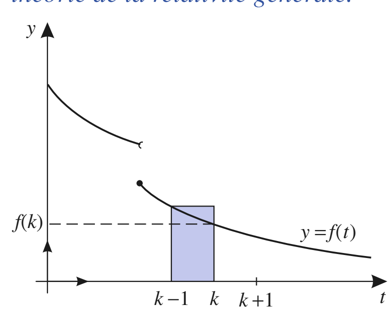
$$0 \leqslant u_k = \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t - f(k) \leqslant f(k-1) - f(k).$$

La série est à termes positifs, étudions la somme partielle S_n.

$$S_n = \sum_1^n u_k \leqslant \sum_1^n \Big(f(k-1) - f(k)\Big) = f(0) - f(n) \leqslant f(0).$$

Les sommes partielles de la série sont majorées donc la série converge.

Bernhard Riemann (1826-1866), *mathématicien allemand, élève de Gauss, renouvela profondément les mathématiques de son temps.*
Peu satisfait de la présentation trop intuitive de l'intégrale, il en donne une construction rigoureuse, parallèlement à Cauchy.
D'autres théories de l'intégration (Lebesgue...) verront le jour plus tard.
Son travail en Analyse (1851) *le conduit à considérer des fonctions de la variable complexe, souvent définies comme sommes d'une série.*
Les notions qu'il introduit en Géométrie différentielle (1854) *permettront à Einstein de développer la théorie de la relativité générale.*



Doc. 3. *Comparaison avec une intégrale.*

Rapport Mines-Ponts, 2003

« Les encadrements demandés pour S_n s'appuient sur la technique de comparaison série-intégrale, ils posent des difficultés à un nombre important de candidats. »

Théorème 10

Soit f une application de $\mathbb{R}^+$ dans lui-même, continue par morceaux, positive et décroissante. La série $\sum f(n)$ converge si, et seulement si, la suite $\left(\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)$ admet une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$.

Rapport Mines-Ponts, 2003

« Le jury a été peiné de voir que certains candidats ne parviennent pas à obtenir un équivalent simple de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1}$. »

Autres écritures possibles de u_n :

- $u_n = \int_{n-1}^{n} [f(t) - f(n)]\,\mathrm{d}t$;
- Lorsque f est de classe $\mathcal{C}^1$, $u_n = -\int_{n-1}^{n} (t-n+1) f'(t)\,\mathrm{d}t$.

▶ ***Pour s'entraîner : ex. 11.***

Application 2

Les séries de Riemann, encore et toujours...

1) *Utiliser la comparaison avec une intégrale pour donner une condition nécessaire et suffisante de convergence des séries de Riemann* $\sum \frac{1}{n^a}$ $(a > 0)$.

2) *Lorsque la série de Riemann* $\sum \frac{1}{n^a}$ *converge, donner un équivalent du reste.*

1) La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^a}$ est définie, positive, continue et décroissante sur $[1, +\infty[$.

Donc la série $\sum \frac{1}{k^a}$ converge si, et seulement si, la suite $\left(\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)$ admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$.

- Si $a \neq 1$:
$$\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^a} = \frac{1}{-a+1}(n^{-a+1} - 1)$$
qui admet une limite réelle lorsque n tend vers $+\infty$ si, et seulement si, $-a+1 < 0$.
- Si $a = 1$:
$$\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln n$$
qui tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

En définitive, la série de Riemann $\sum \frac{1}{k^a}$ converge si, et seulement si, $a > 1$.

2) Supposons $a > 1$. On a, pour tout $n > 2$:
$$\frac{1}{-a+1}[(n+1)^{-a+1} - n^{-a+1}] = \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^a} \leqslant \frac{1}{n^a} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^a} = \frac{1}{-a+1}[n^{-a+1} - (n-1)^{-a+1}]$$

Or, la série $\sum[(n+1)^{-a+1} - n^{-a+1}]$ converge car la suite $((n+1)^{-a+1})$ tend vers 0. Donc :
$$\sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{-a+1}[(k+1)^{-a+1} - k^{-a+1}] \leqslant R_n = \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{k^a} \leqslant \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{-a+1}[k^{-a+1} - (k-1)^{-a+1}].$$

Soit :
$$\frac{(n+1)^{-a+1}}{a-1} \leqslant R_n \leqslant \frac{n^{-a+1}}{a-1}.$$

On en déduit $R_n \sim \frac{n^{-a+1}}{a-1}$.

2.5. Règle de d'Alembert

Théorème 11 : Règle de d'Alembert

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels strictement positifs telle que la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge.

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, alors la série est convergente.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, alors la série est divergente.

Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783), *mathématicien français, fut un pionnier de l'étude des équations différentielles et de leur utilisation en physique. Il tente de fournir, en* 1746, *la première preuve du théorème fondamental de l'Algèbre. Mais celle-ci n'est pas exacte. Gauss, en* 1799, *donne une démonstration rigoureuse. Corédacteur de l'*Encyclopédie, *d'Alembert y définit la dérivée d'une fonction comme la limite du taux d'accroissement (volume* 4, *article « Différentiel »).*

Démonstration

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels strictement positifs.

- Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = L < 1$.

Fixons $\varepsilon > 0$ tel que $L + \varepsilon < 1$:

$$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \in \left]L - \varepsilon, L + \varepsilon\right[.$$

Donc, pour tout $n > N$, $u_{n+1} < (L+\varepsilon)u_n$.

Une récurrence simple nous donne alors :

$$\forall n > N \quad 0 \leqslant u_n < (L+\varepsilon)^{n-N}(u_N).$$

Par conséquent, à partir du rang N, les termes de la série sont majorés par ceux d'une série géométrique de raison $(L+\varepsilon)$, positive et strictement inférieure à 1. Ceci assure la convergence de la série.

- Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = L > 1$.

Fixons $\varepsilon > 0$ tel que $L - \varepsilon > 1$. De même :

$$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \in \left]L - \varepsilon, L + \varepsilon\right[.$$

Puis :

$$\forall n > N \quad (L-\varepsilon)^{n-N}(u_N) < u_n.$$

Le terme général de la série tend vers $+\infty$, donc la série diverge.

Exemple

La série $\sum \dfrac{n!}{n^n}$ est telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \mathrm{e}^{-1}$. Donc, elle converge et son terme général tend vers 0. Nous retrouvons, $n! = o(n^n)$.

Remarques

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, la règle de d'Alembert ne s'applique pas. On ne peut rien dire, *a priori*, concernant le comportement de la série.

Il suffit de considérer les séries de Riemann pour s'en convaincre.

- Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to 1^+$ ou si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, alors u_n ne tend pas vers 0, car la suite (u_n) croît et la série est donc divergente.

► ***Pour s'entraîner : ex. 13.***

3 Exemples d'études de séries

3.1. Utilisation de l'inégalité de Taylor-Lagrange

Rappel

Vous avez étudié, en Première année, l'inégalité de Taylor-Lagrange. Si f est une application de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors :
Pour tout (a, x) de I^2, en notant $J = [\min(a, x), \max(a, x)]$:

$$\left| f(x) - f(a) - \sum_{p=1}^{n} \frac{(x-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) \right| \leqslant \frac{\left|(x-a)^{n+1}\right|}{(n+1)!} \sup_{t \in J} \left| f^{(n+1)}(t) \right|.$$

Exemples

- La fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$ et $(\exp)^{(n)} = \exp$.

Donc, pour tout réel x et tout n dans $\mathbb{N}^*$, on a :

$$\left| \mathrm{e}^x - \sum_{p=0}^{n} \frac{x^p}{p!} \right| \leqslant \frac{\left|x^{n+1}\right|}{(n+1)!} \mathrm{e}^{|x|}.$$

Fixons un réel x :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\mathrm{e}^x - \sum_{p=0}^{n} \frac{x^p}{p!} \right) = 0.$$

D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{e}^x = \sum_{0}^{\infty} \frac{x^n}{n\,!}$$

- Les fonctions cosinus et sinus sont de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$. De même :

$$\left| \sin x - \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} \right| \leqslant \frac{\left|x^{2n+2}\right|}{(2n+2)!}$$

et

$$\left| \cos x - \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} \right| \leqslant \frac{\left|x^{2n+1}\right|}{(2n+1)!}.$$

Nous en déduisons :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin x = \sum_{0}^{\infty} (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} \quad \text{et} \quad \cos x = \sum_{0}^{\infty} (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!}$$

Rapport X, 1997

Les aventures de E. et C., l'Examinateur et le Candidat.

« Le soleil se lève timidement sur le lac. C., une agréable candidate qui tombe sur le calcul exact de plusieurs sommes de séries, ne s'affole pas. Elle remarque les télescopages, écrit avec soin les premiers termes, fixe calmement les indices de ses sommes partielles. E. pense à tous les candidats qui ont paniqué pour écrire une double somme, réindicer une somme de k à $n-k$ ou pour savoir si la somme s'arrêtait à n, $n-1$ ou $n+1$, alors qu'une petite vérification en $n = 0$ ou 1 permet en général de fixer sans erreurs ces détails. C. a semblé perdre du temps, mais elle en gagne... »

Rapport Centrale, 1997

« Il est regrettable de perdre de précieuses minutes avant de reconnaître la somme $\sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$ *. »*

3.2. Les séries de Bertrand $\sum \dfrac{1}{n^a(\ln n)^b}$

3.2.1 Étude de la nature de la série lorsque $a = 1$

La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t(\ln t)^b}$ est positive, continue et dérivable sur $]1, +\infty[$ et :

$$f'(t) = -\frac{\ln t + b}{t^2(\ln t)^{b+1}}.$$

Donc, pour $t > \mathrm{e}^{-b}$, la fonction f est décroissante.

La nature d'une série étant indépendante de la valeur des premiers termes, la série $\sum \dfrac{1}{n(\ln n)^b}$ converge si, et seulement si, la suite $\left(\displaystyle\int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)$ admet une limite (*programme PSI*).

- Si $b \neq 1$, on a, en posant $u = \ln t$:

$$\int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\ln 2}^{\ln(n)} \frac{\mathrm{d}u}{u^b} = \frac{1}{-b+1}\left((\ln n)^{-b+1} - (\ln 2)^{-b+1}\right)$$

qui admet une limite réelle en $+\infty$ si, et seulement si, $-b + 1 < 0$.

- Si $b = 1$:

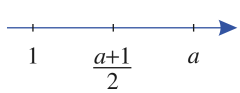
$$\int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t = \int_2^n \frac{1}{t\,\ln t}\,\mathrm{d}t = \int_{\ln 2}^{\ln(n)} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln(\ln(n)) - \ln(\ln 2).$$

Donc, la série de Bertrand $\sum \dfrac{1}{n(\ln n)^b}$ converge si, et seulement si, $b > 1$.

3.2.2 Étude de la série lorsque $a \neq 1$

On va comparer la série de Bertrand $\sum \dfrac{1}{n^a(\ln n)^b}$ à une série de Riemann.

- Si $a > 1$:



Alors :

$$\frac{1}{n^a(\ln n)^b} = o\left(\frac{1}{n^{(a+1)/2}}\right).$$

La convergence de la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^{(a+1)/2}}$ permet alors de conclure à la convergence de la série de Bertrand $\sum \dfrac{1}{n^a(\ln n)^b}$.

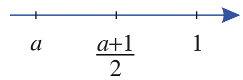
Joseph Bertrand (1822-1900), *mathématicien français, suivait, à* 11 *ans, les cours de préparation à l'École Polytechnique. Ses travaux portent sur la géométrie différentielle et les probabilités. Il conjectura, en* 1845*, l'existence, pour tout entier* $n > 3$, *d'un nombre premier compris entre* n *et* $2n - 2$. *Ce résultat fut démontré, en* 1850*, par Tchebychev et amélioré, en* 1931*, par Breusch. Pour tout entier* $n \geqslant 48$, *il existe un nombre premier compris entre* n *et* $\dfrac{9n}{8}$.

L'étude des séries de Bertrand nous permet de mettre en œuvre des techniques « classiques » d'étude de séries à termes positifs. Toutefois, les conditions de convergence de ces séries ne sont pas au programme. Il est par contre indispensable de savoir, soit dans le cas général, soit avec des valeurs particulières de a et b, déterminer si une telle série converge.

Rapport TPE, 1997

« Rappelons que si un résultat hors programme (théorème de Césaro, Règle de Bertrand, constante d'Euler) est utilisé, l'examinateur peut en demander la démonstration. »

- Si $a < 1$:



Alors : $$\frac{1}{n^{(a+1)/2}} = o\left(\frac{1}{n^a(\ln n)^b}\right).$$

Puisque la série $\sum \frac{1}{n^{(a+1)/2}}$ diverge, il en est de même de $\sum \frac{1}{n^a(\ln n)^b}$.

3.3. Développement décimal d'un nombre réel positif (*PSI*)

3.3.1 Bref rappel sur les entiers

Chacun sait, depuis l'école primaire, que l'écriture (en base 10) $\boldsymbol{n = 17\,025}$ signifie que :

$$\boldsymbol{n = 5 + 2 \times 10 + 0 \times 100 + 7 \times 1\,000 + 1 \times 10\,000.}$$

Si $r_0, r_1, \ldots, r_{k-1}$ sont les chiffres de l'écriture en base 10 de n :

$$r_j \in \{0, \ldots, 9\} \quad \text{et} \quad n = \sum_{j=0}^{k-1} r_j 10^j$$

La méthode suivante permet de calculer les chiffres $(r_j)_{0 \leqslant j \leqslant k}$:

r_i est le reste de la division euclidienne par 10 de la partie entière de $\boldsymbol{\frac{n}{10^i}}$.

3.3.2 L'approche expérimentale

Lorsque on écrit $\pi = 3{,}141\,592\,6\ldots$, on est certain que :

$$3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1\,000} + \frac{5}{10\,000} = 3{,}141\,5 \leqslant \pi \leqslant 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1\,000} + \frac{6}{10\,000} = 3{,}141\,6.$$

Une version moderne, en anglais, pour retenir les premières décimales de π :

« How I want a drink, alcoholic of course, after the heavy lectures involving quantum mechanics. All of thy geometry, Herr Planck, is fairly hard... »

La proposition suivante va nous aider à comprendre cette notation.

Théorème 12

Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'entiers compris entre 0 et 9. Alors :

- la série numérique $\sum a_k \frac{1}{10^k}$ est convergente ;
- sa somme s est inférieure ou égale à 1 ;
- pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} \leqslant s \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^n}.$$

Rapport ENS Cachan, 2000

« Confusion entre les o() et les O() pour la convergence de séries. »

*Les nombres sont étudiés par **Euclide** (environ 640-546 av. J.-C.) dans les livres 7, 8 et 9 des* Éléments. *Il y formule de nombreuses propositions arithmétiques. La divisibilité est étudiée dans le livre 7, et le livre 9 nous fournit la démonstration (encore enseignée de nos jours) de l'existence d'une infinité de nombres premiers.*

Ce système de numération, dit de position, nous vient de l'Inde, en passant par les savants arabes pour arriver en Occident au Moyen-Âge.

Voir le site : « A history of Pi » à l'adresse : www.groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/.

Démonstration

La série $\sum a_k \dfrac{1}{10^k}$ est une série à termes réels positifs et, pour tout k :

$$0 \leqslant a_k \frac{1}{10^k} \leqslant \frac{9}{10^k}.$$

Majorée par la série géométrique convergente $\sum \dfrac{9}{10^k}$, elle converge.

De plus : $$s \leqslant \sum_1^{\infty} 9 \cdot 10^{-k} = \frac{9}{10} \frac{1}{1 - 10^{-1}} = 1.$$

Enfin, puisque la série $\sum a_k \dfrac{1}{10^k}$ est à termes positifs, sa somme s vérifie pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \frac{1}{10^k} \leqslant s \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{1}{10^k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \frac{1}{10^k}.$$

En utilisant $a_k \leqslant 9$ et la convergence de la série $\sum 9 \dfrac{1}{10^k}$, on obtient :

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \frac{1}{10^k} \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} 9 \frac{1}{10^k} = \frac{9}{10^{n+1}} \frac{1}{1 - 10^{-1}} = \frac{1}{10^n}.$$

Comment apparut la notation π ?

Oughtred, en 1647, utilisa le symbole d/π pour noter le quotient du diamètre d'un cercle à sa circonférence.

David Gregory, en 1697, nota π/r le rapport de la circonférence d'un cercle au rayon.

William Jones, en 1706, écrivit le premier le symbole π avec sa signification actuelle.

Euler adopta ce symbole en 1737. Il devint alors rapidement une notation standard.

π est la première lettre du mot grec signifiant « périmètre ».

3.3.3 Deux suites distinctes peuvent-elles représenter le même nombre ?

Soit (a_n) et (b_n) deux suites distinctes de $\{0, 1, \ldots, 9\}^{\mathbb{N}^*}$.
L'ensemble $\{k \in \mathbb{N}^* \mid a_k \neq b_k\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$ et admet donc un plus petit élément que nous notons N.

Pour simplifier la rédaction, supposons $a_N < b_N$.

Alors quatre cas sont possibles :

Ainsi, par exemple :
$0{,}123\,459\,999\,9\ldots = 0{,}123\,460\,00\ldots$
Ici : $N = 5$.

1) $b_N > 1 + a_N$. Dans ce cas :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{a_k}{10^k} + \frac{a_N}{10^N} + \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k} \; ; \text{ or : } \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k} \leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{1}{10^N}.$$

$0{,}12345abc\ldots < 0{,}12347def\ldots$,
car :
$0{,}12345abc\ldots \leqslant 0{,}1234600\ldots$
$< 0{,}12347def\ldots$

Donc : $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} \leqslant \sum_{k=1}^{N-1} \frac{a_k}{10^k} + \frac{a_N}{10^N} + \frac{1}{10^N} < \sum_{k=1}^{N-1} \frac{b_k}{10^k} + \frac{b_N}{10^N} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{10^k}.$$

D'où : $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{10^k}.$$

2) $b_N = 1 + a_N$ et il existe $m > 0$ tel que $b_{N+m} > 0$

Vous montrerez de même que :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{10^k}.$$

$0{,}12345abc\ldots < 0{,}12346..1\ldots$, car :
$0{,}12345abc\ldots \leqslant 0{,}12346000\ldots$
$< 0{,}12346..1\ldots$

3) $b_N = 1 + a_N$ et $(\forall\, k > 0 \;\; b_{N+k} = 0)$ et $(\exists\, m > 0 \;\; a_{N+m} < 9)$.

La conclusion est identique.

$0{,}123458\ldots < 0{,}1234600\ldots$, car :
$0{,}123458\ldots < 0{,}123459\ldots$
$= 0{,}1234600..$

4) $b_N = 1 + a_N$ et $(\forall\, k > 0 \;\; b_{N+k} = 0$ et $a_{N+k} = 9)$.

Dans ce cas, l'égalité $\sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{1}{10^N}$ permet de conclure que :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{10^k}.$$

On retrouve :
0,1234599... = 0,1234600...

En conclusion, les deux suites distinctes (a_n) et (b_n) représentent le même nombre si, et seulement si :

- ce nombre x est un décimal : $x = b_0, b_1 ... b_n$;
- la suite (a_n) est définie par : $\begin{cases} \forall k \leqslant n-1 \quad b_k = a_k \\ b_n = 1 + a_n \\ \forall k > n \quad a_k = 9 \end{cases}$

La représentation $x = a_0, a_1 .....a_n 999....$ est appelée **représentation décimale** illimitée ou **impropre** de x. Tout nombre décimal admet donc deux représentations décimales, dont l'une est impropre.

3.3.4 Un nombre réel non décimal admet une représentation décimale

Soit x un réel, non décimal, de $]0, 1]$ et a_i le reste de la division euclidienne de $\mathrm{E}(10^i x)$ par 10.

On montre par récurrence que, pour tout i de $\mathbb{N}^*$:

$$10^i x = \sum_{k=1}^{i-1} a_k \, 10^{i-k} + a_i + r_i, \quad r_i \in [0, 1[.$$

Tout réel admet donc une représentation décimale $x = \sum_{1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$ où :

a_i est le reste de la division euclidienne de $\mathrm{E}(10^i x)$ par 10.

Avec la TI :
$a_i = Mod(Floor(10\hat{}\ i * x), 10)$

▶ *Pour s'entraîner : ex. 14.*

4 Séries de nombres réels ou complexes

4.1. Convergence des séries complexes

Théorème 13
Une série $\sum u_n$ de complexes converge si, et seulement si, les séries réelles $\sum \mathrm{Re}\,(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}\,(u_n)$ convergent.

Démonstration

Soit $\sum u_n$ une série de complexes et S la suite des sommes partielles associées.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}\,(u_k) + \mathrm{i} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Im}\,(u_k)$.

La convergence de la suite complexe (S_n) équivaut à la convergence des deux suites réelles :

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}\,(u_k)\right) \quad \text{et} \quad \left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{Im}\,(u_k)\right),$$

donc à la convergence des séries réelles $\sum \mathrm{Re}\,(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}\,(u_n)$.

Exemple : Nature de la série $\sum \dfrac{\sin(n)}{2^n}$

Introduisons la série $\sum \dfrac{\cos(n)}{2^n}$ et considérons la série complexe :

$$\sum \left(\frac{\cos(n)}{2^n} + \mathrm{i}\,\frac{\sin(n)}{2^n}\right) = \sum \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n}}{2^n}.$$

Il s'agit d'une série géométrique de raison $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}{2}$. Or $\left|\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}{2}\right| < 1$, donc les trois séries convergent. Vous calculerez leurs sommes.

4.2. Critère de Cauchy (*PSI*)

Une suite (x_p) de réels ou de complexes est appelée **suite de Cauchy** lorsqu'elle vérifie la condition :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall (p,k) \in \mathbb{N}^2 \qquad (p \geqslant N \quad \Rightarrow \quad |x_{p+k} - x_p| \leqslant \varepsilon).$$

Nous admettons provisoirement qu'une suite de Cauchy de réels ou de complexes converge. Ce résultat sera abordé dans le *chapitre* 2, dans un cadre plus général.

Théorème 14 : Critère de Cauchy pour les séries

La série de terme général (u_k) converge si, et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall (n,p) \in \mathbb{N}^{*2} \quad n \geqslant N \quad \Rightarrow \quad \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| \leqslant \varepsilon$$

Rapport Mines-Ponts, 2001

« Questions de cours auxquelles les étudiants n'ont pas su répondre : ...critère de Cauchy pour la convergence des séries numériques... »

Rapport X-ESPCI, 2001

« Le critère de Cauchy est rarement utilisé ou cité spontanément pour étudier la convergence d'une suite ou d'une série. »

Démonstration

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels ou complexes. La série converge si, et seulement si, la suite (S_n) des sommes partielles converge, donc si, et seulement si, c'est une suite de Cauchy, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall (n,p) \in \mathbb{N}^{*2} \quad n \geqslant N \quad \Rightarrow \quad |S_{n+p} - S_n| \leqslant \varepsilon.$$

La formule demandée en découle.

▶ ***Pour s'entraîner : ex. 15.***

4.3. Séries alternées

Une **série** réelle, de terme général u_n, est dite **alternée** lorsque la suite $((-1)^n u_n)$ est de signe constant.

Rapport X-ESPCI, 2001

« Utilisation abusive du critère des séries alternées ainsi $\sum (-1)^k x^k$ *même lorsque* $x < 0$ *. »*

Théorème 15 : Critère spécial des séries alternées

Soit $\sum u_n$ une série alternée telle que la suite $(|u_n|)$ tende vers 0 en décroissant.

- Alors la série $\sum u_n$ converge.
- De plus, sa somme est comprise entre deux sommes partielles consécutives.
- Pour tout n, $R_n = \sum_{n+1}^{\infty} u_k$ est du signe de u_{n+1} et $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$.

Résultat effectif de majoration du reste d'une série convergente, cette inégalité est très importante pour les calculs numériques.

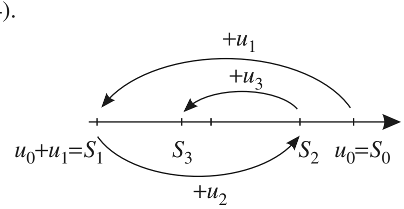
Rapport Mines-Ponts, 2003

« Beaucoup de candidats pensent que la somme d'une série alternée convergente est toujours du signe du premier terme ou que la valeur absolue de son n-ième reste partiel est toujours majorée par la valeur absolue du premier terme négligé, cela sans s'être assuré que le critère spécial était vérifié. »

Démonstration

Soit $\sum u_n$ une série alternée telle que la suite $(|u_n|)$ tende vers 0 en décroissant.

Supposons, pour la démonstration, que les termes u_{2n} soient positifs et les termes u_{2n+1} négatifs (*doc.* 4).



Doc. 4. *Critère spécial des séries alternées.*

Considérons les deux suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}).
La suite (S_{2n}) est décroissante, car :

$$S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} + u_{2n+1} = |u_{2n+2}| - |u_{2n+1}| \leqslant 0.$$

La suite (S_{2n+1}) est croissante, car :

$$S_{2n+1} - S_{2n-1} = u_{2n+1} + u_{2n} = |u_{2n}| - |u_{2n+1}| \geqslant 0.$$

$S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1}$, donc la différence tend vers 0. Les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. Par conséquent, la suite (S_n) des sommes partielles converge et sa limite S est telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n}.$$

Les deux premiers points sont démontrés.

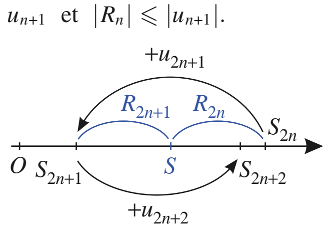
L'inégalité obtenue se traduit immédiatement sur les restes par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S - R_{2n+1} \leqslant \sum_{0}^{\infty} u_k = S \leqslant S - R_{2n}.$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; R_{2n} \leqslant 0 \leqslant R_{2n+1}$$

R_n est donc du signe de u_{n+1} et $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$.



Doc. 5. *Critère spécial des séries alternées.*

Rapport Mines-Ponts, 2000

« Le critère spécial sur les séries alternées est souvent cité mais l'hypothèse de la décroissance à partir d'un certain rang du module du terme général de la série est oubliée ou n'est pas vérifiée ! L'encadrement qui en résulte n'est pas donné. »

Le *théorème* s'applique à une série $\sum u_n$ qui ne vérifierait le critère qu'à partir d'un certain rang N. Les inégalités concernant sa somme et son reste ne sont alors vérifiées qu'à partir du rang N.

Exemple

La série $\sum \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ converge, car elle est alternée et la suite $\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)$ tend vers 0 en décroissant.

▶ **Pour s'entraîner : ex. 16.**

Application 3

Série de Riemann alternée

1) *Donner la nature de la série* $\sum u_n$, *avec* $u_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^\alpha}$ *et* α *est un réel.*

2) *Lorsque* $\alpha = 1$, *calculer la somme de la série.*

3) *Donner la nature des séries* $\sum \frac{(-1)^n + \pi}{(n+1)}$, $\sum \frac{(-1)^n n + 1}{n^2}$.

1) Cette série est alternée.

Pour $\alpha \leqslant 0$, le terme général ne tend pas vers 0. La série est grossièrement divergente.
Pour $\alpha > 0$, la suite $(|u_n|)$ tend vers 0 en décroissant. Le critère spécial des séries alternées permet d'affirmer la convergence de la série.

2) Calcul de la somme $\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n+1}$.

On a :

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=0}^n \int_0^1 (-t)^k \, \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+t} \, \mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{(-1)^n t^{n+1}}{1+t} \, \mathrm{d}t.$$

Or : $\left| \int_0^1 \frac{(-1)^n t^{n+1}}{1+t} \, \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_0^1 t^{n+1} \, \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n+2}$.

Donc :

$$\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t} \, \mathrm{d}t = \ln(2).$$

Avec Maple

```
> Sum((-1)^n/(n+1),n=0..100)
=evalf((sum((-1)^n/(n+1),
n=0..100)); > evalf(ln(2));
```

$$\sum_{n=0}^{100} \frac{(-1)^n}{n+1} = .6980731694$$

$$.6931471806$$

3) La série $\sum \frac{(-1)^n + \pi}{(n+1)}$ apparaît comme la somme d'une série convergente et d'une série divergente, elle diverge.

La série $\sum \frac{(-1)^n n + 1}{n^2}$ apparaît comme la somme de deux séries convergentes, elle converge.

4.4. Séries de nombres réels ou complexes absolument convergentes

4.4.1 Définition

Une série $\sum u_n$ est dite **absolument convergente** lorsque la série $\sum |u_n|$ converge.

Théorème 16
Toute série absolument convergente est convergente.

De plus, on a alors : $\left| \sum_0^\infty u_n \right| \leqslant \sum_0^\infty |u_n|$.

Rapport Centrale, 1997

« Démontrer que la suite (S_n) des sommes partielles d'une série $\sum u_n$ est bornée ne suffit pas pour pouvoir affirmer que la série est absolument convergente. »

Démonstration

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels telle que la série $\sum |u_n|$ converge.
Remarquons que : $-|u_n| \leqslant u_n \leqslant |u_n|$. Nous en déduisons : $0 \leqslant u_n + |u_n| \leqslant 2|u_n|$, puis la convergence de la série $\sum u_n$.

Pour démontrer la convergence absolue de la série $\sum u_n$, nous disposons de tous les outils étudiés plus tôt concernant la convergence des séries à termes positifs et, en particulier, la règle de d'Alembert, le théorème de comparaison de séries à termes positifs et la comparaison avec une intégrale.

Une série convergente, mais non absolument convergente, est dite **semi-convergente**.

Ainsi, la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est semi-convergente.

▶ ***Pour s'entraîner : ex. 17 et 18.***

Exemples : Trois séries

- La série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Elle vérifie le critère spécial des séries alternées, donc converge.

- La série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$.

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}} &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}\\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n^{3/2}} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).\end{aligned}$$

Les séries $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $\displaystyle\sum \frac{1}{2n^{3/2}}$, $\displaystyle\sum \left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n^{3/2}}\right]$ convergent.

La série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ converge en tant que somme de séries convergentes.

- La série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^{-1}\\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).\end{aligned}$$

La convergence de la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, et la divergence de la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n}$ permettent de conclure à la divergence de la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

Rapport Mines-Ponts, 2000

« Pour des séries dont le terme général n'a pas un signe constant, il n'y a pas que la convergence absolue ou le critère spécial des séries alternées : par exemple il est possible d'utiliser un développement asymptotique du terme général. »

4.4.2 Exemples classiques

4.4.2.1 *La série géométrique*

La série $\sum z^n$ est absolument convergente si, et seulement si, $|z| < 1$ sa somme est alors $\dfrac{1}{1-z}$.

En outre, si $|z| \geqslant 1$, la série diverge grossièrement. Cette série n'est jamais semi-convergente.

4.4.2.2 *La fonction exponentielle complexe*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{e}^x = \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin x = \sum_0^\infty (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} \quad \text{et} \quad \cos x = \sum_0^\infty (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!}$$

La série $\sum \frac{|z|^n}{n!}$ est la série réelle convergente de somme $\mathrm{e}^{|z|}$. Pour tout complexe z, la série complexe $\sum \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente. On peut alors définir la fonction exponentielle :

$$\exp : \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \exp(z) = \mathrm{e}^z = \displaystyle\sum_0^\infty \frac{z^n}{n!} \end{cases}$$

En particulier, pour un réel quelconque x, calculons $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}$:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} = \sum_0^\infty \frac{(\mathrm{i}\,x)^n}{n!} = \sum_0^\infty (-1)^p \frac{x^{2\,p}}{(2\,p)!} + \mathrm{i} \sum_0^\infty (-1)^p \frac{x^{2\,p+1}}{(2\,p+1)!} = \cos x + \mathrm{i} \sin x$$

Ceci justifie la définition introduite en Première année :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} = \cos x + \mathrm{i} \sin x$$

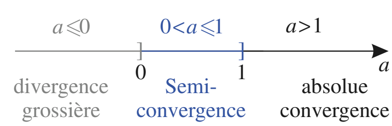
4.4.2.3 *Séries de Riemann alternées*

Il s'agit des séries de la forme $\sum u_n$, avec $u_n = \left(\frac{(-1)^{n-1}}{n^a}\right)$ $(a \in \mathbb{R})$.

La série $\sum u_n$ est absolument convergente si, et seulement si, $a > 1$ et, dans ce cas, en séparant les termes de rang pair et les termes de rang impair :

$$\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^a} = \sum_1^\infty \frac{1}{n^a} - 2 \sum_1^\infty \frac{1}{(2p)^a} = (1 - 2^{1-a}) \sum_1^\infty \frac{1}{p^a}$$

Elle est grossièrement divergente si $a \leqslant 0$, et semi-convergente si $0 < a \leqslant 1$, ce que nous avons déjà établi en utilisant le critère spécial des séries alternées (*doc.* 6).

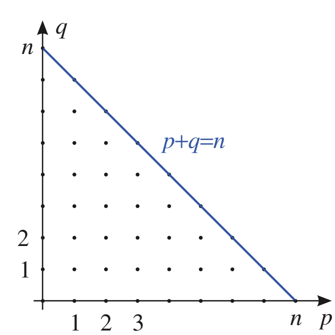


Doc. 6. *Séries de Riemann alternées :*

$$\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^a}.$$

4.4.3 Produit de deux séries absolument convergentes

On appelle **produit de Cauchy** de deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ la série de terme général $w_n = \sum_{p+q=n} u_p\, v_q$. (*doc.* 7.)



Doc. 7. $w_n = \sum_{p+q=n} u_p\, v_q$.

Théorème 17
Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques absolument convergentes de sommes U et V. Alors, la série $\sum w_n$ définie par $w_n = \sum_{p+q=n} u_p\, v_q$ est absolument convergente et de somme $U\,V$.

Rapport Mines-Ponts, 2001

« Très mauvaise connaissance du produit de Cauchy de deux séries. »

Démonstration

Étape 1 : *Un préliminaire sur les indices*

$$\sum_{k=0}^{n} w_k = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{k} u_i\, v_{k-i}\right) = \sum_{i+j\leqslant n} u_i\, v_j$$

Étape 2 : *Le cas des séries à termes positifs*

Si (α_n) et (β_n) sont deux suites de réels positifs, et A et B deux parties finies de $\mathbb{N}^2$ telles que $A \subset B$, il est clair que : $\sum_{(i,\,j)\in B} \alpha_i\,\beta_j \geqslant \sum_{(i,\,j)\in A} \alpha_i\,\beta_j$. On en déduit la double inégalité :

$$\sum_{i+j\leqslant n} \alpha_i\,\beta_j \leqslant \sum_{(i,\,j)\in[\![0,n]\!]^2} \alpha_i\,\beta_j = \left(\sum_{i=0}^{n}\alpha_i\right)\left(\sum_{j=0}^{n}\beta_j\right) \leqslant \sum_{i+j\leqslant 2n} \alpha_i\,\beta_j \qquad \textbf{(1)}$$

Si l'on note alors $\gamma_k = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i\,\beta_{k-i}$, l'inégalité **(1)** et la première étape permettent d'écrire, en posant $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, pour toute suite u :

$$S_n(\gamma) \leqslant S_n(\alpha)\,S_n(\beta) \leqslant S_{2n}(\gamma).$$

On en déduit aisément que, si $\sum \alpha_n$ et $\sum \beta_n$ sont deux séries convergentes à termes positifs, alors la série produit de Cauchy de ces deux séries, notée $\sum \gamma_n$, est convergente et, de plus, pour les sommes :

$$\left(\sum_0^{\infty}\alpha_n\right)\left(\sum_0^{\infty}\beta_n\right) = \sum_0^{\infty}\gamma_n.$$

Étape 3 : *Convergence absolue de la série produit*

Les deux séries complexes $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont supposées absolument convergentes.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant |w_n| \leqslant \sum_{i=0}^{n} |u_i|\,|v_{n-i}| = \gamma_n \qquad \textbf{(2)}$$

où l'on a noté γ_n le terme général de la série produit de Cauchy de $\sum |u_n|$ et de $\sum |v_n|$.

D'après la deuxième étape, la série $\sum \gamma_n$ est convergente et l'inégalité **(2)** prouve que la série $\sum |w_n|$ converge. Donc la série $\sum w_n$ est absolument convergente.

Étape 4 : *Valeur de la somme de la série produit*

Il reste à prouver que :

$$\left(\sum_0^{\infty}u_n\right)\left(\sum_0^{\infty}v_n\right) = \sum_0^{\infty}w_n$$

c'est-à-dire que $\lim_{n\to+\infty} |S_n(u)S_n(v) - S_n(w)| = 0$.

L'hypothèse de convergence absolue est fondamentale.
En effet, considérons les séries de termes généraux u_n et v_n avec :

$$u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

Ces séries sont semi-convergentes. La série produit de Cauchy est la série $\sum w_n$, avec :

$$\begin{aligned} w_n &= \sum_{p+q=n} u_p v_q \\ &= \sum_{p+q=n} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p+1}}\,\frac{(-1)^q}{\sqrt{q+1}} \\ &= (-1)^n \sum_{p+q=n} \frac{1}{\sqrt{(p+1)(q+1)}} \end{aligned}$$

En utilisant : $a\,b \leqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2)$, on en déduit :

$$\begin{aligned} |w_n| &\geqslant \sum_{p+q=n} \frac{2}{p+q+2} \\ &= \sum_{p+q=n} \frac{2}{n+2} = 2\frac{n+1}{n+2}. \end{aligned}$$

La série $\sum w_n$ est grossièrement divergente.

On peut écrire :

$$0 \leqslant |S_n(u)S_n(v) - S_n(w)| = \left| \left(\sum_{i=0}^{n} u_i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} v_j\right) - \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{k} u_i\, v_{k-i}\right)\right|$$

$$= \left| \sum_{(i,\,j)\in[\![0,n]\!]^2} u_i\, v_j - \sum_{i+j\leqslant n} u_i\, v_j \right| = \left| \sum_{\substack{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2\\ n<i+j}} u_i\, v_j \right|$$

$$\leqslant \sum_{\substack{(i,\,j)\in[\![0,n]\!]^2\\ n<i+j}} |u_i|\,|v_j|\,.$$

Refaisant le travail inverse sur les indices, on peut écrire :

$$0 \leqslant |S_n(u)\,S_n(v) - S_n(w)| \leqslant \sum_{(i,\,j)\in[\![0,n]\!]^2} |u_i|\,|v_j| - \sum_{i+j\leqslant n} |u_i|\,|v_j|$$

et, en notant $|u_n| = \alpha_n,\quad |v_n| = \beta_n$ et $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} |u_i|\,|v_{n-i}| = \gamma_n,$ ceci devient :

$$0 \leqslant |S_n(u)\,S_n(v) - S_n(w)| \leqslant S_n(\alpha)\,S_n(\beta) - S_n(\gamma)\,.$$

La deuxième étape permet de conclure.

► ***Pour s'entraîner : ex. 19.***

Exemple : La fonction exponentielle complexe

Nous avons prolongé à $\mathbb{C}$ la fonction exponentielle réelle. Montrons que :

$$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2 \quad \mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^{z}\mathrm{e}^{z'}$$

On sait que $\mathrm{e}^{z} = \displaystyle\sum_{0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ et $\mathrm{e}^{z'} = \displaystyle\sum_{0}^{\infty} \frac{z'^n}{n!}$ et que ces séries sont absolument convergentes. Donc, leur produit de Cauchy converge. Calculons-le.

En conservant les notations du théorème :

$$w_n = \sum_{p+q=n} \frac{z^p}{p!}\frac{z'^q}{q!} = \frac{1}{n!}\sum_{p+q=n}\frac{n!}{p!\,q!}\,z^p\,z'^q = \frac{1}{n!}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p} z^p\, z'^{n-p} = \frac{(z+z')^n}{n!}\,.$$

D'où le résultat.

Application 4

Transformation de $\dfrac{1}{(1-z)^{p+1}}$ en somme de séries

1) *Montrer que, si z est un complexe de module <1 et p un entier naturel, la série $\displaystyle\sum \binom{n+p}{p} z^n$ est absolument convergente, de somme* $\dfrac{1}{(1-z)^{p+1}}$.

2) *Montrer que, si α est un réel > 0 fixé, pour tout complexe z de module $<\alpha$, on a :*

$$\frac{1}{(\alpha - z)^{(p+1)}} = \sum_{0}^{\infty}\binom{n+p}{p}\frac{z^n}{\alpha^{(p+n+1)}}\,.$$

1) Soit z tel que $|z| < 1$ et p un entier naturel. Montrons que la série $\sum \binom{n+p}{p} z^n$ est absolument convergente de somme $\dfrac{1}{(1-z)^{p+1}}$.

Procédons par récurrence sur p.

Pour $p = 0$ et $|z| < 1$: $\displaystyle\sum_0^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

Supposons que, pour un certain $p \geqslant 0$, et pour tout z de module strictement inférieur à 1, on ait la série $\sum \binom{n+p}{p} z^n$ absolument convergente de somme $\dfrac{1}{(1-z)^{p+1}}$.

Les deux séries $\sum z^n$ et $\sum \binom{n+p}{p} z^n$ sont absolument convergentes, de sommes respectives $\dfrac{1}{1-z}$ et $\dfrac{1}{(1-z)^{p+1}}$. Nous pouvons appliquer le théorème et en déduire que la série produit de Cauchy de $\sum z^n$ et $\sum \binom{n+p}{p} z^n$ converge absolument vers $\dfrac{1}{(1-z)^{p+2}}$.

Calculons-la, en appelant w_n son terme général :

$$w_n = \sum_{i+j=n} z^i \binom{j+p}{p} z^j = z^n \sum_{i+j=n} \binom{j+p}{p}$$

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & 1 & 1 & & p=4 & & & & & & & \\
 & 1 & 2 & 1 & \downarrow & & & & & & & \\
 & 1 & 3 & 3 & \boxed{1} & & & & & & & \\
 & 1 & 4 & 6 & \boxed{4} & 1 & & & & & & \\
 & 1 & 5 & 10 & \boxed{10} & 5 & 1 & & & & & \\
 & 1 & 6 & 15 & \boxed{20} & 15 & 6 & 1 & & & & \\
 & 1 & 7 & 21 & \boxed{35} & 35 & 21 & 7 & 1 & & & \\
n=5\rightarrow & 1 & 8 & 28 & \boxed{56} & 70 & 56 & 28 & 8 & 1 & & \\
 & 1 & 9 & 36 & 84 & \boxed{126} & 126 & 84 & 36 & 9 & 1 &
\end{array}$$

Doc. 8. *Le triangle de Pascal.*

Vous vérifierez, par récurrence sur n que, pour tous entiers naturels n et p :

$$\binom{n+p+1}{p+1} = \sum_{j=0}^{n} \binom{j+p}{p}.$$

et en déduirez :

$$w_n = \binom{n+p+1}{p+1} z^n.$$

La récurrence est achevée.

2) Plus généralement, si $\alpha \in \mathbb{C}^*$, pour $|z| < \alpha$:

$$\frac{1}{(\alpha - z)^{(p+1)}} = \sum_0^{\infty} \binom{n+p}{p} \frac{z^n}{\alpha^{(p+n+1)}}$$

En effet, soit z tel que $|z| < \alpha$, alors on a : $\left|\dfrac{z}{\alpha}\right| < 1$, et on peut appliquer le résultat précédent.

4.5. Étude de suites à l'aide des séries. La formule de Stirling

James Stirling (1692-1770), *mathématicien britannique, publie, en* 1730, Methodus differentialis. *Il y traite des séries, des sommations en utilisant des méthodes différentielles.*

4.5.1 Comment montrer que la suite (x_n) converge ?

On pose $u_n = x_n - x_{n-1}$.

La suite (x_n) converge si, et seulement si, la série $\sum u_n$ converge.

4.5.2 Comment montrer que la suite réelle (x_n) converge vers $\ell \neq 0$?

En posant $\varepsilon = \operatorname{sgn}(\ell)$, au-delà d'un certain rang, on doit avoir εx_n strictement positif. Il suffit de montrer que la suite $(\ln(\varepsilon x_n))$ converge.

Pour cela, étudions la série de terme général :

$$u_n = \ln(\varepsilon x_n) - \ln(\varepsilon x_{n-1}) = \ln\left(\frac{x_n}{x_{n-1}}\right)$$

La suite réelle (x_n) admet une limite ℓ non nulle si, et seulement si, la série $\sum \ln\left(\dfrac{x_n}{x_{n-1}}\right)$ converge.

► *Pour s'entraîner : ex. 20.*

Application 5

La formule de Stirling

On pose :

$$u_n = \frac{1}{n!} n^{n+1/2} \mathrm{e}^{-n}$$

et :

$$w_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n).$$

1) *Étudier la série* $\sum w_n$.

2) *En déduire que la suite* (u_n) *converge vers un réel* $a > 0$.

3) *Déterminer* a *en utilisant la formule de Wallis :*

$$\sqrt{\pi} \sim \frac{2^{2n+1/2}(n!)^2}{\sqrt{2n+1}(2n)!}$$

4) *Établir la formule de Stirling :*

$$n! \sim \sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2} \mathrm{e}^{-n}.$$

En déduire que $\ln(n!) \sim n \ln(n)$.

1) Calculons w_n.

$$\begin{aligned} w_n &= \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\ &= -1 + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= -1 + \left(n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Donc la série $\sum w_n$ converge.

2) La convergence de la série entraîne l'existence d'une limite L pour la suite $\left(\ln(u_n)\right)$. Donc la suite (u_n) admet aussi une limite (par continuité de l'exponentielle) et cette limite est $\mathrm{e}^L = a > 0$.

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ se traduit par :

$$n! \sim \frac{1}{a} n^{n+1/2} \mathrm{e}^{-n}$$

Substituons, dans la formule de Wallis, les équivalents obtenus pour $n!$ et $(2n)!$. On obtient :

$$\sqrt{\pi} \sim \frac{1}{\sqrt{2}\, a}$$

et :

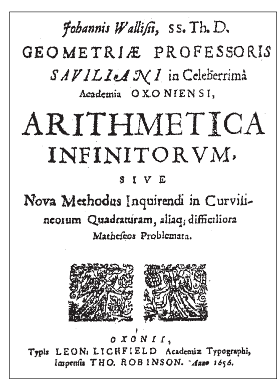
$$n! \sim \sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2} \mathrm{e}^{-n}$$

4) Puisque $n!$ tend vers $+\infty$, on peut écrire :

$$\ln(n!) \sim \ln(\sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2}\, \mathrm{e}^{-n})$$

Or :

$$\ln\left(\sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2}\, \mathrm{e}^{-n}\right) = \ln\left(\sqrt{2\pi}\right) + \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln(n) - n \sim n \ln(n).$$


Johannis Wallisii, SS. Th. D.
GEOMETRIÆ PROFESSORIS
SAVILIANI in Celeberrimâ
Academia OXONIENSI,
ARITHMETICA
INFINITORVM,
SIVE
Nova Methodus Inquirendi in Curvilineorum Quadraturam, aliaq; difficiliora
Matheseos Problemata.
OXONII,
Typis LEON: LICHFIELD Academiæ Typographi,
Impensis THO. ROBINSON. Anno 1656.

John Wallis (1616-1703), *mathématicien britannique. Dans son* Arithmetica infinitorum (1656), *il calcule les intégrales* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\, \mathrm{d}t$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\, \mathrm{d}t$ *et en déduit un développement de* π *en produit infini :*

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7} \cdots$$

Théorème 18

Formule de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2} \mathrm{e}^{-n}.$$

FICHE MÉTHODE

- Pour montrer qu'**une série à termes positifs $\sum u_n$ converge**, on peut :

- montrer que la suite (S_n) des sommes partielles est majorée ;
- chercher une suite (v_n) telle que : ($\forall n \quad u_n \leqslant v_n$ et $\sum v_n$ converge) ;
- chercher une suite (v_n) à termes positifs telle que : ($u_n = O(v_n)$ et $\sum v_n$ converge) ;
- chercher une suite (v_n) telle que : ($u_n \sim v_n$ et $\sum v_n$ converge) ;
- calculer un développement limité de u_n ;
- comparer u_n à une intégrale de fonction positive décroissante ;
- utiliser la règle de d'Alembert.

- Pour montrer qu'une **série à termes positifs $\sum u_n$ diverge**, on peut :

- montrer que la suite (S_n) des sommes partielles n'est pas majorée ;
- chercher une suite (v_n) telle que : ($0 \leqslant v_n \leqslant u_n$ et $\sum v_n$ diverge) ;
- chercher une suite (v_n) à termes positifs telle que : ($v_n = O(u_n)$ et $\sum v_n$ diverge) ;
- chercher une suite (v_n) telle que : ($u_n \sim v_n$ et $\sum v_n$ diverge) ;
- comparer u_n à une intégrale de fonction positive décroissante ;
- utiliser la règle de d'Alembert.

- Pour montrer qu'**une série à termes complexes $\sum u_n$ converge**, on peut :

- si la série est alternée, regarder si elle satisfait le critère spécial des séries alternées ;
- regarder si la série est absolument convergente (voir méthodes ci-dessus appliquées à $\sum |u_n|$) ;
- calculer la somme partielle S_n et étudier la suite (S_n) ;
- regarder si la série vérifie le critère de Cauchy des séries.

- Pour **majorer la valeur absolue du reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ d'une série convergente** :

- si la série est à termes positifs de la forme $u_n = f(n)$ avec f décroissante, alors :

$$\lim_{N \to +\infty} \int_{n+1}^{N+1} f \leqslant R_n \leqslant \lim_{N \to +\infty} \int_{n}^{N} f$$

- si la série est alternée et vérifie le critère spécial, alors $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$;
- si u peut être majorée par une suite géométrique (cr^n), avec $r \in]0, 1[$, alors : $|R_n| \leqslant \dfrac{cr^{n+1}}{(1-r)}$.

Exercice résolu

Procédé d'accélération de convergence

ÉNONCÉ

Le but de cet exercice est le calcul d'une valeur approchée de $S = \sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$.

Nous noterons $S_n = \sum_1^n \frac{1}{k^2}$, et $R_n = \sum_{n+1}^\infty \frac{1}{k^2}$.

1) Majoration du reste et première approximation de S

a) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{1}{n+1} \leqslant R_n = \sum_{n+1}^\infty \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{n}$ **(1)**

b) En déduire une valeur approchée de S à 10^{-3} près.

2) L'accélération de la convergence, le principe

Des inégalités **(1)**, nous déduisons : $R_n \sim \frac{1}{n}$, donc : $R_n - \frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{n}\right)$, soit $(S - S_n) - \frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Ainsi, alors que S_n fournit une valeur approchée de S avec une erreur de l'ordre de $\frac{1}{n}$, la quantité corrigée $S_n + \frac{1}{n}$ nous donne une valeur approchée de S avec une erreur négligeable devant $\frac{1}{n}$.

En ajoutant un terme correctif à S_n, nous avons « accéléré » la convergence.

L'expérimentation

Nous admettrons, dans cet exercice, que la valeur exacte de S est $\frac{\pi^2}{6}$. Ce résultat sera utilisé pour comparer les vitesses de convergence lors du calcul de S par S_n et par $S_n + \frac{1}{n}$.

a) Calculer $\left\{S_n, S_n + \frac{1}{n}, \frac{\pi^2}{6}\right\}$ pour $n = 10$, 100 et $1\,000$. Que constatez-vous ?

La majoration de l'erreur

b) Prouver que : $R_n - \frac{1}{n} = \sum_{k=n+1}^\infty \frac{-1}{k^2(k-1)}$ **(2)**

En déduire que $S_n + \frac{1}{n}$ est une approximation par excès de S (que dire de S_n ?).

c) Montrer que l'erreur commise en approximant S par $S_n + \frac{1}{n}$ est majorée par $-\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}$.

En déduire que, pour $n \geqslant 2$, $\left|S - \left(S_n + \frac{1}{n}\right)\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$.

d) Déterminer un équivalent de $R_n - \frac{1}{n}$

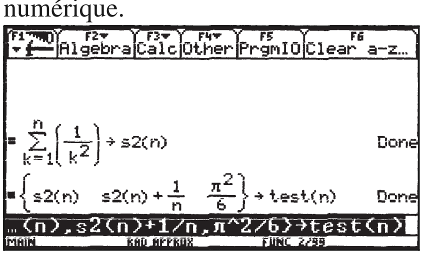
CONSEILS

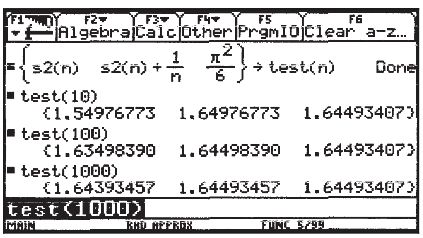
Les formules suivantes seront utiles.

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}\,t}{t^2} \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}\,t}{t^2}.$$

$$\frac{1}{n} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)$$

Sur la TI, $\sum \left(\frac{1}{k}, k, 1, n \right) \to S(n)$ et presser la touche « Diamant » avant « Enter » pour lancer le calcul numérique.





Penser que :

$$\frac{1}{k^2(k-1)} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}\,t}{t^2(t-1)}.$$

SOLUTION

1) a) Pour tout entier $k \geqslant 2$:

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}\,t}{t^2} \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}\,t}{t^2} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

On en déduit : $\qquad \frac{1}{n+1} \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{n}.$

b) D'après **a)**, $\frac{1}{1\,001} \leqslant S - S_{1\,000} \leqslant \frac{1}{1\,000}.$

Le calcul de $S_{1\,000} = 1{,}6439\ldots$ prend 12 secondes environ sur la TI.

Ce calcul donne une valeur approchée de S à 10^{-3} près.

2) a) Les deux écrans ci-contre confirment que, pour $n = 10$, 100 et $1\,000$, S_n approche S avec une précision de $\frac{1}{n}$. De plus,

$$\left| S - \left(S_{10} + \frac{1}{10} \right) \right| \approx 5 \cdot 10^{-3}, \qquad \left| S - \left(S_{100} + \frac{1}{100} \right) \right| \approx 5 \cdot 10^{-5},$$

$$\left| S - \left(S_{1\,000} + \frac{1}{1\,000} \right) \right| \approx 5 \cdot 10^{-7}.$$

b) $R_n - \frac{1}{n} = \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1} \right) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{-1}{k^2(k-1)}.$

Donc : $S - \left(S_n + \frac{1}{n} \right) < 0$. Ceci prouve que $\left(S_n + \frac{1}{n} \right)$ est une approximation par excès de S. De plus, la suite (S_n) est croissante, donc S_n est une approximation par défaut de S.

c) $\left| R_n - \frac{1}{n} \right| = \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k-1)}$. Pour tout entier $k \geqslant 2$:

$$\frac{1}{k^2(k-1)} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}\,t}{t^2(t-1)} \leqslant \left[\ln \left(1 - \frac{1}{t} \right) + \frac{1}{t} \right]_{k-1}^{k}$$

Ainsi : $\left| R_n - \frac{1}{n} \right| = \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k-1)} \leqslant -\ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n}.$

Pour conclure : $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2} \right] \quad \ln(1-x) + x + x^2 \geqslant 0.$

L'inégalité $\left| S - \left(S_n + \frac{1}{n} \right) \right| \leqslant \frac{1}{n^2}$ en découle.

d) L'inégalité $\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}\,t}{t^2(t-1)} \leqslant \frac{1}{k^2(k-1)}$, est immédiate et entraîne :

$$\ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{n} \leqslant R_n - \frac{1}{n} \leqslant \ln \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{n+1}.$$

Cet encadrement permet de démontrer que :

$$\left(R_n - \frac{1}{n} \right) \sim \frac{-1}{2n^2}.$$

Exercices

1 Étudier la convergence et calculer la somme des séries de terme général suivant :

1) $u_n = \operatorname{Arctan} \dfrac{2}{n^2}$

2) $u_n = \dfrac{n}{n^4 + n^2 + 1}$.

2 Montrer que $\displaystyle\sum_1^{\infty} \frac{20^n}{(5^{n+1} - 4^{n+1})(5^n - 4^n)} = 4$.

3 Donner la nature et, en cas de convergence, calculer la somme des séries de terme général :

1) $\dfrac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$;

2) $u_n = \ln\left(\cos\left(\dfrac{a}{2^n}\right)\right) \quad a \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

4 Nature et somme de la série de terme général :

$$u_n = (-1)^n \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, \mathrm{d}x.$$

5 Soit (u_n) une suite à termes positifs telle que :

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{2}.$$

Montrer que la série $\sum u_n$ converge.

6 On considère deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ à termes strictement positifs et on suppose que $\sum v_n$ converge et que, pour tout n, on a $\dfrac{u_{n+2}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+2}}{v_n}$.

Montrer la convergence de $\sum u_n$.

7 Montrer que la série $\sum (n^{1/n} - 1)^n$ converge en la comparant à une série géométrique.

8 Nature de la série $\sum u_n$, avec $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n + (-1)^n \dfrac{n}{\ln n}}$.

9 Nature des séries de terme général :

1) $\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$; **2)** $\operatorname{Arccos}\left(\left(1 - \dfrac{1}{n^3}\right)^{1/2}\right)$.

10 En les comparant à des séries de Riemann, indiquer la nature des séries :

1) $\sum \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$; **2)** $\sum \dfrac{\ln n}{n^2}$; **3)** $\sum \dfrac{(\ln n)^3}{n^2}$.

11 Donner la nature de la série de terme général :

1) $u_n = \displaystyle\sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. **2)** $v_n = \displaystyle\sum_{n}^{\infty} \frac{1}{k^4}$

12 Nature des séries de terme général :

1) $\dfrac{a^n}{(n+1)}$ $(a \in \mathbb{R})$; **2)** $\dbinom{n}{2} a^{2n}$ $(a \in \mathbb{R})$;

3) $\dfrac{n}{\displaystyle\prod_1^n (1 + b^k)}$ $(b > 0)$; **4)** $\dfrac{(n+1)^n}{n^{n+1}} r^n$ $(r > 0)$.

13 Nature de la série : $\sum \dfrac{1}{3^{2n+1} + 2n + 1}$.

Donner sa somme à 10^{-4} près.

14 *(PSI)* **1)** Écrire, sous forme rationnelle, le réel :
$x = 0{,}123\,456\,456\,456\ldots$ que nous noterons $0{,}123\,\overline{456}$.

2) Donner le développement décimal de $\dfrac{4}{7}$ et vérifier qu'il est périodique.

3) Montrer qu'un nombre réel non décimal est un rationnel si, et seulement si, sa représentation décimale est périodique à partir d'un certain rang.

15 *(PSI)* **1)** Montrer que, si (u_n) est une suite décroissante telle que la série $\sum u_n$ converge, alors $u_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

2) La réciproque est-elle exacte ?

16 Pour chacune des séries suivantes : justifier la convergence ; préciser n tel que $|S_n - S| \leqslant 10^{-2}$; en déduire un encadrement de S de longueur 10^{-2}.

1) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$; **2)** $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n^3 + 1}$;

17 Soit $\sum a_n$ une série à termes complexes absolument convergente.

Montrer que la série $\sum a_n^2$ est absolument convergente.

18 Étudier les séries de terme général :

1) $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{3n} - \left(1+\dfrac{3}{n+a^2}\right)^{n}$.

2) $u_n = \dfrac{1}{1+z^n}$ (discuter suivant z).

19 Montrer la convergence et donner la somme de la série de terme général $w_n = \displaystyle\sum_{1}^{n} \frac{1}{p^2\,(n-p)!}$.

20 Soit $u_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)$.

Étudier la suite $\left(\sqrt{n}\,u_n\right)$, puis la série $\sum u_n$.

21 Soit (u_n) une suite de réels >0.

On pose $v_n = \dfrac{u_n}{(1+u_0)(1+u_1)\ldots(1+u_n)}$.

Montrer que :

1) la série $\sum v_n$ converge et calculer sa somme ;

2) $\displaystyle\sum_{0}^{\infty} v_n = 1$ si, et seulement si, la série $\sum u_n$ diverge.

22* Soit une suite (a_n), à termes >0, telle que la série $\sum a_n$ diverge.

On note (S_n) la suite des sommes partielles.

1) Montrer que la série $\sum \dfrac{a_n}{S_n}$ diverge.

2) Montrer que la série $\sum \dfrac{a_n}{S_n^2}$ converge.

23** On considère la série $\sum \dfrac{e^{i\,nx}}{n}$, x étant un réel fixé de $]0, 2\pi[$.

1) Montrer que cette série converge.

2) Calculer sa somme.

3) En déduire la convergence et la somme des séries :

$$\sum \frac{\cos n\,x}{n} \quad \text{et} \quad \sum \frac{\sin n\,x}{n}.$$

24* Soit (u_n) une suite strictement croissante de réels >0, divergente, telle que la suite $(u_{n+1}-u_n)$ soit bornée.

Montrer que $\displaystyle\sum_{1}^{n} \frac{u_k - u_{k-1}}{u_k} \sim \ln(u_n)$.

25 Préciser la nature de la série de terme général :

$u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n\, n^b}$, en fonction de a et b.

26* **1)** Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, convergente et $R_n = \displaystyle\sum_{n+1}^{\infty} u_k$.

Montrer que les séries $\sum n\,u_n$ et $\sum R_n$ sont de même nature.

2) Lorsque ces séries convergent, donner une relation entre les sommes.

27* **1)** Montrer la convergence et calculer la somme de la série :

$$\sum \frac{(-1)^k}{(2k+1)}$$

2) En déduire la nature de la série de terme général :

$$u_n = \ln\left(\tan \sum_{0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)}\right)$$

28** Montrer que la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}\sqrt{n}}$ converge.

On note S sa somme.

Déterminer N pour que $|S - S_{2N+1}| \leqslant 10^{-2}$. En déduire une valeur approchée de la somme à $2\cdot 10^{-2}$ près.

29 **1)** Montrer que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, l'équation $\tan x = x$ a une unique racine x_n dans l'intervalle : $\left]-\dfrac{\pi}{2}+n\,\pi, \dfrac{\pi}{2}+n\,\pi\right[$.

2) Donner un développement asymptotique de x_n à trois termes.

Comparer avec le développement fourni par *Maple*.

3) On pose $u_n = \dfrac{\pi}{2} + n\,\pi - x_n$. Étudier la nature des séries $\sum u_n^a$, $\sum (-1)^n u_n^a$ $(a>0)$ et $\sum \cos^m(x_n)$ $(m \in \mathbb{N}^*)$.

30** Soit (u_n) une suite positive. On pose :

$$v_n = \frac{u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{2n-1}}{n}$$

et on note $S_n(u)$ et $S_n(v)$ les sommes partielles des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

1) Montrer que, pour tout n, il existe $2n-1$ réels de $[0,1]$ tels que :

$$S_n(v) = \sum_{k=1}^{2n-1} \alpha_{k,n}\, u_k\,.$$

En déduire que, si la série $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum v_n$ converge.

2) Prouver que : $\forall k \in [\![1, n]\!] \quad \alpha_{k,n} \geqslant \dfrac{1}{2}$.

En déduire que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

31 (*D'après Navale, 1992.*)

1) Soit (a_n) une suite de réels >0 telle que la série $\sum a_n$ diverge et (b_n) une suite de complexes. On note $S_n(b)$, $S_n(a)$ les sommes partielles des séries $\sum b_n$ et $\sum a_n$.

a) On suppose que $b_n = o(a_n)$. Montrer que :

$$S_n(b) = o(S_n(a)).$$

b) Les b_n sont des réels >0 et les suites (a_n) et (b_n) sont supposées équivalentes.

Montrer que les suites $(S_n(b))$ et $(S_n(a))$ sont équivalentes.

c) En déduire un équivalent de $\displaystyle\sum_1^n \frac{1}{k}$.

2) a) Montrer que, si (u_n) est le terme général d'une série positive et que, pour $n \geqslant 1$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\lambda}{n} + v_n$, où v_n est le terme général d'une série absolument convergente, alors :

$$\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = -\frac{\lambda}{n} + w_n,$$

où w_n est le terme général d'une série absolument convergente.

b) En déduire qu'il existe $A > 0$ tel que $u_n \sim \dfrac{A}{n^\lambda}$.

c) Étudier la série de terme général :

$$u_n = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n(2n+2)}.$$

32 ** Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes positifs, de somme S.

Étudier :

1) la série $\sum v_n$, avec $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_1^n u_k$. En cas de convergence, donner la somme ;

2) la série $\sum w_n$, avec $w_n = \dfrac{1}{n(n+1)}\displaystyle\sum_1^n k\, u_k$;

3) la série $\sum x_n$, avec $x_n = \sqrt[n]{\displaystyle\prod_1^n u_k}$.

(On pourra calculer $\displaystyle\prod_1^n \frac{(k+1)^k}{k^{k-1}}$ et considérer $(n+1)\,x_n$.)

2 Espaces vectoriels normés

Introduction

La démarche que nous vous proposons est illustrée par cet extrait de l'introduction de la thèse de Stefan Banach (1920) *qui fonde la théorie des espaces vectoriels normés :*

« L'ouvrage présent a pour but d'établir quelques théorèmes valables pour différents champs fonctionnels, que je spécifie dans la suite. Toutefois, afin de ne pas être obligé de les démontrer isolément pour chaque champ particulier, ce qui serait bien pénible, j'ai choisi une voie différente que voici : je considère d'une façon générale les ensembles d'éléments dont je postule certaines propriétés, j'en déduis des théorèmes et je démontre ensuite de chaque champ fonctionnel particulier que les postulats adoptés sont vrais pour lui. »

Vous avez défini, en Première année, la structure d'espace vectoriel qui englobe aussi bien $\mathbb{R}^n$ *que des espaces de suites et de fonctions. Vous avez également étudié les suites et les fonctions à valeurs réelles ou complexes.*

Dans le but d'étendre les notions de convergence et de limite à des suites et des fonctions à valeurs vectorielles, nous allons, dans ce chapitre et les suivants, introduire différentes notions.

OBJECTIFS

- Étude des propriétés fondamentales des espaces vectoriels normés.
- Notion de suite convergente.
- Comparaison des normes sur un espace vectoriel.
- Étude du cas particulier d'un espace vectoriel normé de dimension finie.
- Suites de Cauchy (*PSI*).
- Quelques notions topologiques.
- Comparaison des suites.

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E, F sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

1 Norme et distance

1.1. Définition d'une norme

Une application N du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E dans $\mathbb{R}$ vérifiant les quatre propriétés suivantes est appelée **norme** sur E.

1) $\forall x \in E \quad N(x) \geqslant 0$

2) $\forall x \in E \quad N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$

3) $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \quad N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$

4) $\forall (x, y) \in E \times E \quad N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$

Un espace vectoriel E muni d'une norme N est appelé **espace vectoriel normé** et noté (E, N).

Une norme sur un espace vectoriel E sera parfois aussi notée $\| \ \|$. L'espace vectoriel normé est alors noté $(E, \| \ \|)$.

Si F est un sous-espace vectoriel de E, la restriction de la norme N à F munit F d'une structure d'espace vectoriel normé.

Un **vecteur** de norme 1 est dit **unitaire**.

Pour tout vecteur x non nul de $(E, \| \ \|)$, le vecteur $\dfrac{x}{\|x\|}$ est unitaire.

▶ ***Pour s'entraîner : ex. 1 et 2.***

Rapport X-ESPCI, 2000
« Quant à l'emploi de l'inégalité triangulaire, il s'accompagne souvent de "raccourcis incorrects", voire d'erreurs. »

Une norme N sur E vérifie donc la propriété :

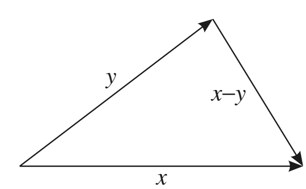
$$\forall (x, y) \in E \times E$$

$$|N(x) - N(y)| \leqslant N(x - y)$$

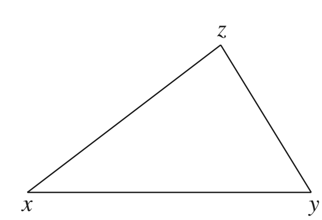
Cette inégalité et l'inégalité **4)** ci-dessus généralisent la propriété bien connue :

« Dans un triangle, la longueur de chaque côté est inférieure à la somme des deux autres côtés et supérieure à leur différence (*doc.* 1 et 2). »

La propriété **4)** est appelée **inégalité triangulaire**.



Doc. 1.



Doc. 2.

1.2. Quelques exemples de normes

1.2.1 $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$

Pour tout f de E, on définit $\|f\|_1 = \displaystyle\int_a^b |f(t)|\, \mathrm{d}t$. L'application $\| \ \|_1$ est une norme sur E.

En effet, $|f|$ est une fonction continue et positive, l'implication $(\|f\|_1 = 0 \Rightarrow f = 0)$ en découle.

1.2.2 $E = \mathbb{K}^n$

Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de E, on pose :

$$N_1(x) = \sum_1^n |x_i| \quad \text{et} \quad N_\infty(x) = \max\{|x_i|,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

Les deux applications N_1 et N_∞ sont des normes sur $\mathbb{K}^n$. Nous vous laissons le soin de le contrôler.

De plus, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, vous avez vu en Première année que l'application :

$$\begin{cases} E \times E & \to \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto \langle x \mid y \rangle = \displaystyle\sum_1^n x_i\, y_i \end{cases}$$

est un produit scalaire sur E.

La norme euclidienne associée à ce produit scalaire est :

$$N_2(x) = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}.$$

De même, lorsque $E = \mathbb{C}^n$, l'application φ définie par :

$$\varphi\Big((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\Big) = \sum_1^n \overline{x}_i \, y_i$$

est appelée le produit scalaire canonique de $\mathbb{C}^n$.
La norme associée à ce produit scalaire est :

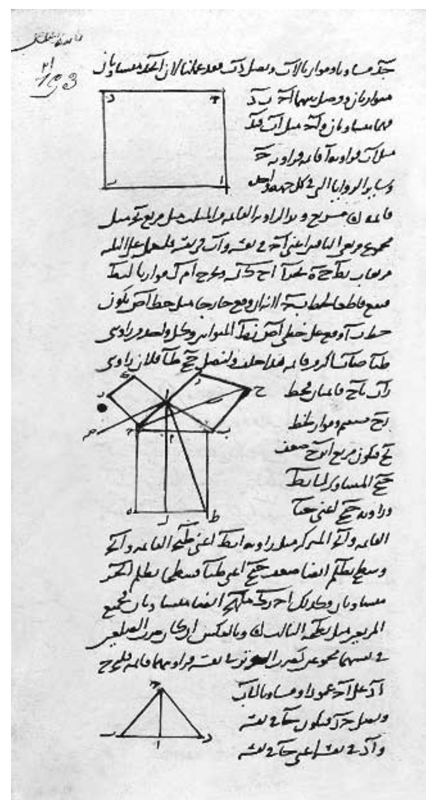
$$N_2(x) = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$$

Au VI$^{\text{e}}$ siècle av. J-C, dans les cités grecques d'Asie Mineure apparaît une forme de pensée nouvelle. Dans un effort d'explication du monde, hors des mythes et de la religion, la science grecque se construit, nourrie des connaissances du monde antique.

Ainsi, Thalès (environ 640-546 av. J-C), commerçant habile et grand voyageur, consacra la fin de sa vie à l'étude de la philosophie, de l'astronomie et des mathématiques.

Trois siècles plus tard, Euclide d'Alexandrie (environ 365-300 av. J-C) introduit les notions de définitions, axiomes, postulats et propositions. Son livre *Les Eléments* est le premier traité logique de mathématiques. Il rassemble les résultats mathématiques de son temps, les structure en une science déductive et apporte nombre de découvertes nouvelles.

La géométrie euclidienne est la géométrie fondée sur les axiomes et postulats introduits par Euclide.



Abrégé des Éléments *d'Euclide.* (*Manuscrit arabe*)

1.2.3 $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$

On pose, pour tout f de E, $\|f\|_\infty = \sup\{\,|f(t)|,\ t \in [a, b]\}$.
Cette définition est justifiée par le fait qu'une fonction continue sur un segment $[a, b]$ et à valeurs réelles est bornée.

L'application $\|\ \|_\infty$ est une norme sur E.

Rapport Mines-Ponts, 2003

« Les normes de fonction prêtent souvent à confusion, et l'écriture $\|f(x)\|_\infty$ est souvent la preuve que le candidat ne comprend pas bien ce qu'il fait. »

1.2.4 $E = \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$

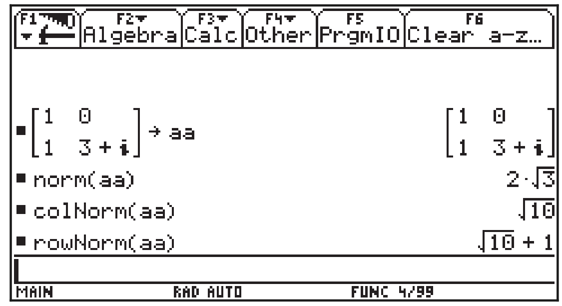
La calculatrice TI propose dans le menu « Maths, matrix, normes » $\left(\boxed{2^{\text{nd}}}, \boxed{5}, \boxed{4}, \boxed{\text{B}}\right)$, trois normes sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ des matrices réelles ou complexes.

En notant $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$, ces normes sont :

$$norm(A) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{i\,j}|^2}$$

$$colnorm(A) = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left(\sum_{i=1}^{m} |a_{i\,j}| \right)$$

$$rownorm(A) = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i\,j}| \right)$$



1.2.5 $E = \mathbb{K}[X]$

Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à n : $P = \sum_{0}^{n} a_k X^k$. On pose :

$$N_1(P) = \sum_{0}^{n} |a_k| \quad ; \qquad N_2(P) = \sqrt{\sum_{0}^{n} |a_k|^2} \quad ; \qquad N_\infty(P) = \sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k|$$

Vérifiez que N_1, N_2 et N_∞ sont des normes sur $\mathbb{K}[X]$.

Rapport TPE, 2002

« Certains candidats ne connaissent pas la définition d'une norme et confondent norme, norme euclidienne et produit scalaire. »

1.3. Complément

Notons :

$$\ell^1(\mathbb{K}) = \left\{ (u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} ; \sum |u_n| \text{ converge} \right\} \text{ et } \ell^2(\mathbb{K}) = \left\{ (u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} ; \sum |u_n|^2 \text{ converge} \right\}.$$

1.3.1 L'ensemble $\ell^1(\mathbb{K})$

- $\ell^1(\mathbb{K})$ est le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des séries absolument convergentes.
- L'application N_1, définie sur $\ell^1(\mathbb{K})$ par $N_1(u) = \sum_{0}^{\infty} |u_n|$, est une norme sur $\ell^1(\mathbb{K})$.
- De plus, pour toute suite u de $\ell^1(\mathbb{K})$, on a :

$$\left| \sum_{0}^{\infty} u_n \right| \leqslant \sum_{0}^{\infty} |u_n| = N_1(u).$$

1.3.2 L'ensemble $\ell^2(\mathbb{K})$

- Si les séries $\sum |u_n|^2$ et $\sum |v_n|^2$ convergent, alors la série $\sum u_n v_n$ converge absolument. En effet, $|u_n v_n| \leqslant \frac{1}{2}\left(|u_n|^2 + |v_n|^2\right)$.
- $\ell^2(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- $\ell^1(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\ell^2(\mathbb{K})$, car si $|u_n| < 1$, alors $|u_n|^2 < |u_n|$.
- L'application φ, définie sur $\ell^2(\mathbb{K}) \times \ell^2(\mathbb{K})$ par $\varphi(u, v) = \sum_{0}^{\infty} \overline{u_n}\, v_n$, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, est un produit scalaire sur $\ell^2(\mathbb{K})$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on prendra $\varphi(u, v) = \sum_{0}^{\infty} u_n v_n$.

- La norme N_2 associée à ce produit scalaire est $N_2(u) = \sqrt{\sum_{0}^{\infty} |u_n|^2}$.

► ***Pour s'entraîner : ex. 3 et 4.***

1.4. Distance

G étant un ensemble non vide, une **distance** sur G est une application de $G \times G$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

1) $\forall (x, y) \in G \times G \quad d(x, y) \geqslant 0$

2) $\forall (x, y) \in G \times G \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

3) $\forall (x, y) \in G \times G \quad d(x, y) = d(y, x)$

4) $\forall (x, y, z) \in G \times G \times G \quad d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$

L'intérêt de la notion de distance provient du fait que, si l'on se restreint à une partie non vide A de l'espace vectoriel normé $(E, \| \|)$, la restriction de la distance d à l'ensemble $A \times A$ définit toujours une distance sur A, sans que A soit nécessairement un sous-espace vectoriel de E. Aucune structure algébrique n'est nécessaire pour parler d'une distance sur un ensemble, alors que, pour parler d'une norme, il faut un espace vectoriel.

Théorème 1

Soit $(E, \| \|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. L'application :

$$\begin{array}{rcl} d : E \times E & \to & \mathbb{R}^+ \\ (x, y) & \mapsto & d(x, y) = \|x - y\| \end{array}$$

est une distance sur E. Elle est appelée **distance associée à la norme** $\| \|$ sur E.

On a : $\|x\| = d(0_E, x)$.

► ***Pour s'entraîner : ex. 5 et 6.***

2 Boules d'un espace vectoriel normé

Dans ce paragraphe, $(E, \| \|)$ est un espace vectoriel normé et d la distance associée à cette norme.

2.1. Définition d'une boule

2.1.1 Boule ouverte

x étant un point de E et r un réel strictement positif, la **boule ouverte** de centre x et de rayon r est l'ensemble noté $B(x, r)$ ou $BO(x, r)$ et défini par :

$$BO(x, r) = \{y \in E \mid \|y - x\| < r\}$$

2.1.2 Boule fermée

La **boule fermée** de centre x et de rayon r est notée $BF(x, r)$ et définie par :

$$BF(x, r) = \{y \in E \mid \|y - x\| \leqslant r\}$$

Exemples

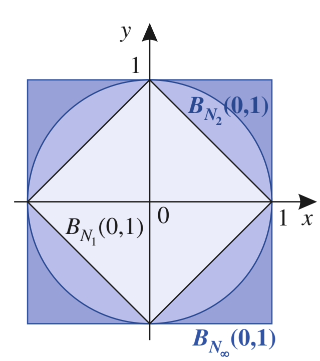
■ $E = (\mathbb{R}, | |)$

La boule ouverte de centre x et de rayon r est l'intervalle $]x - r, x + r[$, la boule fermée de centre x et de rayon r est l'intervalle $[x - r, x + r]$.

■ $E = \mathbb{R}^2$. $x = 0_E$, $r = 1$.

E est muni des normes :

$$N_1(x, y) = |x| + |y| \quad ; \quad N_2(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ; \quad N_\infty(x, y) = \max(|x|, |y|).$$



Doc. 3. *Trois boules dans* $\mathbb{R}^2$.

Les boules $B_{N_1}(0,1)$, $B_{N_2}(0,1)$, $B_{N_\infty}(0,1)$ ont été représentées.
On constate que les boules obtenues dépendent de la norme choisie.

► ***Pour s'entraîner : ex. 7.***

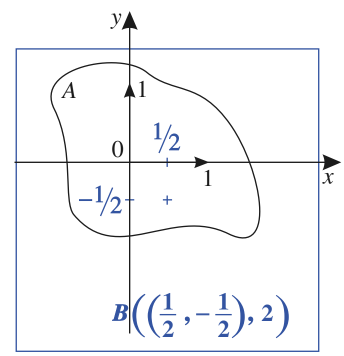
2.2. Parties bornées

Une **partie** A de l'espace vectoriel normé $(E, \| \ \|)$ est dite **bornée** si :

$$\exists K \in \mathbb{R}^+ \ \forall x \in A \quad \|x\| \leqslant K.$$

Lorsqu'on parle de suite ou de fonction bornée, une référence implicite est faite à une norme. Que se passe-t-il si l'on change de norme ?

Théorème 2
Les propriétés suivantes sont équivalentes :
1) A est une partie bornée de $(E, \| \ \|)$
2) Il existe un réel M tel que : $\forall (x,y) \in A^2 \quad \|x-y\| \leqslant M$
3) La partie A est incluse dans une boule de l'espace vectoriel normé $(E, \| \ \|)$



Doc. 4. *Une partie bornée de* $\mathbb{R}^2$.

Exemple
Toute boule est bornée. Un sous-espace vectoriel non réduit à $\{0_E\}$ n'est pas borné.

2.3. Suites et fonctions bornées

Une **suite** (x_p) d'éléments de l'espace vectoriel normé $(E, \| \ \|)$ est dite **bornée** si :

$$\exists K \in \mathbb{R} \ \forall p \in \mathbb{N} \quad \|x_p\| \leqslant K$$

Il revient au même de dire que l'ensemble $\{x_p, \ p \in \mathbb{N}\}$ est une partie bornée de $(E, \| \ \|)$.

A étant un ensemble non vide, une **application** f de A dans l'espace vectoriel normé, (F, N), est dite **bornée** si :

$$\exists K \in \mathbb{R} \ \forall x \in A \quad N(f(x)) \leqslant K$$

Il revient au même de dire que l'ensemble $\{f(x), \ x \in A\}$ est une partie bornée de (F, N).

On note $\mathcal{B}(A, F)$ l'ensemble des applications bornées de A dans (F, N).

Rapport X-ESPCI, 2000
« *La notion de fonction bornée est souvent mal comprise.* »

Application 1

L' espace vectoriel $\mathcal{B}(A, F)$

Soit (F, N) un espace vectoriel normé.

1) *Montrer que $\mathcal{B}(A, F)$ est un sous-espace vectoriel de F^A.*

2) *Pour tout f de $\mathcal{B}(A, F)$, on pose :*

$$\| f \|_\infty = \sup_{x \in A} N(f(x)).$$

Montrer que $\| \ \|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{B}(A, F)$.

3) *Définir une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{B}(E)$ des suites bornées de l'espace vectoriel normé (E, N).*

1) $\mathcal{B}(A, F)$ est une partie non vide de F^A (la fonction nulle est bornée).

Si f et g sont deux fonctions bornées sur A et α, β deux scalaires, alors :

$\forall x \in A$

$$\begin{aligned} N\big((\alpha f+\beta g)(x)\big) &= N\big((\alpha f(x)+\beta g(x)\big) \\ &\leqslant |\alpha|\, N(f(x))+|\beta|\, N(g(x)) \\ &\leqslant |\alpha|\, K_f+|\beta|\, K_g \end{aligned}$$

avec K_f et K_g deux réels tels que :

$$\forall x \in A \quad N\big(f(x)\big) \leqslant K_f \quad \text{et} \quad N(g(x)) \leqslant K_g$$

$\mathcal{B}(A, F)$ est donc stable par combinaison linéaire, c'est un sous-espace vectoriel de F^A.

2) Si f est une application bornée sur A, l'ensemble $\{N(f(x));\ x \in A\}$ est une partie non vide, majorée de $\mathbb{R}^+$, elle admet donc une borne supérieure, notée $\|f\|_\infty$.

Considérons l'application :

$$\|\ \|_\infty : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{B}(A, F) & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ f & \mapsto & \|f\|_\infty \end{array} \right.$$

Les propriétés **1)**, **2)**, **3)** de la définition d'une norme sont simples à vérifier.

Soit f et g deux applications bornées sur A. Alors : $\forall x \in A$

$$\begin{aligned} N((f+g)(x)) &= N(f(x)+g(x)) \\ &\leqslant N(f(x))+N(g(x)) \\ &\leqslant \|f\|_\infty+\|g\|_\infty \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \|f+g\|_\infty &= \sup_{x\in A} N\big((f+g)(x)\big) \\ &\leqslant \|f\|_\infty+\|g\|_\infty . \end{aligned}$$

D'où la propriété **4)**.

3) En prenant $A=\mathbb{N}$ et $F=E$, l'espace vectoriel $\mathcal{B}(\mathbb{N}, E)$ n'est autre que l'espace vectoriel des suites bornées $\mathcal{B}(E)$. Les résultats de la question **2)** s'appliquent et l'application $\|\ \|_\infty$, définie sur cet espace par $\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} N(u_n)$, est une norme.

3 Suites convergentes, normes équivalentes

3.1. Suites convergentes

Une **suite** (x_p) d'éléments de l'espace vectoriel normé, $(E, \|\ \|)$, est **convergente** dans $(E, \|\ \|)$ (ou encore converge pour la norme $\|\ \|$) si :

$$\exists x \in E \ \ \forall \varepsilon>0 \ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ \forall p \in \mathbb{N} \quad (p \geqslant N) \Rightarrow (\|x_p-x\| \leqslant \varepsilon)$$

⚠ *L'ordre des quantificateurs est fondamental.*

Théorème 3

Soit (x_p) une suite convergente d'éléments de l'espace vectoriel normé, $(E, \|\ \|)$. Alors, l'élément x de E tel que $\lim_{p\to+\infty} \|x_p-x\| = 0$ est unique.

Il est appelé la **limite de la suite** (x_p) et noté :

$$x = \lim_{p\to+\infty} x_p .$$

Exemples

- $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\| f \|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

Soit la suite (f_n) définie par $f_n(t) = t^n$. Alors $\| f_n \|_1 = \dfrac{1}{n+1}$

Donc la suite de fonctions (f_n) converge vers la fonction nulle relativement à $\| \ \|_1$.

- **Une suite de Ramanujan**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = x(x+2)$

et la suite (u_n) définie par :

$$u_1 = f(1), \quad u_2 = \sqrt{1 + f(2)}, \quad u_3 = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + f(3)}}$$

et, pour tout $n \geqslant 3$:

$$u_n = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 \ldots \sqrt{1 + (n-1)\sqrt{1 + f(n)}}}}}$$

Calcul des premiers termes :

$$u_1 = u_2 = 3 = u_3$$

Pour tout $x \geqslant 0$: $f(x) = x\sqrt{1 + (x+1)(x+3)}$.

Donc, pour tout $n \geqslant 3$: $\sqrt{1 + f(n)} = \sqrt{1 + n\sqrt{1 + f(n+1)}}$.

Et $u_n = u_{n+1}$.

La suite (u_n) est constante, égale à 3.

1) Montrer que la suite (x_p) converge vers 0_E équivaut à montrer que la suite réelle $(\|x_p\|)$ tend vers 0.

2) Montrer que la suite (x_p) converge vers x équivaut à montrer que la suite $(x - x_p)$ tend vers 0_E.

Rapport Mines-Ponts, 1997

« Quand on étudie une suite (ou une série), il peut être utile d'observer le comportement des premiers termes. »

Ramanujan (1887-1920), *mathématicien indien, autodidacte, est un des grands mathématiciens du* XX^e *siècle. Son extraordinaire intuition lui fit découvrir de nombreuses formules mathématiques, dont beaucoup restent à démontrer. Citons :* $1 - 5\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 + 9\left(\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^3 - 13\left(\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^3 + \cdots = \dfrac{2}{\pi}$ *dont la justification n'est pas évidente.*

3.2. Propriétés des suites convergentes

Théorème 4

L'ensemble des suites convergentes d'éléments d'un espace vectoriel normé, $(E, \| \ \|)$, est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$ et l'application qui, à une suite convergente (x_p), associe sa limite, $\lim\limits_{p\to+\infty} x_p$, est linéaire.
Autrement dit, si les suites (x_p) et (y_p) convergent :

$$\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2 \quad \lim_{p\to+\infty} (\alpha x_p + \beta y_p) = \alpha \lim_{p\to+\infty} x_p + \beta \lim_{p\to+\infty} y_p.$$

Théorème 5

Si (x_p) est une suite convergente de l'espace vectoriel normé, $(E, \| \ \|)$, de limite x, alors toute suite extraite de (x_p) converge aussi vers x.

Théorème 6

Toute suite convergente d'éléments d'un espace vectoriel normé, $(E, \| \ \|)$, est bornée.

3.3. Suites divergentes

Une **suite** (x_p) d'éléments de l'espace vectoriel normé, $(E, \| \ \|)$, qui ne converge pas, est dite **divergente**.

Ceci peut se traduire par :

$$\forall x \in E \ \exists \varepsilon > 0 \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists p \in \mathbb{N} \quad (p \geqslant N \text{ et } \|x_p - x\| > \varepsilon)$$

En pratique, pour établir qu'une suite diverge, on utilisera fréquemment un raisonnement par contraposée et les théorèmes du paragraphe précédent.

3.4. Définitions de normes équivalentes

Sur un même espace vectoriel, on peut utiliser plusieurs normes, et à chaque norme correspond un ensemble de suites convergentes.

Le problème qui se pose alors est : à quelle condition deux normes sur un même espace vectoriel donnent-elles les mêmes suites convergentes ?

Rapport Mines-Ponts, 2003
« Savoir tracer les boules unité dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ permet de mieux comprendre ce que sont des normes équivalentes. »

Théorème 7
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et N_1 et N_2 deux normes sur E. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1) $\exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*} \ \forall x \in E \quad N_2(x) \leqslant \alpha N_1(x)$.

2) Toute suite (x_p) d'éléments de E qui converge vers 0_E relativement à la norme N_1 converge aussi vers 0_E pour la norme N_2.

Démonstration

• On suppose **1)**. Soit (x_p) une suite d'éléments de E qui converge vers 0_E pour la norme N_1. Alors : $\lim\limits_{p \to +\infty} N_1(x_p) = 0$.
Donc $\lim\limits_{p \to +\infty} N_2(x_p) = 0$. La suite converge vers 0_E pour la norme N_2.

• Raisonnons par contraposée. La propriété **1)** n'est pas vraie.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \exists x_n \in E \quad N_2(x_n) > n\, N_1(x_n)$$

Nous en déduisons que $N_2(x_n) > 0$, puis que $x_n \neq 0_E$ et que $N_1(x_n) > 0$.

Posons alors :

$$y_n = \frac{1}{n\, N_1(x_n)}\, x_n$$

Par construction :

$$N_2(y_n) = \frac{1}{n\, N_1(x_n)} N_2(x_n) > 1 ; N_1(y_n) = \frac{1}{n\, N_1(x_n)} N_1(x_n) = \frac{1}{n}.$$

Donc, la suite (y_n) ne converge pas vers 0_E pour la norme N_2. Mais elle converge vers 0_E pour la norme N_1.

Deux **normes** N_1 et N_2 sur le même espace vectoriel E sont dites **équivalentes** si :

$$\exists (a, b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2 \ \forall x \in E \quad a\, N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant b\, N_1(x).$$

Application 2

Cas de $\mathbb{K}^n$

Soit $E = \mathbb{K}^n$ et, pour $x = (x_1, \dots, x_n)$, posons :

$$N_1(x) = \sum_1^n |x_i| \ ; \quad N_2(x) = \sqrt{\sum_1^n |x_i|^2} \ ;$$

$$N_\infty(x) = \max\{|x_i|,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

Montrer que ces normes sont équivalentes.

• On peut écrire :

$$N_1(x) \leqslant \sum_1^n N_\infty(x) = nN_\infty(x).$$

Et, si i_0 est tel que $|x_{i_0}| = N_\infty(x)$, alors :

$$N_1(x) = \sum_1^n |x_i| \geqslant |x_{i_0}| = N_\infty(x)$$

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{K}^n \quad N_\infty(x) \leqslant N_1(x) \leqslant n\,N_\infty(x)$$

Les deux normes N_1 et N_∞ sur $\mathbb{K}^n$ sont équivalentes.

• Avec N_2, on a aussi :

$$N_2(x) \leqslant \sqrt{\sum_1^n N_\infty^2(x)} = \sqrt{n}\,N_\infty(x)$$

De même si $|x_{i_0}| = N_\infty(x)$:

$$N_2(x) \geqslant \sqrt{|x_{i_0}|^2} = |x_{i_0}| = N_\infty(x)$$

Donc, les normes N_2 et N_∞ sur $\mathbb{K}^n$ sont équivalentes.

• On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{K}^n \quad \frac{1}{n}N_1(x) \leqslant N_\infty(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \sqrt{n}\,N_\infty(x) \leqslant \sqrt{n}\,N_1(x).$$

Les normes N_1 et N_2 sont donc équivalentes.

Théorème 8

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, la relation définie sur l'ensemble des normes de E, « N_1 et N_2 sont deux normes équivalentes », est transitive.

3.5. Application aux suites, aux parties bornées et aux boules

Théorème 9

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, N_1 et N_2 deux normes sur E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) Les normes N_1 et N_2 sont équivalentes.

2) Une suite (x_p) d'éléments de E converge vers 0_E relativement à la norme N_1 si, et seulement si, elle converge vers 0_E pour la norme N_2.

3) Une suite (x_p) d'éléments de E converge vers un élément x de E relativement à la norme N_1 si, et seulement si, elle converge vers x pour la norme N_2.

Application 3

Normes sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$

1) *Montrer que l'application N_2 :*

$$\begin{cases} \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & N_2(f) = \sqrt{\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t} \end{cases}$$

définit une norme sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

2) *Comparer les normes N_2 et N_∞, puis N_1 et N_2. Sont-elles équivalentes ?*

1) L'application $(f,g) \mapsto \int_0^1 f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. N_2 est la norme associée.

2) De plus, $N_2 \leqslant N_\infty$. Mais N_2 et N_∞ ne sont pas équivalentes, car la suite de fonctions, (f_n), définie par $f_n(t) = t^n$ est telle que :

$$N_2(f_n) = \sqrt{\int_0^1 t^{2n}\,\mathrm{d}t} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

et

$$N_\infty(f_n) = 1.$$

La suite (f_n) converge donc vers la fonction nulle pour la norme N_2, mais pas pour la norme N_∞.

• De même, $N_1 \leqslant N_\infty$, mais la même suite de fonctions permet de prouver que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

• L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\forall f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \left(\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t$$

soit : $N_1 \leqslant N_2$

Utilisons encore la suite (f_n) :

$$\frac{N_2(f_n)}{N_1(f_n)} = \frac{n+1}{\sqrt{2n+1}}$$

et ce rapport tend vers $+\infty$. Les normes N_1 et N_2 ne sont donc pas des normes équivalentes.

Théorème 10

Soient E un espace vectoriel et N_1, N_2 deux normes équivalentes sur E.

• Les parties bornées de (E, N_1) et les parties bornées de (E, N_2) coïncident.

• Les boules ouvertes de (E, N_1) et les boules ouvertes de (E, N_2) sont emboîtées (*doc.* 5) :

$$\forall x \in E \ \forall r > 0 \ \exists (r_1, r_2) \in (R^{+*})^2 \qquad B_1(x, r_1) \subset B_2(x, r) \subset B_1(x, r_2).$$

Rapport X-ESPCI, 2001

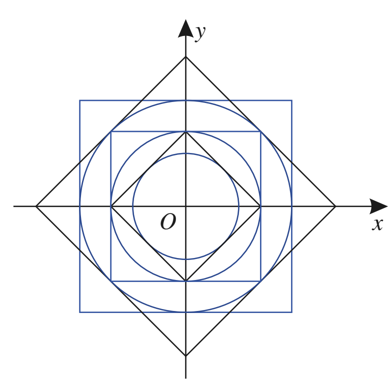
« Le mot magique « normes équivalentes » est souvent invoqué (c'est bien, mais je ne suis pas sûr que tous sachent ce que cela veut dire...) »

3.6. Le cas de la dimension finie

Conformément au programme, nous admettrons le théorème :

Théorème 11

Toutes les normes sur un espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes.



Doc. 5. *Dans* $\mathbb{R}^2$.

Théorème 12

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $(x_p)_p$ une suite d'éléments de E.

On note $x_p = \sum_{i=1}^{n} x_{i,\,p}\, e_i$.

Alors, la suite $(x_p)_p$ converge dans E vers l'élément $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i$ si, et seulement si, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, la suite de scalaires $(x_{i,\,p})_p$ converge vers x_i.

Remarque

L'intérêt de ce *théorème* réside dans le fait fondamental que, sur un espace vectoriel de dimension finie, les suites convergentes sont toujours les mêmes indépendamment de la norme choisie. On se permet alors d'utiliser des phrases telles que : « Soit (x_p) une suite convergente de $\mathbb{K}^n$ », sans préciser la norme utilisée pour définir la convergence.

A contrario, dire « Soit (f_n) une suite convergente de $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ » n'a pas de sens, car on ne précise pas de quel type de convergence il s'agit.

Démonstration

E étant de dimension finie, toutes les normes sur E sont équivalentes. Nous allons utiliser :

$$\|x\|_1 = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i \right\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

• Supposons que la suite (x_p) converge vers x dans E. On a :

$$\forall\, p \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant |x_{i,p} - x_i| \leqslant \|x_p - x\|_1$$

D'où $\lim_{p \to +\infty} x_{ip} = x_i$.

• La réciproque découle de :

$$\forall\, p \geqslant N \quad \|x_p - x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_{ip} - x_i|\,.$$

Rapport X-ESPCI, 2001

« Si on avait le choix de la norme sur $\mathbb{R}^n$, il est indispensable de rappeler que toutes sont équivalentes. »

Application 4

Normes sur $\mathbb{K}[X]$

Nous avons déjà rencontré les normes suivantes.

Si $P(X) = \sum_{0}^{n} a_k\, X^k$:

$$N_1(P) = \sum_{0}^{n} |a_k|\,; \quad N_2(P) = \sqrt{\sum_{0}^{n} |a_k|^2}\,;$$

$$N_\infty(P) = \sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k|\,.$$

Montrer que ces normes ne sont pas équivalentes.

• Ces normes sont comparables :

$$\forall\, P \in \mathbb{K}[X] \quad N_\infty(P) \leqslant N_2(P) \leqslant N_1(P)$$

• Mais, elles sont deux à deux non équivalentes.

En effet, en prenant $P_n(X) = \sum_{0}^{n} X^k$, on a :

$$N_\infty(P_n) = 1\,; \quad N_2(P_n) = \sqrt{n+1}\,;$$

$$N_1(P) = n + 1$$

L'ensemble $\{P_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est donc une partie bornée de $(\mathbb{K}[X], N_\infty)$.

Mais ce n'est pas une partie bornée de l'espace vectoriel normé $(\mathbb{K}[X], N_2)$.

Nous en déduisons que N_∞ et N_2 ne sont pas équivalentes. Le même argument s'applique à N_∞ et N_1, ces normes ne sont pas équivalentes.

De plus, l'ensemble $\left\{ \dfrac{P_n}{\sqrt{n+1}} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ est une partie bornée de l'espace vectoriel normé $(\mathbb{K}[X], N_2)$, mais pas de l'espace vectoriel normé $(\mathbb{K}[X], N_1)$. Les normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes.

3.7. Suites de Cauchy *(PSI)*

Une suite (x_p) de l'espace vectoriel normé, $(E, \| \ \|)$, est appelée **suite de Cauchy** de E si elle vérifie la condition :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall (p,k) \in \mathbb{N}^2 \qquad (p \geqslant N \quad \Rightarrow \quad \|x_{p+k} - x_p\| \leqslant \varepsilon)$$

Théorème 13

Toute suite convergente de $(E, \| \ \|)$ est une suite de Cauchy de E.

Démonstration

Soit (x_p) une suite convergente de limite x. Fixons $\varepsilon > 0$. On sait que :

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall p \geqslant N \qquad \|x_p - x\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'où : $\forall p \geqslant N \qquad \|x_p - x_{p+k}\| \leqslant \varepsilon$.

Théorème 14

Toute suite de Cauchy de $(E, \| \ \|)$ est bornée.

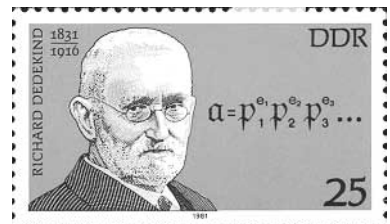
Théorème 15

Toute suite de Cauchy d'un espace vectoriel normé de dimension finie est convergente.

Ce *théorème* est admis. Il sera traité dans le livre d'exercices, mais sa démonstration est hors programme.

Rapport X-ESPCI, 2002

« $\|U^{n+p}(x) - U^n(x)\| \leqslant C^n \|U^p(x) - x\|$ ne prouve pas que la suite est de Cauchy. »



Richard Dedekind (1831-1916), *mathématicien allemand.*
Une théorie complète des nombres réels a été nécessaire pour que le critère de Cauchy, d'abord admis, puisse être démontré. Ces théories datent des années 1860-1870 *et sont l'œuvre de Dedekind, Weierstrass et Cantor.*

Rapport Mines-Ponts, 2000

« La condition $\dfrac{b_n}{a_n} - \dfrac{b_{n-1}}{a_{n-1}}$ tend vers 0 n'assure pas que la suite $\dfrac{b_n}{a_n}$ soit de Cauchy... »

Application 5

Une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}^3$

On considère, dans l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$, la suite $(Z_n) = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ définie par :

$$Z_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$$ *et, pour tout n :*

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n - \dfrac{1}{6}w_n - 61 \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{1}{2}v_n - \dfrac{1}{3}w_n + 61 \\ w_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{1}{3}v_n - \dfrac{1}{3}w_n + 61 \end{cases}$$

La norme euclidienne est notée $\| \ \|$.

1) *Montrer que la suite (Z_n) vérifie une relation matricielle de la forme $Z_{n+1} = A\,Z_n + B$.*

Préciser A et B.

2) *Montrer que, pour tout vecteur X de $\mathbb{R}^3$, on a $\|AX\| \leqslant k\|X\|$, où k est un réel de $]0, 1[$.*

3) *En déduire que la suite (Z_n) est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}^3$.*

4) *Montrer qu'elle converge et calculer sa limite.*

1) Pour tout n, on a :

$$Z_{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} Z_n + \begin{pmatrix} -61 \\ 61 \\ 61 \end{pmatrix}.$$

2) Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Nous obtenons :

$$\|AX\| = \frac{1}{6}\sqrt{(2x-z)^2 + (2x+3y-2z)^2 + 4(x+y-z)^2}$$
$$\leqslant \frac{1}{6}\sqrt{32x^2+33y^2+29z^2} \leqslant \frac{\sqrt{33}}{6}\|X\|.$$

Le réel $k = \frac{\sqrt{33}}{6} = \sqrt{\frac{11}{12}}$ convient.

3) Vous montrerez que, pour tout $n \geqslant 1$:

$$\|Z_{n+1} - Z_n\| \leqslant k^n \|Z_1 - Z_0\|.$$

Alors, pour tout entier n et tout $p \geqslant 1$:

$$\|Z_{n+p} - Z_n\| = \left\|\sum_{j=1}^{p}(Z_{n+j} - Z_{n+j-1})\right\|$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{p} k^{n+j-1}\|Z_1 - Z_0\|$$
$$= \frac{1}{1-k}\|Z_1 - Z_0\|\left(\sqrt{\frac{11}{12}}\right)^n.$$

La suite (Z_n) est donc une suite de Cauchy.

4) L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est de dimension finie, donc la suite (Z_n) converge.

Notons $L = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ sa limite et utilisons les opérations sur les suites convergentes. Le vecteur L vérifie : $L = AL$.

D'où $a = -99$, $b = 36$ et $c = 30$.

4 Une once de topologie

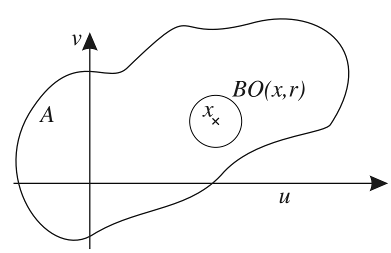
Rapport X-ESPCI, 2002
« Le cours sur la topologie est mal su ou mal assimilé. »

Dans tout ce paragraphe, $(E, \| \ \|)$ est un espace vectoriel normé et d est la distance associée à la norme.

4.1. Point intérieur *(PSI)*

Un point x d'une partie A de E est appelé **point intérieur** à A s'il existe une boule ouverte de centre x incluse dans A (*doc.* 6) :

$$\exists r > 0 \qquad BO(x,r) \subset A$$

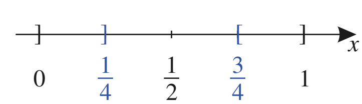


Doc. 6.

Exemple $E = \mathbb{R}$, $\|x\| = |x|$, $A =]0,1]$.

$\frac{1}{2}$ est un point intérieur à A car $BO\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = \left]\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right[\subset A$ (*doc.* 7).

1 n'est pas un point intérieur à A.



Doc. 7.

▶ ***Pour s'entraîner : ex. 8.***

4.2. Ensemble ouvert

Une partie A de E est un **ouvert** (ou une **partie ouverte**) de E si, pour tout point x de A, il existe une boule ouverte de centre x, contenue dans A.

$$\forall x \in A \ \exists r > 0 \qquad BO(x,r) \subset A$$

(PSI) La définition signifie que tout point de A est point intérieur à A.

Exemples

E et $\varnothing$ sont des ouverts de $(E, \| \ \|)$. $]0, 1]$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$.

▶ ***Pour s'entraîner : ex. 9.***

Application 6

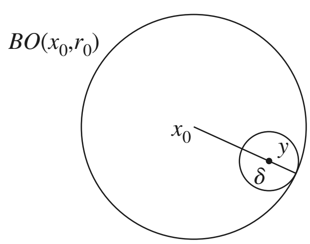
Les boules ouvertes

Montrer que toute boule ouverte de E est un ouvert de E.

Soit x_0 dans E, $r_0 > 0$ et $A = BO(x_0, r_0)$.

Nous voulons prouver que :

$$\forall y \in A \quad \exists \delta > 0 \qquad BO(y, \delta) \subset BO(x_0, r_0)$$



Doc. 8.

Puisque y est dans $BO(x_0, r_0)$: $d(y, x_0) < r_0$.

L'intuition issue de la géométrie invite à poser :

$$\delta = r_0 - d(y, x_0)$$

Prouvons que $BO(y, \delta) \subset BO(x_0, r_0) = A$.

Soit z dans $BO(y, \delta)$, alors :

$$d(z, x_0) \leqslant d(z, y) + d(y, x_0)$$

$$< \delta + d(y, x_0) = r_0.$$

Donc $z \in BO(x_0, r_0)$.

Théorème 16

L'intersection de deux ouverts de E est un ouvert de E.

Démonstration

Soit A_1 et A_2 deux ouverts de E (*doc.* 9).

1) Si $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, le résultat est acquis.

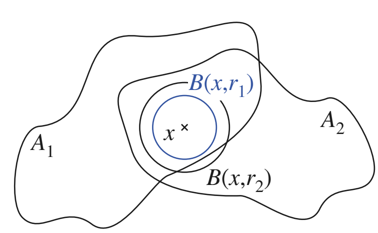
2) Si $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$, soit x dans $A_1 \cap A_2$.

A_1 est ouvert : $\exists r_1 > 0 \ \ BO(x, r_1) \subset A_1$.

De même, A_2 est ouvert : $\exists r_2 > 0 \ \ BO(x, r_2) \subset A_2$.

Notons $r = \min(r_1, r_2)$. Alors :

$$BO(x, r) \subset BO(x, r_1) \cap BO(x, r_2) \subset A_1 \cap A_2.$$



Doc. 9. *Intersection de deux ouverts.*

Théorème 17
Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille quelconque d'ouverts de E.
La réunion $\bigcup_{i\in I} A_i$ de cette famille est un ouvert de E.

Par récurrence, on établit que toute intersection finie d'ouverts de E est un ouvert de E. Mais, c'est faux pour une intersection quelconque. Il suffit, pour s'en assurer, de considérer, sur $\mathbb{R}$:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[= \{0\}.$$

Les notions de convergence et d'ouvert sont en relation par le résultat suivant que nous vous laissons démontrer à titre d'exercice.

Théorème 18
Si (x_p) est une suite convergente de E, de limite x, alors tout ouvert de E contenant x contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

4.3. Point adhérent

Soit A une partie de E et x un point de E. Le point x est dit **adhérent** à A si toute boule ouverte de E, de centre x, a un point commun au moins avec A, c'est-à-dire :

$$\forall r > 0 \quad BO(x,r) \cap A \neq \emptyset.$$

Théorème 19 (*PSI*)
Le point x de E est adhérent à la partie A de E si, et seulement s'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x, c'est-à-dire :

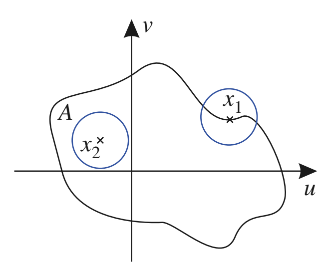
$$\exists\, (x_p) \in A^{\mathbb{N}} \quad \lim_{p\to+\infty} \|x_p - x\| = 0.$$

Démonstration

• Soit (x_n) une suite d'éléments de A qui converge vers x et $r > 0$. Puisque la suite (x_n) converge vers x, il existe p tel que $x_p \in BO(x,r)$. Donc : $BO(x,r) \cap A \neq \emptyset$.

• Réciproquement, pour tout p de $\mathbb{N}$, il existe x_p dans A tel que $x_p \in BO\left(x, \dfrac{1}{2^p}\right)$.

La suite (x_n) d'éléments de A converge vers x.



Doc. 10. *Les points x_1 et x_2 sont adhérents à A.*

Exemples

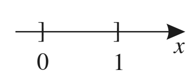
- Tout point de A est un point adhérent à A (*doc.* 10).

- $E = \mathbb{R}$, $\|x\| = |x|$, $A =]0,1]$.

0 n'appartient pas à A, mais il est adhérent à A (*doc.* 11).

- Si A est une partie majorée non vide (respectivement minorée) de $\mathbb{R}$, la borne supérieure (respectivement inférieure) de A est un point adhérent à A.

En effet, A étant une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, elle admet une borne supérieure a.
Soit alors $r > 0$. a est le plus petit des majorants de A : $]a-r, a] \cap A \neq \emptyset$.
On en déduit que a est adhérent à A.



Doc. 11. 0 *est adhérent à* A.

▶ ***Pour s'entraîner : ex. 10 (PSI).***

4.4. Ensemble fermé. Lien entre ouverts et fermés

Une **partie** A de E est dite **fermée** dans E si tout point adhérent à A est un point de A. On dit aussi que A est un fermé de E.

Exemples

- E et $\varnothing$ sont des fermés de E.
- $[0,1[$ n'est pas un fermé de $\mathbb{R}$.

Une partie de E peut être ni ouverte, ni fermée.
Ainsi $E=\mathbb{R}$, $A=]0,1]$.

Théorème 20
A est un fermé de E si, et seulement si, $\complement_E A$ est un ouvert de E.

Démonstration
• Supposons que A soit une partie fermée de E. Soit x un élément de $\complement_E A$, x n'est pas un point adhérent à A, donc :

$$\exists\, r>0 \quad BO(x,r)\cap A=\varnothing.$$

Ceci équivaut à :

$$\exists\, r>0 \quad BO(x,r)\subset \complement_E A.$$

Donc $\complement_E A$ est un ouvert de E.
• Réciproquement, supposons que $\complement_E A$ soit un ouvert de E. Pour tout x de $\complement_E A$:

$$\exists\, r>0 \quad BO(x,r)\cap A=\varnothing.$$

x n'est pas adhérent à A. Les seuls points adhérents à A sont les points de A. A est fermé.

Si deux normes N_1, N_2 sur E sont équivalentes, alors les ouverts (respectivement fermés) de (E,N_1) et (E,N_2) sont identiques.
On parle donc d'ouvert de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{K}^n$, sans faire référence à la norme, car, en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

▶ ***Pour s'entraîner : ex. 11.***

Exemple

Toute boule fermée de E est une partie fermée de E. En effet, si x appartient au complémentaire de $BF(a,r)$, la boule $BO\left(x,\dfrac{(\|x-a\|-r)}{2}\right)$ est contenue dans le complémentaire de $BF(a,r)$.

Théorème 21
La réunion de deux fermés de E est un fermé de E.

Théorème 22
Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de fermés de E.
L'intersection de cette famille :

$$\bigcap_{i\in I} F_i=\{x\in E \mid \forall i\in I,\ x\in F_i\}$$

est un fermé de E.

On en déduit, par récurrence, que la réunion d'une famille finie de fermés de E est un fermé de E.
Mais, l'exemple suivant montre que ceci est faux pour une famille infinie.
$E=\mathbb{R}$ et, pour n dans $\mathbb{N}^*$,

$$F_n=\left[\frac{1}{n},2-\frac{1}{n}\right]$$

Alors :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} F_n=]0,2[$$

Démonstration

Fixons un point x adhérent à $\bigcap_{i \in I} F_i$.

Pour tout réel $r > 0$, $BO(x,r) \cap \left(\bigcap_{i \in I} F_i\right) \neq \emptyset$.

Pour tout i de I, x est donc un point adhérent à F_i. Mais F_i est fermé, donc x appartient à F_i.

$\bigcap_{i \in I} F_i$ est donc bien un fermé de E.

► ***Pour s'entraîner : ex. 12.***

Rapport X-ESPCI, 2001

« Dans le cas borné, la compacité de F est souvent invoquée mais des démonstrations ... sont franchement absurdes, en particulier celles qui se réfèrent à l'existence de majorants pour des parties de $\mathbb{R}^n$. »

4.5. Parties compactes

Une partie fermée et bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie est dite **partie compacte** de cet espace.

Exemples

- Toute partie A finie d'un espace vectoriel normé (E, N) est compacte.
- Soit u une suite d'éléments de (E, N) convergeant vers L. La partie $A = \{L\} \cup \{u_n \,;\, n \in \mathbb{N}\}$ est un compact de E. En effet, la suite convergente est bornée. A l'est aussi. De plus, si x est dans $\complement_E A$, alors $N(x - L) = \alpha > 0$. La boule ouverte de centre L et de rayon $\frac{\alpha}{2}$ contient tous les termes de la suite à partir d'un rang N. $\exists\, r > 0 \quad BO(x,r) \cap A = \emptyset$. A est fermé.

Rapport Mines-Ponts, 2003

« Dans cette partie du programme, les inégalités se creusent entre les étudiants : certains, plus qu'avant, la maîtrisent très correctement et d'autres, au contraire, ont beaucoup de difficultés à justifier, par exemple,de la nature topologique d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ (ouvert, fermé, compact). »

5 Comparaison de suites

Rapport X-ESPCI, 2002

« On peut lire dans les copies des expressions comme "fermé borné", on ne sait ni de quel fermé il s'agit, ni par quoi il est borné. »

Dans ce paragraphe, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments du $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé $(E, \|\ \|)$, et $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.

5.1. Relation de domination

La **suite** (u_n) est dite **dominée** par la suite (α_n) si elle vérifie une des deux propriétés suivantes qui sont équivalentes :

$$\exists\, K \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} \qquad \|u_n\| \leqslant K|\alpha_n|$$

$$\exists\, n_0\ \exists M \in \mathbb{R}\ \forall n > n_0 \qquad \|u_n\| \leqslant M|\alpha_n|.$$

On écrit alors $u_n = O(\alpha_n)$.

Vous prouverez aisément le *théorème* suivant.

Théorème 23

Lorsque la suite de scalaires (α_n) ne s'annule pas, la suite (u_n) est dominée par (α_n) si, et seulement si, la suite vectorielle $\left(\frac{1}{\alpha_n} u_n\right)$ est une suite bornée de $(E, \|\ \|)$.

Rapport Mines-Ponts, 2000

« La notion de compact est souvent ignorée ; certains se contentent du caractère fermé de S. »

Rapport X-ESPCI, 2001

« De nombreuses erreurs proviennent d'une mauvaise utilisation de la notation O. »

Rapport ENS Cachan, 2000

« Les notations de Landau ne sont pas toujours bien comprises. »

5.2. Relation de négligeabilité

La **suite** (u_n) est dite **négligeable** devant la suite (α_n) si :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant N \quad \|u_n\| \leqslant \varepsilon |\alpha_n|$$

On écrit alors $u_n = o(\alpha_n)$.

Théorème 24

Lorsque la suite scalaire (α_n) ne s'annule pas, la suite (u_n) est négligeable devant (α_n) si, et seulement si, la suite vectorielle $\left(\dfrac{1}{\alpha_n} u_n\right)$ converge vers 0_E.

5.3. Équivalence de deux suites

Deux **suites** scalaires (α_n) et (β_n) ne s'annulant pas, sont dites **équivalentes** si :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 1.$$

On écrit alors : $\alpha_n \sim \beta_n$.

Rapport Mines-Ponts, 2000
« Il reste encore beaucoup de problèmes quant à l'utilisation des équivalents . »

Rapport Mines-Ponts, 2003
« Les opérations sur les équivalents (produit, composition, somme) sont mystérieuses. »

Théorème 25

Soit (α_n) et (β_n) deux suites scalaires ne s'annulant pas.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $\alpha_n \sim \beta_n$
- $\begin{cases} \exists (\varepsilon_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha_n = \beta_n(1+\varepsilon_n) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0 \end{cases}$
- $\alpha_n = \beta_n + o(\beta_n)$.

Il est important de connaître ces différents points de vue ; à vous de démontrer les équivalences en question.

Les équivalents ne s'additionnent pas.

5.3.1 Comparaison des suites de référence

Rappelons les résultats vus en Première année :

- Avec $a > 1$ et $\alpha > 0$, $n^\alpha = o(a^n)$ et $a^n = o(n!)$.
- Avec $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, $(\ln n)^\beta = o(n^\alpha)$.
- $n! = o(n^n)$.

Rapport ENS Cachan, 2000
« ...quelques erreurs de raisonnement : manipulation erronée d'équivalents,... »

► ***Pour s'entraîner : ex. 13.***

Application 7

Exponentielles et logarithmes de suites équivalentes

1) *On pose* $u_n = n$ *et* $v_n = n - \ln(n)$. *Prouver que les deux suites* (u_n) *et* (v_n) *sont équivalentes et que les suites* $(\exp(u_n))$ *et* $(\exp(v_n))$ *ne le sont pas.*

2) *Étant données deux suites réelles* (u_n) *et* (v_n), *prouver que les deux suites* $\big(\exp(u_n)\big)$ *et* $\big(\exp(v_n)\big)$ *sont équivalentes si, et seulement si,* $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

3) *On pose* $x_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ *et* $y_n = 1 + \dfrac{1}{n^2}$. *Prouver que les deux suites* (x_n) *et* (y_n) *sont équivalentes et que les suites* $\big(\ln(x_n)\big)$ *et* $\big(\ln(y_n)\big)$ *ne le sont pas.*

4) *Soit* (x_n) *et* (y_n) *deux suites équivalentes de réels strictement positifs. Prouver que, si la suite* (y_n) *admet une limite dans* $\overline{\mathbb{R}}\backslash\{1\}$, *alors les suites* $\big(\ln(x_n)\big)$ *et* $\big(\ln(y_n)\big)$ *sont équivalentes.*

Rapport TPE, 1997

« La notation O *est souvent confondue avec la notation* o. *Pour de nombreux candidats, on a :* $u_n \sim v_n \Rightarrow \mathrm{e}^{u_n} \sim \mathrm{e}^{v_n}$. *»*

1) On constate que $\dfrac{v_n}{u_n} = 1 - \dfrac{\ln(n)}{n}$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{u_n} = 1$ et les suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes. Par contre :

$$\frac{\exp(v_n)}{\exp(u_n)} = \exp\big(-\ln(n)\big) = \frac{1}{n},$$

donc les suites $\big(\exp(u_n)\big)$ et $(\exp(v_n))$ ne sont pas équivalentes.

2) Puisque $\dfrac{\exp(u_n)}{\exp(v_n)} = \exp(u_n - v_n)$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{\exp(u_n)}{\exp(v_n)} = 1.$$

D'où l'équivalence demandée.

3) Il est clair que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = 1$. De plus :

$$\ln(x_n) \sim \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \ln(y_n) \sim \frac{1}{n^2}$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln(x_n)}{\ln(y_n)} = +\infty$.

Les suites $\big(\ln(x_n)\big)$ et $\big(\ln(y_n)\big)$ ne sont pas équivalentes bien que (x_n) et (y_n) le soient.

4) Puisque les suites (x_n) et (y_n) sont équivalentes, on peut écrire $x_n = y_n(1 + \varepsilon(n))$, où $\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon(n) = 0$.

Donc $\ln\big(x_n\big) = \ln\big(y_n\big) + \ln\big(1 + \varepsilon(n)\big)$ et :

$$\frac{\ln(x_n)}{\ln(y_n)} = 1 + \frac{\ln(1+\varepsilon(n))}{\ln(y_n)}$$

(Le quotient par $\ln(y_n)$ est possible pour n assez grand.) L'hypothèse sur la suite (y_n) permet de conclure que :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(x_n)}{\ln(y_n)} = 1.$$

Les suites $\big(\ln(x_n)\big)$ et $\big(\ln(y_n)\big)$ sont équivalentes.

FICHE MÉTHODE

- Pour montrer que **l'application N de E dans $\mathbb{R}$ est une norme**, on peut :
  - si N se présente sous la forme d'une racine, regarder si elle dérive d'un produit scalaire ;
  - sinon, montrer qu'elle vérifie les quatre axiomes de la définition d'une norme.

- Pour montrer qu'**une partie A de l'espace vectoriel normé $(E, \| \ \|)$ est bornée**, on prouve que :

$$\exists\, K \in \mathbb{R}^+ \quad \forall x \in A \quad \|x\| \leqslant K \quad \text{ou} \quad \exists\, BO(x,r) \quad A \subset BO(x,r)$$

- Pour montrer que la **suite (x_p) converge vers 0_E dans $(E, \| \ \|)$**, prouver que $\lim\limits_{p \to +\infty} \|x_p\| = 0$.

- Pour montrer que la **suite (x_p) converge vers x dans $(E, \| \ \|)$**, on peut :
  - prouver que $\lim\limits_{p \to +\infty} \|x_p - x\| = 0$;
  - lorsque E est muni d'une base $(e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ et que, pour tout p, $x_p = \sum\limits_{i=1}^{n} x_{i,p}\, e_i$, et $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\, e_i$ établir que, pour chaque i de $[\![1,n]\!]$, la suite $(x_{i,p})_p$ converge vers x_i.

- Pour montrer que les **normes N_1 et N_2 sont équivalentes** dans E, on peut :
  - si E est de dimension finie, rappeler que toutes les normes sur E sont équivalentes ;
  - si E n'est pas un espace vectoriel de dimension finie, chercher deux réels > 0, a et b, tels que :

$$\forall x \in E \quad a\, N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant b\, N_1(x).$$

- Pour montrer que **deux normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes**, on peut :
  - chercher une suite (x_p) d'éléments de E, convergeant vers 0_E pour N_1, mais pas pour N_2 ;
  - chercher une suite (x_p) d'éléments de $E \setminus \{0_E\}$, telle que $\dfrac{N_1(x_p)}{N_2(x_p)}$, ou l'inverse, tende vers $+\infty$ ou l'inverse.

- *(PSI)* Pour montrer qu'**un point x de A est intérieur à A**, on peut chercher une boule ouverte de centre x, contenue dans A.

- Pour montrer qu'**un point x de E est adhérent à A**, on peut :
  - montrer que toute boule ouverte de centre x rencontre A ;
  - *(PSI)* chercher une suite d'éléments de A convergeant vers x ;

- Pour montrer que **A est ouvert**, on peut :
  - montrer que, pour tout point x de A, on peut trouver une boule ouverte de centre x contenue dans A ;
  - montrer que $\complement_E A$ est fermé.

- Pour montrer que **A est fermé**, on peut :
  - montrer que tout point adhérent à A est dans A ;
  - montrer que $\complement_E A$ est ouvert.

Exercice résolu

1. Une curieuse boule dans $\mathbb{R}^2$

ÉNONCÉ

1) Montrer que l'application $\left((x,y) \longmapsto N(x,y) = \int_0^1 \left|x + \sqrt{2}\, t\, y\right| \mathrm{d}t\right)$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

2) Déterminer la boule unité $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid N(x,y) \leqslant 1\right\}$.

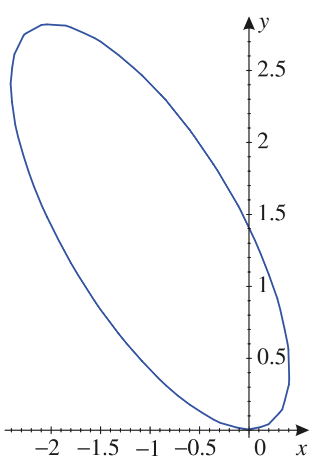
3) La représenter graphiquement dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On montrera que B est délimitée par des segments et deux courbes dont l'équation se simplifie en effectuant une rotation du repère.

CONSEILS

La seule difficulté réside dans :

$$N(x,y) = 0 \Rightarrow (x,y) = 0$$



Doc. 1.

```
> with(plots) :
> implicitplot(x^2
  +sqrt(2)*x*y+y^2
  -sqrt(2)*y,
  x=-3..3,y=-3..3);
```

SOLUTION

1) Soit (x,y) tel que $N(x,y) = 0$. La fonction : $t \mapsto \left|x + \sqrt{2}\, t\, y\right|$ est continue et positive sur $[0,1]$. Donc, pour tout t de $[0,1]$, on a :

$$\left|x + \sqrt{2}\, t\, y\right| = 0, \quad \text{puis} \quad x + \sqrt{2}\, t\, y = 0.$$

Cette fonction polynôme s'annulant sur $[0,1]$ est nulle : $x = y = 0$.

2) Déterminons l'ensemble $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid N(x,y) \leqslant 1\right\}$.

Puisque $N(x,y) = N(-x,-y)$, il suffit de déterminer :

$$B \cap \{(x,y) \mid y \geqslant 0\}.$$

- Si $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, alors $N(x,y) = \int_0^1 \left(x + \sqrt{2}\, t\, y\right) \mathrm{d}t = x + \frac{\sqrt{2}}{2} y.$
- Si $x \leqslant 0$ et $y \geqslant 0$, alors $N(x,y) = \int_0^1 \left|x + \sqrt{2}\, t\, y\right| \mathrm{d}t.$

La fonction : $t \mapsto x + \sqrt{2}\, t\, y$ est affine, elle croît de x à $x + \sqrt{2}\, y$ lorsque t croît de 0 à 1.

Si $x + \sqrt{2} y \leqslant 0$, alors $N(x,y) = \int_0^1 -\left(x + \sqrt{2}\, t\, y\right) \mathrm{d}t = -\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2} y\right).$

Si $x + \sqrt{2} y > 0$, alors $y > 0$ et $N(x,y) = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{x^2}{y} + x + \frac{\sqrt{2}}{2} y.$

3) • Si $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, alors B est délimitée par la droite d'équation :

$$x + \frac{\sqrt{2}}{2} y = 1$$

• Si $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$ et $x + \sqrt{2}\, y \leqslant 0$, alors B est délimitée par la droite d'équation :

$$x + \frac{\sqrt{2}}{2} y = -1$$

• Si $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$ et $x + \sqrt{2}\, y > 0$, alors B est délimitée par la courbe (C) d'équation (*doc.* 1) :

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{x^2}{y} + x + \frac{\sqrt{2}}{2} y = 0, \quad \text{soit} \quad x^2 + \sqrt{2} x y + y^2 - \sqrt{2} y = 0.$$

Comme l'indique l'énoncé, considérons la rotation d'angle α. Si M a pour coordonnées (x, y) dans le repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et (X, Y) dans le repère $(O; \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$, on a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

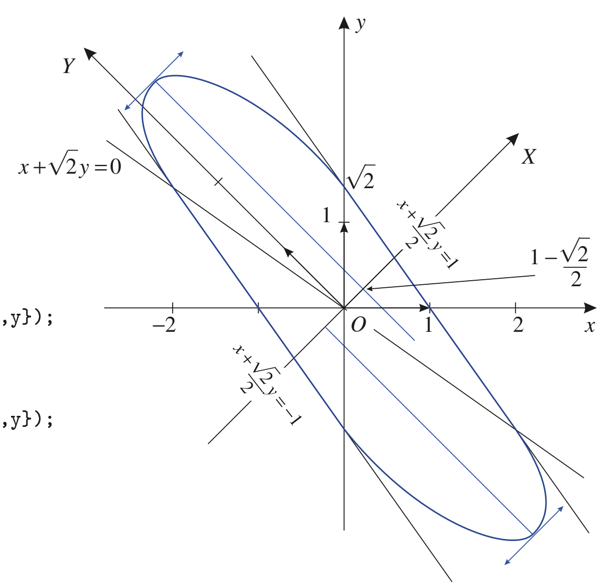
Par conséquent :

$$\begin{aligned} M \in (C) \Leftrightarrow x^2 + \sqrt{2}\,x\,y + y^2 - \sqrt{2}\,y = 0 \Leftrightarrow & (\cos\alpha\,X - \sin\alpha\,Y)^2 \\ & +\sqrt{2}(\cos\alpha\,X - \sin\alpha\,Y)(\sin\alpha\,X + \cos\alpha\,Y) \\ & +(\sin\alpha\,X + \cos\alpha\,Y)^2 - \sqrt{2}(\sin\alpha\,X + \cos\alpha\,Y) = 0. \end{aligned}$$

Le terme en $X\,Y$ a pour coefficient $\sqrt{2}\cos 2\alpha$.
Choisissons $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$, l'équation se simplifie et après factorisation canonique :

$$\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(X - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^2 + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(Y - \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^2 = 1.$$

On reconnaît l'équation d'une ellipse de centre le point : $\left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, de grand axe $a = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ et de petit axe $b = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$.



Doc. 2.

```
> solve({x+sqrt(2)*y/2=1,x^2+sqrt(2)*x*y+y^2
                                 -sqrt(2)*y=0},{x,y});
```

$$\left\{y = \sqrt{2}, x = 0\right\}, \left\{y = \sqrt{2}, x = 0\right\}$$

```
> solve({x+sqrt(2)*y/2=-1,x^2+sqrt(2)*x*y+y^2
                                 -sqrt(2)*y=0},{x,y});
```

$$\left\{y = \sqrt{2}, x = -2\right\}, \left\{y = \sqrt{2}, x = -2\right\}$$

```
> solve({x+sqrt(2)*y/2=-1,x+sqrt(2)*y=0},{x,y});
```

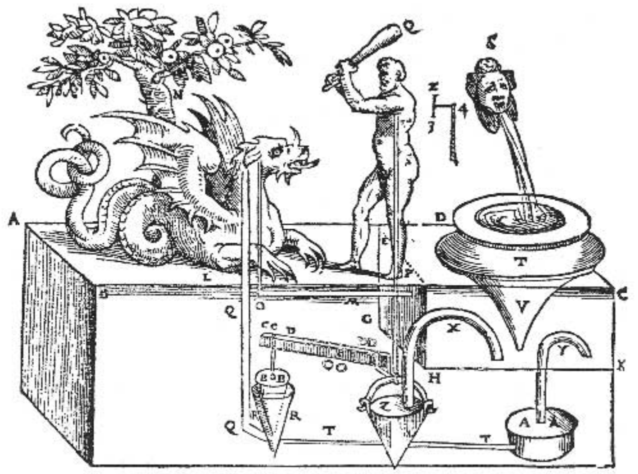
$$\left\{y = \sqrt{2}, x = -2\right\}$$

Exercice résolu

2. L'algorithme de Héron

ÉNONCÉ

Héron d'Alexandrie utilisait une suite pour déterminer des valeurs approchées des racines des entiers. Nous allons étudier cette méthode et l'appliquer ensuite à des complexes.



***Héron d'Alexandrie** (1[er] siècle après J.-C.), mathématicien grec. Nous lui devons la formule liant l'aire, le périmètre et les trois côtés d'un triangle :* $\boldsymbol{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$

1) a) a désignant un réel fixé, étudier la suite (u_n) définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R}^*, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$$

b) Afin de préciser la vitesse de convergence de la suite (u_n), on pose :

$$v_n = \frac{u_n}{\sqrt{a}},$$

puis $e_n = v_n - 1$.

Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$0 \leqslant e_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} e_n^2 .$$

La convergence est alors dite quadratique.

c) On fixe $a = 7$ et $u_0 = 1$. Déterminer n pour que u_n fournisse une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-7} près. Donner une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-7} près.

2) a désigne maintenant un complexe fixé non nul, α et $-\alpha$ ses racines carrées.

a) La suite (z_n) est définie par :

$$z_0 \in \mathbb{C}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad z_{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } z_n = 0 \\ \dfrac{1}{2}\left(z_n + \dfrac{a}{z_n}\right) & \text{si } z_n \neq 0 \end{cases}$$

On suppose qu'elle ne s'annule pas. En utilisant la suite (w_n) définie par :

$$w_n = \frac{z_n - \alpha}{z_n + \alpha},$$

montrer qu'il est possible de choisir z_0 tel que la suite (z_n) converge vers α (respectivement $-\alpha$). Interpréter géométriquement ce choix.

b) Montrer que, si la suite (z_n) s'annule, le point d'affixe z_0 appartient à une droite d'origine O que vous décrirez géométriquement. Précisez les points de cette droite dont l'affixe conduit à une suite stationnaire nulle.

c) Décrire, en fonction de la position du point d'affixe z_0, la nature de la suite (z_n).

d) On fixe $a = i$ et $z_0 = 1$. Déterminer la limite α de la suite (z_n).

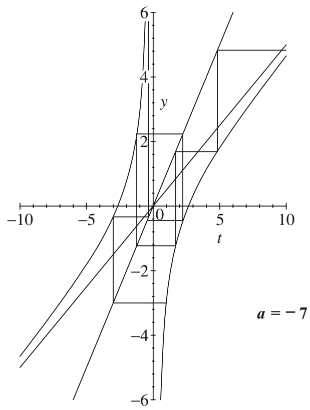
CONSEILS

SOLUTION

1) a) La suite (u_n) est une suite récurrente associée à la fonction continue sur $\mathbb{R}^*$:

$$f : x \mapsto f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right).$$

Si la suite converge vers $l \neq 0$, alors $l^2 = a$.




```
> restart:with(plots):
> f :=x->(1/2)*(x-7/x);
```

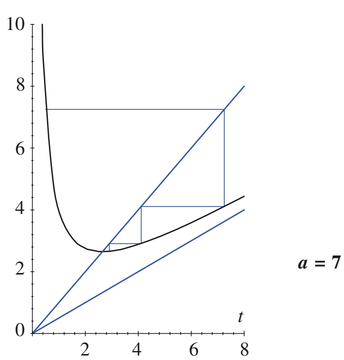
$$f := x \rightarrow \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}\frac{1}{x}$$

```
> x:='x': g1:=plot ({f(t),t,t/2},
          t=-10..10, y=-6..6,
          discont=true):
> res:=NULL; x :=1.0:
```

$$res :=$$

```
> to 8 do res:=res,[x,f(x)],
         [f(x),f(x)]; x:=f(x) od:
> g10:= plot ([res]):
> display({g1,g10});
```

Doc. 1.




```
> restart:with(plots):
> f :=x->(1/2)*(x+7/x);
```

$$f := x \rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}\frac{1}{x}$$

```
> x:='x': g1:=plot ({f(t),t,t/2},
          t=0..8, y=0..10,
          discont=true):
> res:=NULL; x :=0.5:
```

$$res :=$$

```
> to 14 do res:=res,[x,f(x)],
         [f(x),f(x)]; x:=f(x) od:
> g10:= plot ([res]):
> display({g1,g10});
```

Doc. 2.

Si $a < 0$, la suite diverge. Le *document* 1 permet de le vérifier.

Si $a = 0$, la suite converge vers 0.

Si $a > 0$, l'équation admet deux solutions. La fonction f étant impaire, nous nous limiterons au cas $u_0 > 0$.

On montre alors par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$, on a $u_n \geqslant \sqrt{a}$. La fonction f étant croissante sur $[\sqrt{a}, +\infty[$, la suite (u_n) est monotone. Or, $u_2 - u_1 \geqslant 0$, donc la suite est décroissante. Minorée par $\sqrt{a}$, elle converge. La seule limite possible est $\sqrt{a}$ (*doc.* 2).

Si $u_0 < 0$, la suite converge vers $-\sqrt{a}$.

b) Si $u_0 > 0$, on a $\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(v_n + \frac{1}{v_n}\right) \quad$ et $\quad v_0 > 0$.

v_n converge vers 1 en décroissant, à partir du rang 1. (e_n) converge vers 0 et décroît aussi à partir du rang 1. De plus, pour tout n :

$$e_{n+1} = \frac{1}{2}\frac{e_n^2}{e_n + 1}.$$

D'où : $\forall n \geqslant 1 \qquad e_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}e_n^2$ et $e_n \leqslant 2\left(\frac{e_1}{2}\right)^{2^{n-1}}$.

c) $\forall n \geqslant 1$

$$0 \leqslant u_n - \sqrt{7} = \sqrt{7}(v_n - 1) = \sqrt{7}\,e_n \leqslant 3\,e_n \leqslant 6\left(\frac{e_1}{2}\right)^{2^{n-1}}.$$

Ici : $u_1 = 4, \quad e_1 = \frac{4}{\sqrt{7}} - 1 \leqslant \frac{3}{5}$

Avec Maple

```
> fsolve(6*(3/10)^(2^(n-1)))=10^(-7),n);
```

$$4.89487895727$$

et $n = 5$ convient.

Nous obtenons :

Avec Maple

```
> u :=1 :to 5 do u :=(1/2)*(u+7/u) od : u;
> evalf(u);sqrt(7.);
```

$$\frac{7238946623297}{2736064645568}$$
$$2.64575131111$$
$$2.64575131106$$

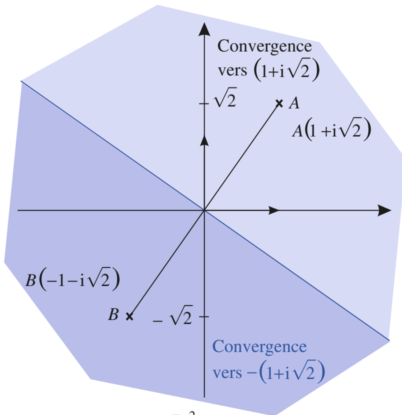
2) a) Le terme w_n est défini si, et seulement si, $z_n \neq -\alpha$. C'est-à-dire si, et seulement si, $z_0 \neq -\alpha$.

Si $z_0 = -\alpha$ ou $z_0 = \alpha$, la suite (z_n) est constante, donc convergente. Supposons z_0 différent de α et $-\alpha$ et calculons w_{n+1}.

$w_{n+1} = (w_n)^2$. Par conséquent, pour tout n, on a $w_n = (w_0)^{2^n}$.

Si $|w_0| < 1$, la suite (w_n) converge vers 0, donc la suite (z_n) converge vers α. Il suffit pour cela de choisir z_0 tel que $|z_0 - \alpha| < |z_0 + \alpha|$.

Si $|w_0| > 1$, $(|w_n|)$ converge vers $+\infty$, et (z_n) converge vers $-\alpha$. Il suffit pour cela de choisir z_0 tel que $|z_0 + \alpha| < |z_0 - \alpha|$.



$a=-1+2i\sqrt{2}=(1+i\sqrt{2})^2$

Doc. 3.

La suite (z_n) converge vers α si, et seulement si, le point d'affixe z_0 appartient au demi-plan ouvert limité, par la médiatrice de $A(\alpha)$ et $B(-\alpha)$ contenant A. Elle converge vers $-\alpha$ si, et seulement si, le point d'affixe z_0 appartient à l'autre demi-plan ouvert (*doc.* 3).

b) Si $z_{n+1}=0$ et $z_n \neq 0$, alors $z_n = \pm\, \mathrm{i}\,\alpha$.

Plus généralement, si $z_{n+1} \in \mathrm{i}\,\alpha\,\mathbb{R}$ alors $z_n \in \mathrm{i}\,\alpha\,\mathbb{R}$.

Donc, s'il existe n tel que $z_{n+1}=0$, nécessairement $z_0 \in \mathrm{i}\,\alpha\,\mathbb{R}$.

Les points images des complexes z_0 tels que la suite (z_n) s'annule appartiennent à la médiatrice de $[A,B]$.

Considérons un complexe $z_0 = \mathrm{i}\,y\,\alpha$ $(y \in \mathbb{R}^*)$. Il existe θ dans $]-\pi,\pi[$ tel que $\tan\dfrac{\theta}{2} = y$. Alors :

$$w_0 = \frac{\mathrm{i}\,y\,\alpha - \alpha}{\mathrm{i}\,y\,\alpha + \alpha} = -\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi-\theta)}.$$

Pour tout n, on a $w_n = (w_0)^{2^n}$ et z_n est nul si, et seulement si, $w_n = -1$.

Donc (z_n) s'annule si, et seulement s'il existe un entier naturel p tel que :

$$2^p\theta = \pi (\mathrm{mod}\, 2\pi). \qquad \textbf{(1)}$$

Dans ce cas, notons p le plus petit entier tel que **(1)** :

Il existe un entier n tel que :

$$2^p\theta = \pi + 2\,n\,\pi \quad \text{et} \quad z_0 = \mathrm{i}\,\alpha \tan\left(\frac{(2n+1)\pi}{2^{p+1}}\right).$$

L'ensemble des points de la médiatrice de $[A,B]$ dont les affixes conduisent à une suite stationnaire nulle est l'ensemble des points de cette droite dont les affixes s'écrivent sous la forme $\mathrm{i}\,\alpha\tan\left(\dfrac{(2\,n+1)\pi}{2^{p+1}}\right)$ avec p dans $\mathbb{N}^*$ et n dans $\mathbb{Z}$.

c) Si le point d'affixe z_0 est A ou B, la suite est constante.

S'il n'appartient pas à la médiatrice de $[A,B]$, la suite converge.

S'il appartient à la médiatrice de $[A,B]$ et si $z_0 = \mathrm{i}\,\alpha\tan\left(\dfrac{(2\,n+1)\pi}{2^{p+1}}\right)$, la suite est stationnaire, nulle à partir d'un certain rang, donc converge.

Sinon, la suite (z_n) ne s'annule pas. De plus, en posant alors $z_0 = \mathrm{i}\,k_0\,\alpha$ $(k_0 \in \mathbb{R})$, vous montrerez par récurrence que, pour tout n, on a :

$$z_n = \mathrm{i}\,k_n\,\alpha, \quad \text{avec} \quad k_{n+1} = \frac{1}{2}\left(k_n - \frac{1}{k_n}\right).$$

La suite (k_n) est bien définie mais elle diverge ainsi que (z_n).

d) La limite de la suite (z_n) est alors le complexe :

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i}) \quad \text{et} \quad |w_0| = \left|\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi/4}}{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi/4}}\right| = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \tan\left(\frac{\pi}{8}\right).$$

Exercices

1 Montrer que, dans un espace vectoriel normé, l'application norme est convexe, c'est-à-dire vérifie :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \forall t \in [0, 1]$$

$$N(tx + (1 - t)y) \leqslant tN(x) + (1 - t)N(y)$$

2 Soit $(E, \| \ \|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et f un endomorphisme de E. On définit l'application N sur E en posant $N(X) = \| f(X)\|$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que N définisse une norme sur E.

3 Montrer que si $\sum u_n$ est une série à termes réels positifs convergente, alors la série $\sum \dfrac{\sqrt{u_n}}{n}$ converge.

4 Montrer que, pour toute série réelle $\sum(u_n)$ absolument convergente, on a :

$$\left|\sum_1^{\infty} \frac{u_n}{n}\right| \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{6}} \sqrt{\sum_0^{\infty} u_n^2}.$$

5 Soit $E = \mathbb{R}^2$ et, pour tout $x = (a, b)$ de $\mathbb{R}^2$:

$$N(x) = \sqrt{a^2 + 2ab + 5b^2}.$$

Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

6 f est une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}^+$. On considère l'application :

$$N_f : \begin{cases} \mathbb{K}[X] \to \mathbb{R}^+ \\ \quad P \mapsto N_f(P) = \sup\limits_{x\in[0,1]} | f(x)P(x)| \end{cases}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que N_f soit une norme sur $\mathbb{K}[X]$.

7 Montrer que, dans l'espace vectoriel normé, $(E, \| \ \|)$:

1) $\forall (x, y) \in E^2 \ \ \forall r \in \mathbb{R}^{+*} \quad x + B(y, r) = B(x + y, r)$

2) $\forall x \in E \ \forall r \in \mathbb{R}^{+*} \ \forall \lambda \in \mathbb{K}\setminus \{0\} \quad \lambda B(x, r) = B(\lambda x, |\lambda| r)$

8 Soit $(E, \| \ \|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E. On suppose qu'il existe a dans F et $r > 0$ tels que $BO(a, r)$ est contenue dans F.

Montrer que $F = E$.

9 Soit A une partie de l'espace vectoriel normé $(E, \| \ \|)$ et O un ouvert de E.

Montrer que $A + O$ est un ouvert de E.

10 Soit A une partie non vide de l'espace vectoriel normé $(E, \| \ \|)$. Pour tout x de E, on pose :

$$d(x, A) = \inf_{y\in A} \|y - x\|.$$

Montrer que $d(x, A) = 0$ si, et seulement si, x est un point adhérent à A.

11 Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie.

1) Montrer que tout sous-espace vectoriel F de E est fermé dans E.

2) Montrer que E est le seul sous espace-vectoriel de E qui soit aussi ouvert.

12 (*PSI*) Montrer que l'ensemble des points intérieurs à la boule fermée $BF(x, r)$ est la boule ouverte $BO(x, r)$ et que l'ensemble des points adhérents à la boule ouverte $BO(x, r)$ est la boule fermée $BF(x, r)$.

13 $(E, \| \ \|)$ est un espace vectoriel normé de dimension finie.

Soit λ un scalaire non nul et A un compact de E.
Montrer que λA est un compact de E.

14* On pose $E = \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$. Pour tout f de E, on définit :

$$N(f) = \int_0^1 | f(x)| \,\mathrm{d}x$$

$$N'(f) = | f(0)| + \int_0^1 | f'(x)| \,\mathrm{d}x$$

$$N''(f) = | f(0)| + | f'(0)| + \int_0^1 | f''(x)| \,\mathrm{d}x$$

1) Montrer que ces trois applications sont des normes.

2) Prouver que, pour tout f de E, $N(f) \leqslant N'(f) \leqslant N''(f)$.

3) Prouver que, deux à deux, ces normes ne sont pas équivalentes.

15* Soit $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose :

$$N(f) = \left[f^2(0) + \int_0^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t \right]^{1/2}.$$

1) Montrer que N est une norme sur E.

2) Montrer que $\| f\|_\infty \leqslant \sqrt{2}\, N(f)$.

3) N et $\| \|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

16 ** **1) a)** Montrer que l'application définie par :

$$\varphi(A, B) = \mathrm{tr}({}^t A B)$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Préciser la norme associée que l'on notera N.

2) Comparer $N(A)$ et $N({}^t A)$.

3) a) Montrer que $N(AB) \leqslant N(A)N(B)$, pour tous A et B.

b) Caractériser les couples (A, B) pour lesquels :

$$N(AB) = N(A)\,N(B).$$

17 * **1)** Montrer le lemme de d'Alembert : si (a_n) est une suite de réels strictement positifs tels que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l > 1,$$

alors la suite (a_n) tend vers $+\infty$.

2) Soit a un réel positif. Étudier la suite définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$ avec :

$$f(x) = \frac{a(a^2+1)}{x^2+1}.$$

Rapport CCP, 1997 : « *L'étude des suites récurrentes est souvent fort mal traitée, les candidats essayant rarement de faire un dessin les aidant à en comprendre le comportement.* »

18 * (*PSI*) Soit C une partie convexe de l'espace vectoriel normé $(E, \| \|)$. On note $\overline{C}$ l'ensemble des points adhérents à C et $\overset{\circ}{C}$ l'ensemble des points intérieurs à C.

Montrer que $\overline{C}$ et $\overset{\circ}{C}$ sont convexes.

19 * Soit $k \in \mathbb{R}^+$. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose :

$$B_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{n}\right)^2 \leqslant \frac{k^2}{n^2} \right\}$$

et $B = \bigcup B_n$.

Donner une condition nécessaire et suffisante sur k pour que B soit fermé.

20 On fixe un réel a dans $]0, 1[$ et on considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0, a], \mathbb{R})$ muni de la norme N_∞ définie par :

$$N_\infty(f) = \sup_{x\in[0,a]} |f(x)|.$$

1) Prouver que la suite (f_n) de fonctions de E, définies par :

$$f_n(x) = \sum_0^n x^k$$

converge dans (E, N_∞) vers la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.

2) En déduire un sous-espace vectoriel de E qui ne soit pas fermé.

21 ** (*PSI*) Un espace vectoriel E de dimension finie est muni d'une norme N.

Soit f une application de E dans E telle que :

$$\exists\, \alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\quad \forall (x, y) \in E^2$$

$$N(f(x) - f(y)) \leqslant \alpha \left[N\big(f(x) - x\big) + N\big(f(y) - y\big) \right].$$

Montrer que f admet un point fixe unique.

3

Continuité

Introduction

Leibniz, en 1692*, utilise, dans un cadre géométrique, le terme de fonction.*

En étudiant la solution de l'équation des cordes vibrantes donnée par d'Alembert en 1747*, Euler, en* 1748*, libère la notion de fonction de ce cadre et introduit la notation* $f(x)$*. L'idée intuitive suivant laquelle une fonction est continue si son graphe peut être tracé sans lever le crayon est attribuée à Euler. Mais cette idée ne s'applique qu'aux fonctions définies sur un intervalle et à valeurs dans* $\mathbb{R}$*.*

Bolzano et Cauchy, vers 1820*, définissent correctement les fonctions continues de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*.*

Au début du XX^{e} *siècle, cette définition sera généralisée à des fonctions vectorielles d'une variable vectorielle.*

La notion de limite d'une fonction en un point et plus généralement l'étude de son comportement et sa comparaison à d'autres fonctions au voisinage d'un point est fondamentale en analyse (c'est l'étude locale d'une fonction en un point).

Dans ce chapitre,nous étudierons cette notion dans le cas d'une fonction d'un espace vectoriel dans un autre, puis les fonctions continues sur une partie.

Nous considérerons ensuite le cas des applications linéaires.

OBJECTIFS

- Limite en un point d'une fonction d'un espace vectoriel normé dans un autre.
- Principales opérations sur ces limites.
- Comparaison des fonctions au voisinage d'un point.
- Continuité en un point, sur une partie.
- Utilisation de la continuité : images réciproques d'ouverts et de fermés (*PSI*), image directe d'un compact.
- Applications lipschitziennes.
- Continuité des applications linéaires entre espaces vectoriels normés de dimension finie.
- Continuité des applications bilinéaires entre espaces vectoriels normés de dimension finie.

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $(E, \| \|_E)$, $(F, \| \|_F)$ et $(G, \| \|_G)$ sont trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés de dimension finie. A est une partie de E et f une application de A dans F.

Nous adopterons les conventions suivantes :

- Si a est un point de E adhérent à A, on dit que f possède la propriété (P) au voisinage de a si f possède la propriété (P) sur l'intersection de A avec une boule de centre a. (*Exemple* : la fonction $x \mapsto x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est bornée au voisinage de 0.)
- Si $E = \mathbb{R}$, on dit que f posséde la propriété (P) au voisinage de $+\infty$ si f possède la propriété (P) sur un intervalle du type $]c, +\infty[$. (*Exemple* : la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est bornée au voisinage de $+\infty$.)
- On procède de manière similaire « au voisinage de $-\infty$ ».

1 Limites

1.1. La définition

Considérons un point a adhérent à A et un point b de F.

On dit que f admet b comme **limite** au point a si :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \delta > 0 \;\forall\, x \in A \quad (\|x - a\|_E \leqslant \delta) \Rightarrow (\| f(x) - b\|_F \leqslant \varepsilon)$$

Théorème 1

La limite de f en a, lorsqu'elle existe, est unique.

Lorsque f admet b comme limite au point a, on note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \text{ou} \quad \lim_a f = b$$

On désigne par $BF_E(a, \delta)$ la boule fermée de centre a et de rayon δ dans $(E, \| \|_E)$ et par $BF_F(b, \varepsilon)$ la boule fermée de centre b et de rayon ε dans $(F, \| \|_F)$.

Théorème 2

L'application f admet b comme limite en a si, et seulement si :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \delta > 0 \quad f(A \cap BF_E(a, \delta)) \subset BF_F(b, \varepsilon)$$

Exemple

Prenons $E = \mathbb{R}^2, F = \mathbb{R}, A = E \backslash \{(0,0)\}$ et $f(x, y) = \dfrac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$.

Montrons que f admet une limite en $a = (0, 0)$ et déterminons cette limite.

L'utilisation des coordonnées polaires est très efficace. En effet :

$$0 \leqslant f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho^2\cos^2\theta\sin^2\theta \leqslant \rho^2.$$

Donc :

$$0 \leqslant f(x, y) \leqslant x^2 + y^2$$

et

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0.$$

Rapport Mines-Ponts, 2003

« Quand on demande d'étudier les variations d'une fonction sur l'intervalle $[1, +\infty[$, il ne faut pas oublier d'étudier le comportement de la fonction aux deux bornes de l'intervalle. »

1.1.1 Limite en $+\infty$ et en $-\infty$

Supposons ici que $E = \mathbb{R}$ et notons b un point de F. Si f est définie sur un intervalle de la forme $A =]x_0, +\infty[$, on dit que f admet b comme limite en $+\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in A \quad (x \geqslant y) \Rightarrow (\| f(x) - b\|_F \leqslant \varepsilon)$$

On écrit alors : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$ ou $\displaystyle\lim_{+\infty} f = b$.

De même, donner un sens à :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$

ou :

$$\lim_{-\infty} f = b.$$

1.1.2 $+\infty$ ou $-\infty$ comme limite

Ici, $F = \mathbb{R}$ et a est un point adhérent à A.

On dit que f admet $+\infty$ comme limite au point a si :

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0\ \forall x \in A \quad (\|x - a\|_E \leqslant \delta) \Rightarrow (f(x) \geqslant K)$$

Et l'on note : $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $\displaystyle\lim_{a} f = +\infty$

Donner un sens à :

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

ou :

$$\lim_{a} f = -\infty.$$

► ***Pour s'entraîner : ex. 1.***

1.2. Limites d'applications et suites convergentes

Théorème 3

L'application f admet b comme limite en a si, et seulement si, pour toute suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a dans $(E, \| \|_E)$, la suite $(f(x_p))_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers b dans $(F, \| \|_F)$.

Démonstration

- On suppose que f admet b comme limite en a et on fixe une suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a dans $(E, \| \|_E)$.

Soit $\varepsilon > 0$.

f admet b comme limite en a, donc :

$$\exists \delta > 0\ \forall x \in A \quad \|x - a\|_E \leqslant \delta \Rightarrow \| f(x) - b\|_F \leqslant \varepsilon.$$

La suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers a :

$$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N \quad \|x_n - a\|_E \leqslant \delta.$$

En combinant les deux : $\forall n \geqslant N \quad \| f(x_n) - b\|_F \leqslant \varepsilon.$

La suite $(f(x_p))_{p\in\mathbb{N}}$ converge donc vers b dans $(F, \| \|_F)$.

- Réciproquement, supposons que f n'admette pas b comme limite en a, alors :

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in A \quad \|x - a\|_E \leqslant \delta \quad \text{et} \quad \| f(x) - b\|_F \geqslant \varepsilon.$$

En prenant $\delta = \dfrac{1}{2^p}$, on obtient :

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall p \in \mathbb{N} \ \exists x_p \in A \quad \|x_p - a\|_E \leqslant \frac{1}{2^p} \quad \text{et} \quad \|f(x_p) - b\|_F \geqslant \varepsilon.$$

La suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge donc vers a dans $(E, \| \ \|_E)$, mais la suite $(f(x_p))_{p\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers b dans $(F, \| \ \|_F)$.

▶ ***Pour s'entraîner : ex. 2.***

Exemple

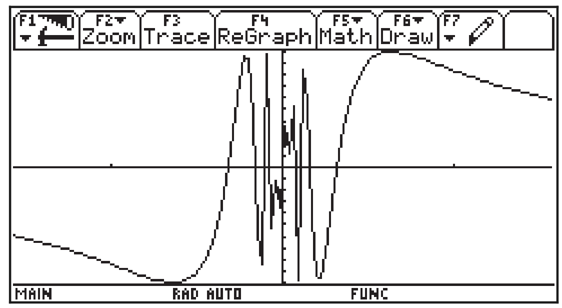
Montrons que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \sin\frac{1}{x}$$

n'a pas de limite en 0.

Pour p dans $\mathbb{N}$, posons $x_p = \dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2} + \pi p}$, $\quad f(x_p) = (-1)^p$

La suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et la suite $(f(x_p))_{p\in\mathbb{N}}$ diverge. Donc f n'a pas de limite en 0.



Doc. 1. *Représentation, sur calculatrice, du graphe de* $x \mapsto \sin\dfrac{1}{x}$ *avec* $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

1.3. Limites d'applications à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie

Supposons que l'espace vectoriel F soit de dimension finie et notons $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ une base de F.

Pour tout x de A, il existe $(f_1(x), \ldots, f_n(x))$ dans $\mathbb{K}^n$ tel que :

$$f(x) = \sum_1^n f_i(x)\, v_i.$$

L'application $f_i : A \to \mathbb{K}$ est appelée la i-ième **application composante** de f relativement à la base $\mathcal{B}$ (on peut aussi parler d'**application coordonnée** ou de **fonction composante** ou de **fonction coordonnée**).

Rapport Mines-Ponts, 2003

« Des limites aussi classiques que :

$$\lim_1 \frac{\ln(t)}{t-1}, \ \lim_0 t\ln(t)$$

et $\lim\limits_{+\infty}(1 - \dfrac{x}{n})^n$ *permettent d'obtenir les résultats les plus farfelus. »*

Théorème 4

L'application f a pour limite $b = \sum\limits_1^n b_i v_i$ au point a si, et seulement si, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, l'application composante f_i a pour limite b_i au point a.

1.4. Combinaison linéaire de limites

Théorème 5

Soit f et g deux applications de A dans F. Si f (respectivement g) admet pour limite b (respectivement c) au point a, alors, pour tout couple (α, β) de $\mathbb{K}^2$, la fonction $\alpha f + \beta g$ a pour limite $\alpha b + \beta c$ au point a :

$$\lim_{x\to a}(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \lim_{x\to a} f(x) + \beta \lim_{x\to a} g(x).$$

⚠ *Ce théorème suppose l'existence de limites pour* f *et* g *en* a.

1.5. Produit de limites

Théorème 6
Soit f une application de A dans F admettant b comme limite en a et u une application de A dans $\mathbb{K}$ ayant α comme limite en a.
Alors, le produit $u\,f$ admet αb comme limite au point a :

$$\lim_{x\to a} u(x)\,f(x) = \lim_{x\to a} u(x) \lim_{x\to a} f(x)$$

Ici également, l'existence des limites en a pour les fonctions u et f est nécessaire.

Démonstration
On peut écrire :

$$\forall x \in A \quad u(x)\,f(x) - \alpha\,b = (u(x)-\alpha)\,f(x) + \alpha\,(f(x)-b).$$

Donc :

$$\forall x \in A \quad \|u(x)\,f(x) - \alpha\,b\|_F \leqslant |u(x)-\alpha|\,\|f(x)\|_F + |\alpha|\,\|f(x)-b\|_F$$

Or $\lim_{x\to a} f(x) = b$, donc il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall x \in BF_E(a,r)\cap A \quad |\,\|f(x)\|_F - \|b\|_F| \leqslant \|f(x)-b\|_F \leqslant 1$$

$$\forall x \in BF_E(a,r)\cap A \quad \|f(x)\|_F \leqslant \|b\|_F + 1$$

On en déduit que, pour tout x de $BF(a,r)\cap A$:

$$0 \leqslant \|u(x)\,f(x) - \alpha b\|_F \leqslant |u(x)-\alpha\,|(\|b\|_F+1) + |\alpha|\,\|f(x)-b\|_F.$$

Or $\lim_{x\to a} |u(x)-\alpha| = \lim_{x\to a} \|f(x)-b\|_F = 0$ d'où le résultat.

1.6. Inverse de limites

Théorème 7
Étant donné une fonction u de A dans $\mathbb{K}$, de limite β en a, avec $\beta \neq 0$. Alors :

- $\exists\, r > 0 \ \forall x \in BF(a,r)\cap A \quad u(x) \neq 0$
- En posant $B = BF(a,r)\cap A$, la fonction $\frac{1}{u}$ est définie sur B, a est un point adhérent à B et $\frac{1}{u}$ admet pour limite $\frac{1}{\beta}$ au point a :

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{u(x)} = \frac{1}{\lim_{x\to a} u(x)}.$$

Démonstration

- Puisque $\beta \neq 0$, $\left|\frac{\beta}{2}\right| > 0$. Il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall x \in A \quad \|x-a\|_E \leqslant r \Rightarrow |u(x)-\beta| \leqslant \left|\frac{\beta}{2}\right|$$

On pose $B = BF(a,r)\cap A$.

$$\forall x \in B \quad ||u(x)| - |\beta|| \leqslant |u(x)-\beta| \leqslant \left|\frac{\beta}{2}\right|$$

D'où $0 < \left|\frac{\beta}{2}\right| \leqslant |u(x)| \leqslant 3\left|\frac{\beta}{2}\right|.$

- Montrer que a est adhérent à B est un exercice élémentaire. De plus :

$$\forall x \in B \quad 0 \leqslant \left|\frac{1}{u(x)} - \frac{1}{\beta}\right| = \frac{|u(x)-\beta|}{|u(x)|\,|\beta|} \leqslant 2\frac{|u(x)-\beta|}{|\beta|^2}.$$

Rappelons qu'un quotient de termes positifs se majore en majorant son numérateur ou en minorant son dénominateur.

▶ ***Pour s'entraîner : ex. 3 et 4.***

1.7. Composition des applications

Dans ce paragraphe, $(E, \| \|_E)$, $(F, \| \|_F)$, $(G, \| \|_G)$ sont trois espaces vectoriels normés, A est une partie de E, a un point adhérent à A, B une partie de F.

Théorème 8

Si f est une application de A dans B qui admet comme limite b au point a, alors :

- le point b est adhérent à B ;
- si, de plus, l'application g de B dans G admet la limite c en b, l'application $g \circ f$ admet c comme limite en a.

En d'autres termes :

$$\lim_{x \to a} g \circ f(x) = \lim_{y \to b} g(y).$$

Démonstration

- Le point a est adhérent à A, donc il existe une suite $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a. La suite $(f(x_p))_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de B qui converge vers b, car f admet b pour limite en a. Donc, b est adhérent à B.
- Fixons $\varepsilon > 0$. L'application g admet c comme limite en b :

$$\exists \delta > 0 \ \forall y \in B \quad (\|y - b\|_F \leqslant \delta \Rightarrow \|g(y) - c\|_G \leqslant \varepsilon).$$

Un tel $\delta > 0$ étant déterminé, on sait aussi que :

$$\exists \mu > 0 \ \forall x \in A \quad (\|x - a\|_E \leqslant \mu \Rightarrow \|f(x) - b\|_F \leqslant \delta).$$

On en déduit :

$$\forall x \in A \quad (\|x - a\|_E \leqslant \mu \Rightarrow \|g(f(x)) - c\|_G \leqslant \varepsilon).$$

2 Continuité en un point

2.1. Définition et caractérisations

Lorsque a est dans A et f admet en a la limite b, alors : $b = f(a)$. On dit que f est **continue au point a .**

Mathématiquement, l'application f est continue au point a si :

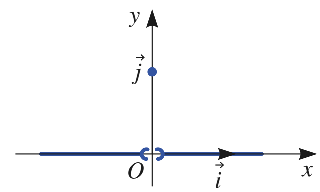
$$(a \in A) \text{ et } \Big(\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in A \quad (\|x - a\|_E \leqslant \delta) \Rightarrow (\|f(x) - f(a)\|_F \leqslant \varepsilon)\Big)$$

Paul Dirac (1902-1984), *mathématicien et physicien anglais, fonde la théorie complète de la mécanique quantique et publie* « The principles of quantum mechanics » *en 1930. Pour ce travail, il reçoit le prix Nobel de physique en 1933. Après avoir enseigné les mathématiques à Cambridge pendant trente-sept ans, il devient, à 69 ans, professeur de physique à Florida State University.*

La proposition suivante traduit la notion de continuité en un point à l'aide des suites.

Théorème 9

L'application f est continue au point a de A si, et seulement si, pour toute suite (x_p) d'éléments de A qui converge vers a dans $(E, \| \|_E)$, la suite $(f(x_p))$ converge vers $f(a)$ dans $(F, \| \|_F)$.



Doc. 2. *La fonction de Dirac. Elle n'est pas continue en* 0, *mais admet* 0 *comme limite à droite et à gauche en* 0.

2.2. Prolongement par continuité

Si a est un point adhérent à A n'appartenant pas à A, l'application f n'est pas définie en a. Cependant, si f admet b comme limite au point a, alors on peut définir l'application :

$$\begin{aligned} \widetilde{f} : A \cup \{a\} &\to F \\ x &\mapsto \widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ b & \text{si } x = a \end{cases} \end{aligned}$$

Par construction, $\widetilde{f}$ est continue au point a. $\widetilde{f}$ est appelée le **prolongement par continuité de f au point a.**

En pratique, et bien que ceci soit un abus de notation (car on modifie l'ensemble de départ de f), on s'autorise à dire simplement que l'on prolonge f par continuité en posant $f(a) = b$, et sans utiliser la notation $\widetilde{f}$.

Exemples

- Nous avons déjà rencontré l'application :

$$\begin{cases} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R} \\ \qquad (x, y) \mapsto f(x, y) = \dfrac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}. \end{cases}$$

et établi que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$. Nous pouvons donc prolonger par continuité f en $(0, 0)$ en posant $f(0, 0) = 0$.

- Considérons l'application :

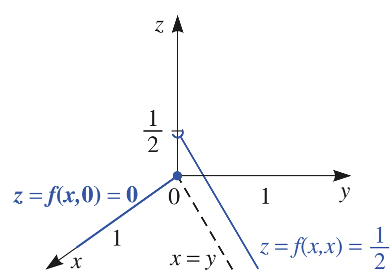
$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto \mathbb{R} \\ \qquad (x, y) \to f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

f est-elle prolongeable par continuité en $(0, 0)$?

Remarquons que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2}$ et $f\left(0, \dfrac{1}{n}\right) = 0.$

Les deux suites $\left(\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right)\right)$ et $\left(\left(0, \dfrac{1}{n}\right)\right)$ convergent vers $(0, 0)$ dans $\mathbb{R}^2$.

Donc f n'est pas prolongeable par continuité en $(0, 0)$ (*doc.* 3).



Doc. 3. *Le graphe de* f *dans* $\mathbb{R}^3$ *est l'ensemble des triplets* (x, y, z) *tels que* $z = f(x, y)$.
Ici, on représente seulement les points (x, y, z) *tels que :*

$$x = y, \quad z = f(x, x) = \frac{1}{2}$$

$$\text{et} \quad y = 0, \quad z = f(x, 0) = 0.$$

Cela permet de visualiser la discontinuité de f *en* $(0, 0)$.

- Soit $U = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$.

L'application : $\begin{cases}]-\pi, \pi[\to U \setminus \{-1\} \\ \theta \qquad \mapsto e^{i\theta} \end{cases}$ est bijective.

Sa bijection réciproque est l'application **Argument**, notée Arg. Elle est définie par :

$$\operatorname{Arg} : \begin{cases} U \setminus \{-1\} \quad \to \;]-\pi, \pi[\\ u = x + \mathrm{i}\, y \mapsto \operatorname{Arg} u = 2 \operatorname{Arctan} \dfrac{y}{1 + x} \end{cases}$$

Elle est continue sur $U \setminus \{-1\}$ et ne peut pas être prolongée en une application continue sur U.

- Soit $u = x + iy \in U \setminus \{-1\}$ (x et y sont les parties réelle et imaginaire de u). On cherche θ dans $]-\pi, \pi[$ tel que $x = \cos\theta$ et $y = \sin\theta$.

Si $\theta \in]-\pi, \pi[$, alors $\dfrac{\theta}{2} \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Il faudra donc que :

$$x = \cos\theta = \frac{1 - \tan^2\frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2\frac{\theta}{2}} \quad \text{et} \quad y = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2\frac{\theta}{2}}.$$

Donc :

$$1 + x = \frac{2}{1 + \tan^2\frac{\theta}{2}} \neq 0 \quad \text{et} \quad \frac{y}{1+x} = \tan\frac{\theta}{2}, \quad \text{d'où} \quad \theta = 2\mathrm{Arctan}\,\frac{y}{1+x}.$$

On obtient un unique θ dont on vérifie aisément qu'il est bien solution. Ceci assure la *bijectivité* de l'application.

- La fonction Argument est donc définie par la formule :

$$\forall u \in U \setminus \{-1\} \quad \mathrm{Arg}\,(u) = 2\mathrm{Arctan}\,\frac{\mathrm{Im}\,u}{1 + \mathrm{Re}\,u}.$$

Or, les applications $u \mapsto \mathrm{Im}\,u$ et $u \mapsto \mathrm{Re}\,u$ sont continues de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$, et $1 + \mathrm{Re}\,u$ ne s'annule pas sur $U \setminus \{-1\}$. De plus, la fonction Arctangente est continue sur $\mathbb{R}$, la continuité de la fonction Argument en découle.

- Notons $u_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi - \frac{1}{n})}$ et $v_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\pi + \frac{1}{n})}$. Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = -1; \ \mathrm{Arg}(u_n) = \pi - \frac{1}{n}\ ; \ \mathrm{Arg}(v_n) = -\pi + \frac{1}{n}.$$

Les suites $(\mathrm{Arg}(u_n))$ et $(\mathrm{Arg}(v_n))$ n'ont pas la même limite. La fonction Argument n'est pas prolongeable par continuité en -1.

▶ ***Pour s'entraîner : ex. 5.***

3 Relations de comparaison des fonctions

Dans ce paragraphe, $(E, \| \ \|_E)$ et $(F, \| \ \|_F)$ sont deux espaces vectoriels normés, f désigne une application de A dans F et φ une application de A dans $\mathbb{K}$, a est un point adhérent à A. On suppose que φ ne s'annule pas au voisinage de a, sauf peut-être en a, c'est-à-dire :

$$\exists\, r > 0 \ \forall x \in B_r = A \cap BO(a, r) \setminus \{a\} \quad \varphi(x) \neq 0.$$

Rapport Mines-Ponts, 2003

« Les notions de limite et d'équivalent sont vagues... »

3.1. Relation de domination

La **fonction** f est dite **dominée** par φ au point a si :

$$\exists\, K \in \mathbb{R} \ \exists\, \delta > 0 \ \forall\, x \in A \cap BO(a, \delta) \setminus \{a\} \quad \| f(x) \|_F \leqslant K |\varphi(x)|$$

On écrit alors $f = O(\varphi)$, ou, s'il est nécessaire de préciser le point a, $f =_a O(\varphi)$.

Théorème 10
La fonction f est dominée par φ au point a si, et seulement si, la fonction $\frac{1}{\varphi} f$ est une fonction bornée au voisinage de a.

3.2. Relation de négligeabilité

La **fonction** f est dite **négligeable** devant φ au point a si :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in A \cap BO(a, \delta) \backslash \{a\} \quad \| f(x) \|_F \leqslant \varepsilon |\varphi(x)|$$

On écrit alors $f = o(\varphi)$, ou, s'il est nécessaire de préciser le point a, $f =_a o(\varphi)$.

Les notations :

$f = o(\varphi)$ et $f = O(\varphi)$

ne sont pas des égalités, mais des relations d'appartenance.
Écrire $f =_a o(\varphi)$ signifie que f appartient à l'ensemble des fonctions négligeables devant φ au point a.

Théorème 11
La fonction f est négligeable devant φ au point a si, et seulement si, la fonction $\frac{1}{\varphi} f$ admet pour limite 0_F au point a.

Rapport ENS Cachan, 2000

« La notation o( ) désigne une classe de fonctions et sa manipulation dans des expressions algébriques nécessite un minimum de soin. »

3.3. Fonctions équivalentes (rappel)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un point adhérent à I, g et h deux applications de I dans $\mathbb{R}$ ne s'annulant pas sur $I \backslash \{a\}$. On dit que les fonctions g et h sont **équivalentes au voisinage de a** ou **équivalentes en a** si :

$$\lim_{x \to a} \frac{h(x)}{g(x)} = 1 .$$

On écrit alors : $g(x) \sim_a h(x)$.

Rapport Mines-Ponts, 2003

« On rencontre :

$t^{x-1} \exp(-t) \sim_{+\infty} \exp(-t)$.

De tels abus ne peuvent être acceptés. »

Théorème 12
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $g(x) \sim_a h(x)$.
- $\begin{cases} \exists \ \varphi \in \mathbb{R}^I \\ h(x) = g(x)(1 + \varphi(x)) \\ \lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0 \end{cases}$
- $h(x) =_a g(x) + o(g(x))$.

Les mêmes précautions que pour les suites équivalentes sont à prendre avec les fonctions équivalentes.

Vous démontrerez ces équivalences.

Rapport Mines-Ponts, 2003

« De nombreux étudiants confondent développements limités et équivalents, ainsi il n'est pas rare de rencontrer par exemple : $\cos x \sim_0 \frac{1 - x^2}{2}$. De plus, la recherche d'équivalents, même simples, pose souvent problème »

3.4. Comparaison des fonctions de référence (rappel)

Au voisinage de $+\infty$, lorsque α, β et γ sont > 0 :

$$(\ln(x))^\gamma = o(x^\beta) \quad \text{et} \quad x^\beta = o(\mathrm{e}^{\alpha x}).$$

Au voisinage de 0, lorsque α et β sont > 0, $(\ln(x))^\alpha = o\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$.

► ***Pour s'entraîner : refaire les exercices de Première année sur le sujet.***

Application 1

Étude d'une fonction décroissante

(*extrait de Centrale 93, math 1*)

On désigne par f une application continue, positive et décroissante de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$.

1) *Dans cette question, on suppose que :* $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

Montrer que $\displaystyle\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t =_{0^+} o(f(x))$.

2) *Dans cette question, on suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$.*

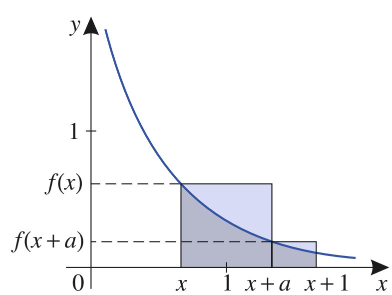
• *Montrer que :*

$$(f'(x) =_{+\infty} o(f(x))) \Rightarrow (f(x) \sim_{+\infty} f(x+1)).$$

• *En supposant de plus que f est convexe, prouver la réciproque.*

1) • Pour tout $a \in\ ]0,1[$:

$$\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{x+a} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x+a}^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t$$
$$\leqslant a\,f(x) + (1-a)\,f(x+a)$$
$$\leqslant a\,f(x) + f(a) \qquad \mathbf{(1)}$$



Doc. 4. *Puisque f est décroissante, l'aire représentée par $\displaystyle\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ est plus petite que la somme des aires des rectangles tramés.*

• Notons $G(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ et fixons ε dans $]0,1]$. D'après **(1)**, on a :

$$0 \leqslant G(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\,f(x) + f\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = f(x)\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{f\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{f(x)}\right)$$

Sachant que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall x \in\ ]0,\delta[\quad \frac{f\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{f(x)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

On en déduit :

$$\forall x \in\ ]0,\delta[\quad 0 \leqslant G(x) \leqslant f(x)\,\varepsilon.$$

On a prouvé que $G(x) =_{0^+} o(f(x))$.

2) Nous allons prouver que :

$$f(x) - f(x+1) =_{+\infty} o(f(x)).$$

• Puisque f est décroissante et de classe $\mathcal{C}^1$:

$$0 \leqslant f(x) - f(x+1) = -\int_x^{x+1} f'(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_x^{x+1} |f'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Fixons $\varepsilon > 0$, sachant que $f' =_{+\infty} o(f)$, il existe $A > 0$ tel que :

$$(t \geqslant A) \quad \Rightarrow \quad (|f'(t)| \leqslant \varepsilon\,f(t)).$$

On en déduit que, pour $x \geqslant A$ et t dans $]x, x+1[$:

$$-f'(t) = |f'(t)| \leqslant \varepsilon\,f(t) \leqslant \varepsilon\,f(x).$$

Intégrons sur $[x, x+1]$:

$$0 \leqslant -\int_x^{x+1} f'(t)\,\mathrm{d}t = f(x) - f(x+1)$$
$$\leqslant \int_x^{x+1} \varepsilon\,f(x)\,\mathrm{d}t = \varepsilon\,f(x).$$

On a donc :

$$(x \geqslant A) \Rightarrow (0 \leqslant f(x) - f(x+1) \leqslant \varepsilon\,f(x)).$$

Ceci prouve que :

$$f(x) - f(x+1) =_{+\infty} o(f(x))$$

c'est-à-dire :

$$f(x) \sim_{+\infty} f(x+1).$$

• L'application f est de classe $\mathcal{C}^1$ et le théorème des accroissements finis permet de dire que :

$$\forall x > 0 \ \exists\, c \in\ ]x, x+1[\ f(x+1) - f(x) = f'(c).$$

De plus, f est convexe et décroissante, donc :

$$f'(c) \leqslant f'(x+1) \leqslant 0$$

et

$$|f'(x+1)| \leqslant f(x) - f(x+1).$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Sachant que $f(x) \sim_{+\infty} f(x+1)$, il existe $A > 0$ tel que, pour $x \geqslant A$:

$$0 \leqslant f(x) - f(x+1) \leqslant \varepsilon f(x+1).$$

Donc :

$$(x \geqslant A) \Rightarrow (|f'(x+1)| \leqslant \varepsilon f(x+1)).$$

Nous avons prouvé que :

$$f'(x+1) =_{+\infty} o(f(x+1))$$

donc : $\quad f' =_{+\infty} o(f)$.

4 Application continue sur une partie

4.1. Définition et propriétés de base

On dit que l'**application** f est **continue sur** A (ou continue de A dans F) si f est continue en tout point de A.

Rapport CCP, 1997

« De nombreux raisonnements faux ou absurdes liés à la notion de fonction continue sur un intervalle. »

Notation

L'ensemble des applications continues de A dans F est noté $\mathfrak{C}(A, F)$ ou $\mathfrak{C}^0(A, F)$. Lorsque $F = \mathbb{K}$, on abrège $\mathfrak{C}(A, \mathbb{K})$ en $\mathfrak{C}(A)$.

- $\mathfrak{C}(A, F)$ est un sous-espace vectoriel de $F^A = \mathfrak{F}(A, F)$.
- $\mathfrak{C}(A)$ est une sous-algèbre de $\mathbb{K}^A$.
- Si u est une fonction continue de A dans $\mathbb{K}$ et f une fonction continue de A dans F, alors la fonction uf est une fonction continue de A dans F.
- Si F est de dimension n et si l'on note B une base de F, et $f_1, \ldots, f_n$ les applications composantes de f dans la base B, alors :

$$\Big(f \in \mathfrak{C}(A, F)\Big) \Leftrightarrow \Big(\forall\, i \in [\![1, n]\!] \quad f_i \in \mathfrak{C}(A)\Big).$$

- Si f est une fonction continue de A dans $\mathbb{K}$ qui ne s'annule en aucun point de A, alors la fonction $\dfrac{1}{f}$ est continue sur A.
- Notons B une partie de F. Si f est continue de A dans F, g continue de B dans G, et si $f(A) \subset B$, alors $g \circ f$ est continue de A dans G.

Rapport Mines-Ponts, 2000

« La continuité est souvent mal justifiée... La continuité partielle n'entraîne pas forcément la continuité au sens de la norme en général. »

Exemples

■ Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \to \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto f(x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$

Si f est continue sur $\mathbb{R}^n$, alors, pour tout $(a_1, \ldots, a_n)$ de $\mathbb{R}^n$, les n applications partielles :

$$f_i \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots a_n) \end{cases}$$

sont continues sur $\mathbb{R}$. (Utiliser la composition des applications continues.)

La réciproque est fausse.

La fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

n'est pas continue en $(0,0)$.

Cependant les applications partielles $(x \mapsto f(x,0))$ et $(y \mapsto f(0,y))$ sont continues en 0.

Rapport X-ESPCI, 2001

« ...continuité souvent affirmée sans preuve. »

■ $(E, \| \|_E)$, $(F, \| \|_F)$ et $(G, \| \|_G)$ sont trois espaces vectoriels normés. Soit I une partie non vide de G et g une application continue de I dans F. On note φ l'application suivante :

$$\varphi : \begin{cases} E \times I \to F \\ (x,t) \mapsto \varphi(x,t) = g(t) \end{cases}$$

L'application φ est continue sur $E \times I$.

Ainsi, l'application h de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, définie par :

$$h(x,t) = (t + t^2, 1 + x).$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Rapport X-ESPCI, 2000

« Il est rare de trouver une démonstration correcte de la continuité de $y \mapsto \phi(x, y, u(y))$. »

■ Toute fonction polynôme des n variables $(x_1, \ldots, x_n)$ est continue sur $\mathbb{K}^n$. (*PSI*). Ainsi,le cours d'algèbre linéaire montre que la fonction déterminant :

$$\begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \longrightarrow \mathbb{C} \\ M = (m_{ij}) \longmapsto \mathrm{Det}(M) \end{cases}$$

est une fonction polynôme des n^2 variables $m_{i,j}$. C'est donc une fonction continue.

■ Toute fonction rationnelle f des n variables $(x_1, \ldots, x_n)$ est continue sur son domaine de définition D.

Une fonction rationnelle de n variables est un quotient de fonctions polynômes de ces variables.

▶ ***Pour s'entraîner : ex. 6.***

Application 2

Trois exemples de fonctions continues

1) *Montrer que la fonction f, définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = (x^2+y^2, \sin(xy), z-2x)$, est continue sur $\mathbb{R}^3$.*

2) *Montrer que l'application $g : (x,t) \mapsto \dfrac{t^n e^{tx}}{1+t^2+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.*

3) *Montrer que l'application h, définie par $h(x,y) = y^x$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$.*

1) L'application f est une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. Notons f_1, f_2 et f_3 les applications composantes de f. On remarque que f_1 et f_3 sont des fonctions polynômes en (x,y,z).

De même, l'application $(x,y,z) \mapsto xy$ est une fonction polynôme en (x,y,z) et la fonction sinus est continue sur $\mathbb{R}$. Le théorème de composition des applications continues permet d'en déduire que f_2 est continue sur $\mathbb{R}^3$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}^3$.

2) L'application g est le produit des deux applications $(x,t) \mapsto \dfrac{t^n}{1+t^2+x^2}$ et $(x,t) \mapsto e^{xt}$.

L'application : $(x,t) \mapsto \dfrac{t^n}{1+t^2+x^2}$ est une fonction rationnelle continue sur $\mathbb{R}^2$.

L'application $(x,t) \mapsto e^{xt}$ est la composée de l'application exponentielle, qui est continue sur $\mathbb{R}$ et de l'application $(x,t) \mapsto xt$, qui est une fonction polynôme continue sur $\mathbb{R}^2$.

Donc g est continue sur $\mathbb{R}^2$.

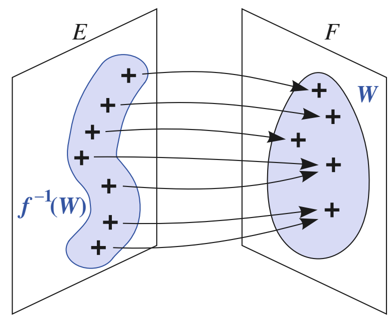
3) Puisque $h(x,y) = \exp(x \ln(y))$, un raisonnement similaire aux deux précédents permet de conclure.

4.2. Images réciproques d'ouverts et de fermés (*PSI*)

Théorème 13

Soit f une application continue de E dans F.

Pour tout fermé (respectivement ouvert), W, de $(F, \| \|_F)$, l'image réciproque de W par f, $f^{-1}(W) = \{x \in E \mid f(x) \in W\}$, est un fermé (respectivement ouvert) de $(E, \| \|_E)$.



Doc. 5. $f^{-1}(W)$ *est l'ensemble des antécédents des éléments de* W.

Démonstration

- Soit W un fermé de F et x un point adhérent à $f^{-1}(W)$.

Il existe une suite (x_p) d'éléments de $f^{-1}(W)$ qui converge vers x dans $(E, \| \|_E)$. Or f est continue sur E, donc la suite $(f(x_p))$ converge vers $f(x)$ dans $(F, \| \|_F)$. De plus, pour tout p, $f(x_p)$ est dans W, car x_p appartient à $f^{-1}(W)$. Donc $f(x)$ est la limite d'une suite d'éléments de W. Il est adhérent à W. On a prouvé que $f^{-1}(W)$ est un fermé de $(E, \| \|_E)$.

- Soit W un ouvert de F. Rappelons que :

$$f^{-1}(\complement_F W) = \{x \in E \mid f(x) \notin W\}$$
$$= \complement_E(f^{-1}(W)).$$

W étant un ouvert de F, $\complement_F W$ est un fermé de F, donc $f^{-1}(\complement_F W)$ est un fermé de E. Finalement, $f^{-1}(W)$ est un ouvert de E.

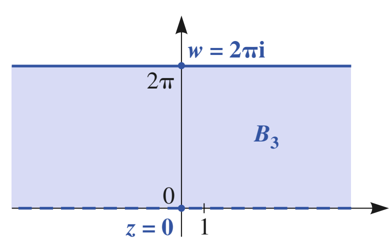
Exemple

Soit $g \in \mathcal{C}(E, \mathbb{C})$. Déterminons la nature topologique des ensembles :
$B_1 = \{x \in E \mid \mathrm{Re}\,(g(x)) > 0\}$ $\quad B_2 = \{x \in E \mid \mathrm{Im}\,(g(x)) = 1\}$
$B_3 = \{x \in E \mid 0 < \mathrm{Im}\,(g(x)) \leqslant 2\pi\}$

- Notons $W = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\,(z) > 0\}$. Par définition, $B_1 = g^{-1}(W)$. Or, l'application partie réelle est continue de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$ et $W = \mathrm{Re}^{-1}(\,]0, +\infty[\,)$, donc W est un ouvert de $\mathbb{C}$. Sachant que $B_1 = g^{-1}(W)$ et que g est continue, B_1 est un ouvert de E.
- Posons $V = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\,(z) = 1\}$. V est un fermé de $\mathbb{C}$ et $B_2 = g^{-1}(V)$. La continuité de g permet de conclure que B_2 est un fermé de E.
- Lorsque $E = \mathbb{C}$ et $g = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$ (*doc.* 6),

$$B_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Im}\,(z) \leqslant 2\pi\}.$$

Cet ensemble n'est ni ouvert, ni fermé.



Doc. 6. $z = 0$ *est adhérent à* B_3, *mais n'est pas dans* B_3.
$w = 2\,\mathrm{i}\,\pi$ *est dans* B_3, *mais n'est pas un point intérieur à* B_3.

4.3. Image d'un compact

Théorème 14

Si f est continue sur A et si K est une partie compacte de $(E, \| \|_E)$ incluse dans A, alors $f(K)$ est une partie compacte de $(F, \| \|_F)$.

La démonstration de ce *théorème* n'est pas exigible des étudiants.

Dans le cas où $F = \mathbb{R}$, un corollaire du théorème précédent s'énonce comme suit :

Corollaire 14.1
Soit A une partie compacte non vide de l'espace vectoriel normé $(E, \| \ \|_E)$ et f une application continue de A dans $\mathbb{R}$, alors f est bornée et atteint ses bornes sur A.

En d'autres termes, sous ces hypothèses, on peut écrire :

$$\exists\, M \in \mathbb{R} \ \ \forall x \in A \quad |f(x)| \leqslant M$$

$$\exists\, x_0 \in A \quad f(x_0) = \inf_{x \in A} f(x) = \min\{f(x), x \in A\}$$

$$\exists\, x_1 \in A \quad f(x_1) = \sup_{x \in A} f(x) = \max\{f(x), x \in A\}$$

Démonstration

D'après le *théorème* précédent, $f(A)$ est un compact de $\mathbb{R}$, donc une partie fermée, bornée de $\mathbb{R}$. L'application f est donc bornée. De plus, la borne supérieure d'une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ est un point adhérent à cette partie. Donc $\sup(f(A))$ est un point adhérent à $f(A)$, mais $f(A)$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$, donc $\sup(f(A))$ est dans $f(A)$.

Le raisonnement est identique pour la borne inférieure.

► ***Pour s'entraîner : ex. 7.***

Rudolph Lipschitz (1832-1903), *mathématicien allemand.*
Son travail sur les équations différentielles le conduit à introduire la notion de fonctions que nous appelons maintenant lipschitziennes.

4.4. Applications lipschitziennes

L'**application** f de A dans F est dite **lipschitzienne sur** A si :

$$\exists\, k \in \mathbb{R}^+ \ \ \forall (x, y) \in A^2 \quad \| f(x) - f(y)\|_F \leqslant k\|x - y\|_E.$$

On dit aussi que f est k-lipschitzienne sur A.

Théorème 15 : Continuité des applications lipschitziennes
Toute application lipschitzienne de A dans F est continue sur A.

Concours Mines-Ponts, 1997
« La notion d'application lipschitzienne n'est pas assimilée. »

4.5. Exemples fondamentaux

- En utilisant l'inégalité des accroissements finis,vous prouverez :

Une application de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée bornée d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$ est lipschitzienne sur I.

- Étant donné un espace vectoriel normé $(E, \| \ \|_E)$, on sait que :

$$\forall (x, y) \in E \quad \big|\|x\|_E - \|y\|_E\big| \leqslant \|x - y\|_E$$

Ceci permet de conclure que $\| \ \|_E$ est une application 1-lipschitzienne de $(E, \| \ \|_E)$ dans $\mathbb{R}$.

Elle est donc continue sur E. On en déduit que si (u_n) est une suite de vecteurs de E qui converge vers x dans $(E, \| \ \|_E)$, alors la suite réelle $(\|u_n\|_E)$ converge vers $\|x\|_E$.

Il existe des applications continues, non lipschitziennes. Par exemple, la fonction :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^{+*} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \dfrac{1}{x} \end{cases}.$$

En effet : $\left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right| = \dfrac{|x-y|}{|xy|}$ *et, pour tout réel* M, *il existe* $(x, y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$ *tel que* $\dfrac{1}{|xy|} \geqslant M$. *On en déduit que* f *n'est pas lipschitzienne.*

Théorème 16 : Composition d'applications lipschitziennes

A étant une partie de E, B une partie de F, si f est une application lipschitzienne de A dans B et g une application lipschitzienne de B dans G, alors $g \circ f$ est une application lipschitzienne de A dans G.

▶ ***Pour s'entraîner : ex. 8.***

Application 3

Quelques propriétés des fonctions lipschitziennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

(D'après Centrale 96, Math 1, option M et P')

On désigne par f et g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1) *On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Prouver que f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, f' est bornée sur $\mathbb{R}$.*

2) *On suppose que f et g sont lipschitziennes et bornées sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction produit fg est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.*

3) *Montrer que le produit de deux fonctions lipschitziennes n'est pas nécessairement une fonction lipschitzienne.*

4) *On suppose que f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe deux réels positifs A et B tels que :*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x)| \leqslant A|x| + B.$$

5) *On suppose que f vérifie la propriété suivante :*

$$\exists M \in \mathbb{R}\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$
$$(0 \leqslant x - y \leqslant 1) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|).$$

Prouver que f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

1) • Supposons f K-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Pour tout couple (x, y) de réels distincts, on a :

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leqslant K.$$

Puisque f est dérivable, passons à la limite quand y tend vers x, nous obtenons :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |f'(x)| \leqslant K.$$

• Réciproquement, l'inégalité des accroissements finis permet d'affirmer que, si f' est bornée, alors f est lipschitzienne.

2) Supposons que f et g soient respectivement k-lipschitzienne et l-lipschitzienne.

Notons $\|f\|_\infty = \sup |f|$ et $\|g\|_\infty = \sup |g|$.

Pour tout couple (x, y) de réels, on sait que :

$$f(x)g(x) - f(y)g(y) = f(x)(g(x) - g(y)) + g(y)(f(x) - f(y)).$$

On en déduit que :

$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| \leqslant (\|f\|_\infty l + \|g\|_\infty k)|x - y|.$$

Donc fg est lipschitzienne.

3) Considérons le cas où $f = g = \mathrm{Id}_\mathbb{R}$.

Les fonctions f et g sont 1-lipschitziennes. Leur produit est la fonction $(x \mapsto x^2)$ qui est dérivable et de dérivée non bornée sur $\mathbb{R}$. Donc fg n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

4) Supposons que f soit A-lipschitzienne. Alors :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |f(x) - f(y)| \leqslant A|x - y|$$

En prenant $y = 0$, on trouve :

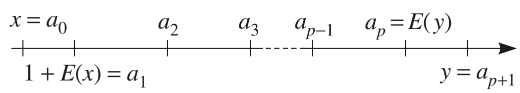
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x)| \leqslant |f(x) - f(0)| + |f(0)| \leqslant A|x| + |f(0)|$$

5) Fixons x et y deux éléments distincts de $\mathbb{R}$. Pour la rédaction, supposons : $x < y$.

• Si $y - x \leqslant 1$, on sait déjà que :

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|.$$

• Si $y - x > 1$, l'ensemble des entiers compris entre x et y est non vide. Notons-les dans l'ordre croissant $a_1, \ldots, a_p$ et posons $a_0 = x$ et $a_{p+1} = y$ (*doc.* 7).



Doc. 7. $a_1, \ldots, a_p$ *sont les entiers compris entre* x *et* y.

On peut écrire :

$$|f(y) - f(x)| = \left|\sum_0^p (f(a_{i+1}) - f(a_i))\right|$$
$$\leqslant \sum_0^p |f(a_{i+1}) - f(a_i)|.$$

Par construction, $|a_{i+1} - a_i| \leqslant 1$, donc :

$$|f(y) - f(x)| \leqslant \sum_0^p M|a_{i+1} - a_i|$$
$$= M|y - x|.$$

L'application f est lipschitzienne.

5 Cas des applications linéaires

Théorème 17

Étant donné deux espaces vectoriels normés de dimension finie, $(E, \| \|_E)$ et $(F, \| \|_F)$, et f une application linéaire de E dans F, alors :

- $\exists K \in \mathbb{R} \ \forall x \in E \quad \|f(x)\|_F \leqslant K\|x\|_E$;
- f est lipschitzienne sur E et continue de E dans F.

Démonstration

• Notons $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

Un élément x de E s'écrit : $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, :

$$\|f(x)\|_F = \left\|\sum_{i=1}^n x_i f(e_i)\right\|_F \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i| \, \|f(e_i)\|_F.$$

Posons $M = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|f(e_i)\|_F$, alors : $\|f(x)\|_F \leqslant M \sum_{i=1}^n |x_i|$. Mais nous savons que l'application N_1 définie sur E par : $N_1(x) = \sum_{i=1}^n |x_i|$ est une norme sur E qui est de dimension finie, donc :

$$\exists c \in \mathbb{R}^{+*} \ \forall x \in E \quad N_1(x) \leqslant c\|x\|_E.$$

L'existence de $K = cM$ est donc établie.

• Pour le second point, la constante K déterminée au premier point et la linéarité de f permettent d'écrire :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \|f(x) - f(y)\|_F = \|f(x - y)\|_F \leqslant K\|x - y\|_E.$$

L'hypothèse de la dimension finie est essentielle.
Considérons, en effet :
$E = \mathbb{R}[X] = F$ et posons, pour tout polynôme P tel que $P(X) = \sum_{j=0}^p a_j X^j$:

$$N(P) = \max\{|a_j| \mid 0 \leqslant j \leqslant p\}$$

• (E, N) est un espace vectoriel normé de dimension infinie ;

• l'opérateur de dérivation :

$$D : \begin{cases} E \to E \\ P \mapsto D(P) = P' \end{cases}$$

est un endomorphisme de E ;

• pour tout n :

$$N(D(X^n)) = n,$$

alors que : $N(X^n) = 1$.

En fait, D n'est pas une application continue de (E, N) dans (E, N).

Regarder la suite $\left(\dfrac{X^n}{n}\right)$ et la suite image $\left(D\left(\dfrac{X^n}{n}\right)\right)$.

Exemple

On munit $E = \mathbb{R}^2$ du produit scalaire canonique et l'on note $\| \|$ la norme euclidienne associée. Soit f un automorphisme orthogonal de E.
$\forall x \in E \quad \|f(x)\| = \|x\|$. Ici, $K = 1$ convient.

Application 4

Linéarité et majoration

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ *et* S *la fonction définie sur* E *par* $S(P) = \sup_{x \in [-1,1]} |P(x)|$.

1) *Montrer que, pour tout complexe* z_0, *il existe un réel* $k > 0$ *tel que :*

$$\forall P \in E \quad |P(z_0)| \leqslant kS(P) \qquad \textbf{(1)}$$

2) *Déterminer la plus petite constante* k *permettant d'obtenir la relation* **(1)** *lorsque* $n = 0$ *et lorsque* $n = 1$.

1) L'application S est une norme sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie E et, si l'on considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, la fonction valeur absolue est une norme sur $\mathbb{C}$.

L'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{C} \\ P & \mapsto & P(z_0) \end{array} \right.$ est linéaire.

Le *théorème* 17 nous apprend l'existence d'un réel $c > 0$ tel que :

$$\forall P \in E \quad |f(P)| = |P(z_0)| \leqslant cS(P).$$

2) • Lorsque $n = 0$, La plus petite constante cherchée est $k = 1$.

• Lorsque $n = 1$, les éléments de E sont de la forme $P(x) = ax + b$ et pour un tel polynôme :

$$S(P) = \sup_{x \in [-1,1]} |P(x)| = |a| + |b|.$$

Par ailleurs :

$$P(z_0) = az_0 + b \quad \text{et} \quad |P(z_0)| \leqslant |a|\,|z_0| + |b|.$$

Si $|z_0| \leqslant 1$, alors :

$$|P(z_0)| \leqslant |a| + |b| \leqslant S(P).$$

Ceci est valable pour tout élément P de E. De plus, pour les polynômes constants, on a toujours $|P(z_0)| = S(P)$. Donc, dans ce cas, la plus petite constante cherchée est $k = 1$.

Si $|z_0| > 1$, alors :

$$|P(z_0)| \leqslant |a|\,|z_0| + |b|\,|z_0| \leqslant |z_0|\,S(P).$$

Ceci est valable pour tout élément P de E. De plus, pour les monômes de degré 1 : $P(x) = ax$, on a $|P(z_0)| = |z_0|\,S(P)$. Donc, dans ce cas, la plus petite constante cherchée est $k = |z_0|$.

On a prouvé que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_1[X] \quad |P(z_0)| \leqslant \max(1, |z_0|)S(P).$$

Et $k = \max(1, |z_0|)$ est la constante la plus petite possible vérifiant **(1)**.

6 Cas des applications bilinéaires

Théorème 18

$(E, \| \ \|_E), (F, \| \ \|_F), (G, \| \ \|_G)$ étant trois espaces vectoriels normés de dimension finie et B une application bilinéaire de $E \times F$ dans G, alors :

- $\exists K \in \mathbb{R} \ \forall (x, y) \in E \times F \quad \|B(x, y)\|_G \leqslant K \|x\|_E \, \|y\|_F$
- B est continue sur $E \times F$.

Démonstration

• Notons $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $(f_1, \ldots, f_p)$ une base de F.

Un élément x de E s'écrit : $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et un élément y de F : $y = \sum_{j=1}^{p} y_j f_j$,

$$B(x, y) = B\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{p} y_j f_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} x_i y_j B(e_i, f_j)$$

Donc $$\|B(x,y)\|_G \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}|x_i|\,|y_j|\,\|B(e_i,f_j)\|_G.$$

Procédons de manière analogue à ce que nous fîmes pour les applications linéaires. Notons :

$$N_E\left(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\right)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i| \quad \text{et} \quad N_F\left(\sum_{j=1}^{p}y_jf_j\right)=\max_{1\leqslant j\leqslant p}|y_j|.$$

N_E et N_F sont respectivement des normes sur E et F et on peut écrire :

$$\forall (x,y)\in E\times F \quad \|B(x,y)\|_G \leqslant N_E(x)N_F(y)\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\|B(e_i,f_j)\|_G\right).$$

Utilisons le fait que E et F sont de dimension finie :

$$\exists (M_1,M_2)\in(\mathbb{R}^{+*})^2 \ \ \forall (x,y)\in E\times F \quad N_E(x)\leqslant M_1\|x\|_E \quad \text{et} \quad N_F(y)\leqslant M_2\|y\|_F.$$

Posons $M_3=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\|B(e_i,f_j)\|_G$, on obtient :

$$\forall (x,y)\in E\times F \quad \|B(x,y)\|_G\leqslant M_1M_2M_3\|x\|_E\|y\|_F.$$

- Pour établir la continuité de B, fixons x_0 et y_0 dans $E\times F$.

$$\forall (x,y)\in E\times F \quad B(x,y)-B(x_0,y_0)=B(x,y-y_0)+B(x-x_0,y_0)$$

Donc :

$$\|B(x,y)-B(x_0,y_0)\|_G\leqslant\|B(x,y-y_0)\|_G+\|B(x-x_0,y_0)\|_G$$
$$0\leqslant\|B(x,y)-B(x_0,y_0)\|_G\leqslant K\|x\|_E\|y-y_0\|_F+K\|x-x_0\|_E\|y_0\|_F \qquad \textbf{(1)}$$

Or, $E\times F$ est un espace vectoriel de dimension finie car E et F le sont. Donc, si (x,y) tend vers (x_0,y_0) dans $E\times F$, alors x tend vers x_0 dans E et y tend vers y_0 dans F.

L'inégalité **(1)** se traduit par : $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\|B(x,y)-B(x_0,y_0)\|_G=0$

et ceci prouve la continuité de B.

Exemples

■ Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $\langle\,|\,\rangle$ un produit scalaire sur E et $\|\ \|$ la norme euclidienne associée.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous apprend que :

$$\forall\ (x,y)\in E\times E \quad |\langle x\mid y\rangle|\leqslant\|x\|\,\|y\|.$$

Tout produit scalaire sur E est une application continue sur $E\times E$.

■ Soit $(F,\|\ \|_F)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé de dimension finie.

On sait que :
$$\forall\ (\alpha,x)\in\mathbb{K}\times F \quad \|\alpha x\|_F=|\alpha|\,\|x\|_F.$$

L'application $((\alpha,x)\mapsto\alpha x)$ est continue sur $\mathbb{K}\times F$.

■ (*PSI*) Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie.

Montrons que $A=\{(v,w)\in E^2\ |(v,w) \text{ est une famille libre}\}$ est un ouvert de E^2. Notons $\langle|\rangle$ un produit scalaire sur E et $\|\ \|$ la norme associée.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et son cas d'égalité :

$$A = \left\{(v, w) \in E^2 \mid \|v\| \, \|w\| - |\langle v \mid w\rangle| > 0\right\}.$$

Définissons l'application :

$$\phi \ : \ \begin{cases} E \times E \to \mathbb{R} \\ (v, w) \ \mapsto \phi(v, w) = \|v\| \, \|w\| - |\langle v \mid w\rangle| \end{cases}$$

Les applications :

$$(v, w) \ \mapsto \ \|v\|, \quad (v, w) \ \mapsto \ \|w\|, \quad (v, w) \ \mapsto \ \langle v \mid w\rangle$$

sont continues sur $E \times E$.

Donc ϕ est continue sur $E \times E$.
$A = \phi^{-1}(\,]0, +\infty[\,)$ est un ouvert de $E \times E$.

▶ ***Pour s'entraîner : ex. 9.***

7 Norme d'application linéaire (*PSI*)

7.1. Définition de $|||f|||$

$(E, \| \ \|_E)$ et $(F, \| \ \|_F)$ étant deux espaces vectoriels normés de dimension finie et f une application linéaire de E dans F, nous savons qu'il existe un réel K tel que :

$$\forall x \in E \quad \|f(x)\|_F \leqslant K\|x\|_E.$$

En particulier :

$$\forall x \in E \quad \|x\|_E \leqslant 1 \Rightarrow \|f(x)\|_F \leqslant K.$$

Donc, l'ensemble $\{\|f(x)\|_F \, ; \, \|x\|_E \leqslant 1\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Il admet une borne supérieure que nous notons $||| \ |||$. Ainsi :

$$|||f||| = \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} \|f(x)\|_F.$$

La valeur de $|||f|||$ dépend des normes $\| \ \|_E$ et $\| \ \|_F$ utilisées, même si la notation $|||f|||$ n'y fait pas référence.

Rapport Centrale, 2001

« L'idée de norme d'une application linéaire est manifestement très mal comprise de la très grande majorité des candidats. En effet, très peu ont compris que c'est de cela qu'il s'agissait et ... beaucoup de mal à traiter la question qui reposait sur le simple fait que la norme calculée du projecteur est 1. »

7.2. Propriétés de $||| \ |||$

On désigne par f une application linéaire de E dans F.

Théorème 19
Pour tout x de E, on a :

$$\|f(x)\|_F \leqslant |||f||| \, \|x\|_E.$$

Démonstration
Pour $x \neq 0_E$, on utilise le vecteur unitaire $y = \dfrac{x}{\|x\|_E}$.

Corollaire 19.1

Pour tout x de E, on a :

$$|||\, f\, ||| = \sup_{x \neq 0_E} \frac{\|\, f(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

Démonstration

Du *théorème* 19, nous déduisons l'inégalité :

$$\sup_{x \neq 0_E} \frac{\|\, f(x)\|_F}{\|x\|_E} \leqslant |||\, f\, |||.$$

Pour l'inégalité inverse, pour tout y non nul de E tel que $\|y\|_E \leqslant 1$, on remarque que :

$$\|\, f(y)\|_F \leqslant \frac{\|\, f(y)\|_F}{\|y\|_E} \leqslant \sup_{x \neq 0_E} \frac{\|\, f(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

Et comme $|||\, f\, ||| = \sup\limits_{\|y\|_E \leqslant 1} \|\, f(y)\|_F$, on obtient bien :

$$|||\, f\, ||| \leqslant \sup_{x \neq 0_E} \frac{\|\, f(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

La seconde propriété étudiée dans ce paragraphe concerne la composition des applications.

Considérons $(E, \|\ \|_E), (F, \|\ \|_F), (G, \|\ \|_G)$ trois espaces vectoriels de dimension finie pour simplifier les notations, nous écrirons :

$$\begin{aligned}
\forall u \in \mathcal{L}(E,F) \quad & |||u||| = \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} \|u(x)\|_F \\
\forall v \in \mathcal{L}(F,G) \quad & |||v||| = \sup_{\|y\|_F \leqslant 1} \|v(y)\|_G \\
\forall w \in \mathcal{L}(E,G) \quad & |||w||| = \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} \|w(x)\|_G
\end{aligned}$$

Théorème 20

Pour tout u de $\mathcal{L}(E,F)$ et tout v de $\mathcal{L}(F,G)$, on a :

$$|||v \circ u||| \leqslant |||v|||\ |||u|||.$$

Théorème 21

L'application $|||\ |||$ définit une norme sur $\mathcal{L}(E,F)$, appelée **norme d'application linéaire** subordonnée à $\|\ \|_E$ et $\|\ \|_F$.

Rapport X-ESPCI, 2000

« La notion de norme subordonnée est connue de beaucoup ; certaines copies, néanmoins font état de choses délirantes... »

Démonstration

• Par construction : $\forall f \in \mathcal{L}(E,F) \quad |||\, f\, ||| \geqslant 0$

• Si $|||\, f\, ||| = 0$, d'après la définition, on a :

$$\forall x \in E \quad 0 \leqslant \|\, f(x)\|_F \leqslant |||\, f\, |||\ \|x\|_E = 0.$$

Donc : $\forall x \in E \quad f(x) = 0_F$, et f est la fonction nulle.

• $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall f \in \mathcal{L}(E,F)$

$$|||\lambda f||| = \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} \|\lambda f(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} |\lambda|\, \|f(x)\|_F = |\lambda|\, |||f|||.$$

• Enfin, étant donnés deux éléments f et g de $\mathcal{L}(E,F)$, on peut écrire, pour tout x tel que $\|x\|_E \leqslant 1$,

$$\|(f+g)(x)\|_F \leqslant \|f(x)\|_F + \|g(x)\|_F \leqslant |||f||| + |||g|||.$$

Ainsi :

$$|||f+g||| = \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} \|(f+g)(x)\|_F \leqslant |||f||| + |||g|||.$$

7.3. Le cas de $\mathcal{L}(E)$

Lorsque $E = F$ et $\|\ \|_E = \|\ \|_F$, la fonction $|||\ |||$ définit alors une norme sur l'algèbre $\mathcal{L}(E)$. Cette norme vérifie de plus les deux propriétés suivantes que nous vous laissons prouver :

- $|||\mathrm{Id}_E||| = 1$
- $\forall (f,g) \in \mathcal{L}(E), \quad |||f \circ g||| \leqslant |||f|||\ |||g|||$

On en déduit par récurrence un troisième résultat bien utile :

$$\forall f \in \mathcal{L}(E) \ \forall n \in \mathbb{N} \quad |||f^n||| \leqslant |||f|||^n.$$

Une norme définie sur une algèbre et vérifiant ces deux propriétés supplémentaires est appelée **norme d'algèbre**.

► ***Pour s'entraîner : ex. 10.***

Application 5

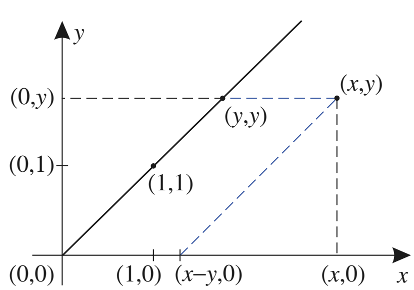
Quelques calculs de normes d'endomorphismes

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ *est muni de sa structure euclidienne usuelle et* $\|\ \|$ *désigne la norme euclidienne :*

$$\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}.$$

On note $\|\ \|_{\mathcal{L}}$ *la norme d'endomorphisme sur* $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ *associée à* $\|\ \|$:

$$\|f\|_{\mathcal{L}} = \sup_{\|(x,y)\| \leqslant 1} \|f(x,y)\|.$$



Doc. 8. *Le projecteur sur* $\mathbb{R}(1,0)$ *parallèlement à* $\mathbb{R}(1,1)$.

Calculer $\|f\|_{\mathcal{L}}$ *lorsque* f *est :*

a) *une rotation ou une symétrie orthogonale ;*

b) *le projecteur sur* $\mathbb{R}(1,0)$ *parallèlement à* $\mathbb{R}(1,1)$.

a) Les rotations et symétries orthogonales de $\mathbb{R}^2$ sont des isométries. Si f est une isométrie, alors :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \|f(x,y)\| = \|(x,y)\|.$$

On en déduit $\|f\|_{\mathcal{L}} = 1$.

b) Soit f le projecteur sur $\mathbb{R}(1,0)$ parallèlement à $\mathbb{R}(1,1)$. L'égalité $(x,y) = (x-y,0)+(y,y)$ prouve que $f(x,y) = (x-y,0)$. Donc :

$$\begin{aligned} \|f(x,y)\|^2 &= (x-y)^2 \\ &= x^2+y^2-2xy \leqslant 2(x^2+y^2). \end{aligned}$$

Donc $\|f(x,y)\| \leqslant \sqrt{2}\|(x,y)\|$. et $\|f\|_{\mathcal{L}} \leqslant \sqrt{2}$.

De plus $\|f(1,-1)\| = 2 = \sqrt{2}\|(1,-1)\|$.

On en déduit $\|f\|_{\mathcal{L}} = \sqrt{2}$.

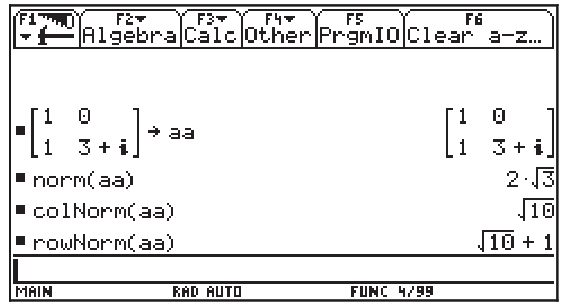
7.4. Exemples

■ Les vecteurs sont notés matriciellement et on identifie $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. (Ici $E = \mathbb{K}^n$ et $F = \mathbb{K}^p$.)

Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$, $\|X\|_E = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$ et $\|Y\|_F = \sum_{i=1}^{p} |y_i|$.

Si $M = (m_{i,j})$ est une matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, nous avons déjà rencontré :

$$colnorm(M) = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left(\sum_{i=1}^{p} |m_{i,j}| \right).$$



Nous noterons aussi $|||M||| = \sup \{\|MX\|_F \mid \|X\|_E \leqslant 1\}$.

Montrons que $|||M||| = colnorm(M)$.

Notons $(V_1, \ldots, V_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Soit X un vecteur de $\mathbb{K}^n$:

$$MX = M\left(\sum_{j=1}^{n} x_j V_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j M V_j,$$

et

$$\|MX\|_F \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|\right) \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \|MV_j\|_F = \|X\|_E \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left(\sum_{i=1}^{p} |m_{i,j}|\right).$$

Donc $\|MX\|_F \leqslant \|X\|_E \; colnorm(M)$ et $|||M||| \leqslant colnorm(M)$.

Soit j_0 tel que $\sum_{i=1}^{p} |m_{ij_0}| = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left(\sum_{i=1}^{p} |m_{i,j}|\right) = colnorm(M)$, puisque MV_{j_0} est le vecteur colonne d'indice j_0 de la matrice M, on a :

$$\|MV_{j_0}\|_F = colnorm(M) \quad \text{et} \quad \|V_{j_0}\|_E = 1.$$

Donc $colnorm(M) = \|MV_{j_0}\|_F \leqslant |||M||| \; \|V_{j_0}\|_E = |||M|||$.

■ L'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est muni de la norme $colnorm$.

L'application de transposition : $\Phi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & \Phi(M) = {}^tM \end{cases}$

est linéaire et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie. Donc Φ est continue.

Calculons $|||\Phi||| = \sup \{colnorm(\Phi(M)) \mid colnorm(M) \leqslant 1\}$.

• Si $M = (m_{i,j})$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, nous savons que :

$$colnorm(M) = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left(\sum_{i=1}^{p} |m_{i,j}|\right).$$

On en déduit que si $colnorm(M) \leqslant 1$, alors, pour tout (i, j), $|m_{i,j}| \leqslant 1$ et :

$$colnorm\,(\Phi(M)) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}|\right) \leqslant n.$$

• Pour prouver que $|||\Phi||| = n$, il suffit de trouver une matrice M telle que :

$$colnorm(M) = 1 \quad \text{et} \quad colnorm(\Phi(M)) = n.$$

Essayer :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

FICHE MÉTHODE

- Pour prouver que la **fonction f admet b comme limite au point a**, on peut :

- utiliser la définition ;
- utiliser les fonctions composantes de f lorsque l'espace F est de dimension finie ;
- décomposer f et utiliser les opérations sur les limites.

- Pour prouver que la **fonction f est continue au point a**, on montre que f admet $f(a)$ comme limite en a.

- Pour prouver que la **fonction f n'admet pas b comme limite au point a**, on construit une suite (x_n) d'éléments de E qui converge vers a et telle que la suite $(f(x_n))$ ne converge pas vers b.

- Pour prouver que la **fonction f n'admet pas de limite au point a**, on peut :

- trouver une suite (x_n) d'éléments de E qui converge vers a et telle que la suite $(f(x_n))$ n'ait pas de limite ;
- montrer que f n'est bornée dans aucune boule de centre a ;
- construire deux suites (x_n) et (y_n) d'éléments de E qui convergent vers a et telles que les suites $(f(x_n))$ et $(f(y_n))$ ne convergent pas vers la même limite.

- Pour pouvoir **prolonger par continuité la fonction f au point a**, il suffit de montrer que f admet une limite en a.

- Pour prouver qu'une **fonction f est continue sur A**, on peut :

- décomposer f en fonctions plus simples (polynômes, fractions rationnelles, produits, composées,...) et utiliser les opérations sur les fonctions continues ;
- montrer que f est continue en chaque point de A ;
- montrer que f est lipschitzienne sur A.

Programme *PSI*

- Pour prouver qu'une **partie V de E est fermée** (respectivement ouverte), il suffit de trouver une application continue de E dans F, f, et une partie fermée (respectivement ouverte) de F, W, telle que $f^{-1}(W) = V$.

- Sur $\mathcal{L}(E, F)$, la **norme d'application linéaire subordonnée** à $\| \|_E$ et $\| \|_F$ est définie par :

$$|||f||| = \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} \|f(x)\|_F = \sup_{x \neq 0_E} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

- **Pour calculer $|||f|||$**, on peut procéder comme suit :

- trouver une constante K telle que $\|f(x)\|_F \leqslant K$ pour tout x tel que $\|x\|_E \leqslant 1$;
- ou trouver une constante K telle que $\|f(x)\|_F \leqslant K\|x\|_E$ pour tout x de E.
  Dans les deux cas $|||f||| \leqslant K$.

Ensuite dans le cas où E est de dimension finie :

- lorsque l'on pense avoir « la meilleure constante » K, on s'en assure en cherchant un vecteur non nul v tel que $\|f(v)\|_F = K\|v\|_E$. On peut alors conclure que $|||f||| = K$.

Exercices résolus

1. Une équation fonctionnelle

ÉNONCÉ

Nous allons déterminer l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues en un point et vérifiant la relation suivante dans laquelle a désigne une constante réelle :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) + f(x-y) = a\, f(x)\, f(y) \tag{1}$$

1) Que remarquez-vous ?

2) Prouver que $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2 \quad f(2u) + f(2v) = a\, f(u+v)\, f(u-v)$. En déduire la continuité de f en 0.

3) On fixe f. Calculer $\lim\limits_{y \to 0} f(x+y) + f(x-y)$ et $\lim\limits_{y \to 0} f(x+y)\, f(x-y)$. En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.

4) Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

5) Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f''(x)\, f(y) = f''(y)\, f(x)$.

6) Déterminer toutes les solutions de **(1)**.

CONSEILS

Cherchez les fonctions constantes solutions du problème.

Que dire si $a = 0$?

Peut-on calculer facilement certaines valeurs de f ?

La recherche de « propriétés évidentes » est toujours ouverte. À vous, le jour de l'oral, de l'enrichir de remarques pertinentes.

SOLUTION

1) Soit k un réel. L'application constante $(x \mapsto k)$ est solution si, et seulement si, $2k = a k^2$.

On trouve $k = 0$ et, lorsque $a \neq 0$, $k = \dfrac{2}{a}$.

Si $a = 0$, on prend $y = 0$ dans **(1)**. La fonction nulle est la seule solution de **(1)**.

Si $a \neq 0$, le problème a une solution constante non nulle. Dans la suite, on suppose $a \neq 0$ et on désigne par f une solution non nulle de **(1)**.

Soit x un réel tel que $f(x) \neq 0$ et $y = 0$. D'après **(1)**, $f(0) = \dfrac{2}{a}$.

2) Il suffit de poser $x = u + v$ et $y = u - v$ pour obtenir :

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2 \quad f(2u) + f(2v) = a\, f(u+v)\, f(u-v). \tag{2}$$

Dans **(2)**, prenons pour u un point de continuité de f et faisons tendre v vers 0.

$$\lim_{v \to 0} f(2\,v) = a\, f^2(u) - f(2\,u) = f(0).$$

On en déduit la continuité de f en 0.

3) Fixons x dans $\mathbb{R}$. On sait que $\lim\limits_{y \to 0} f(y) = f(0) = \dfrac{2}{a}$. Donc :

$$\lim_{y \to 0} [\, f(x+y) + f(x-y)] = 2\, f(x).$$

En utilisant **(2)**, on trouve :

$$\lim_{y \to 0} \Big[f(x+y)\, f(x-y) \Big] = \frac{1}{a}(\, f(2x) + f(0)) = f^2(x).$$

Donc : $\lim\limits_{y \to 0} \Big[\big(f(x+y) + f(x-y) \big)^2 - 4\, f(x+y)\, f(x-y) \Big] = 0.$

Trouver une relation entre la fonction continue f et une primitive F de f.

Ainsi :

$$\lim_{y\to 0}\left[f(x+y)+f(x-y)\right]=2\,f(x)\quad\text{et}\quad\lim_{y\to 0}\left[f(x+y)-f(x-y)\right]=0.$$

On en déduit : $\lim_{y\to 0} f(x+y)=f(x)$.

C'est la continuité de f en x.

4) On pose $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

L'application f est continue sur $\mathbb{R}$ et f n'est pas la fonction nulle, donc sa primitive F non plus. Soit b réel tel que :

$$F(b)=\int_0^b f(y)\,\mathrm{d}y\neq 0.$$

Intégrons $(y\mapsto f(x+y)+f(x-y))$ sur $[0,b]$.

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad \int_0^b f(x+y)\,\mathrm{d}y+\int_0^b f(x-y)\,\mathrm{d}y=a\,f(x)\int_0^b f(y)\,\mathrm{d}y.$$

En posant $u=x+y$ dans la première intégrale et $v=x-y$ dans la deuxième, on obtient :

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad F(x+b)-F(x-b)=a\,f(x)\,F(b).\qquad \textbf{(3)}$$

Or f est continue sur $\mathbb{R}$, donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus, $a\,F(b)\neq 0$. On déduit de **(3)** que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc F est de classe $\mathcal{C}^2$. Par récurrence, on prouve que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

5) Considérons l'égalité **(1)** pour y fixé :

$$f(x+y)+f(x-y)=a\,f(x)\,f(y).$$

Dérivons deux fois (la variable est x) :

$$f''(x+y)+f''(x-y)=a\,f''(x)\,f(y).$$

Procédons de même en fixant x et en dérivant par rapport à la variable y :

$$f''(x+y)+f''(x-y)=a\,f(x)\,f''(y).$$

Donc :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\quad f''(x)\,f(y)=f(x)\,f''(y).$$

6) Soit y un réel tel que $f(y)\neq 0$. Notons $k=\dfrac{f''(y)}{f(y)}$. La fonction f est solution de l'équation différentielle :

$$f''=k\,f.\qquad \textbf{(4)}$$

Si $k=0$, alors f est une fonction polynôme de degré $\leqslant 1$ et la relation **(1)** vous permettra de prouver que f est constante. On est ramené au **1)**.

Si $k=\alpha^2>0$, alors f est de la forme :

$$f(x)=c_1\,\mathrm{ch}\,(\alpha\,x)+c_2\,\mathrm{sh}\,(\alpha\,x).$$

La valeur en 0 et la relation **(1)** permettent de prouver que :

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=\frac{2}{a}\,\mathrm{ch}\,(\alpha\,x).$$

Si $k = -\alpha^2 < 0$, alors f est de la forme :

$$f(x) = d_1 \cos(\alpha x) + d_2 \sin(\alpha x).$$

La valeur en 0 et la relation **(1)** permettent de prouver que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{2}{a}\cos(\alpha x).$$

Réciproquement, vous vérifierez que, pour tout réel α, les fonctions : $\left(x \mapsto \frac{2}{a}\operatorname{ch}(\alpha x)\right)$ et $\left(x \mapsto \frac{2}{a}\cos(\alpha x)\right)$ sont solutions du problème.

2. Une suite de matrices *(PSI)*

ÉNONCÉ

1) Soit B, C deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et (M_p) une suite convergente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Prouver que :

$$\lim_{p\to+\infty}(BM_pC) = B(\lim_{p\to+\infty} M_p)C.$$

Dans la suite, N est une norme sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2 \quad N(AB) \leqslant N(A)N(B). \qquad \textbf{(1)}$$

2) Montrer que, si $N(A) < 1$, alors $\mathrm{I}_n - A$ est inversible. Exprimer alors $(\mathrm{I}_n - A)^{-1}$ en fonction des puissances de A.

3) Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Prouver que $\mathrm{I}_n - AB$ est inversible si, et seulement si, $\mathrm{I}_n - BA$ est inversible et exprimer alors $(\mathrm{I}_n - BA)^{-1}$ en fonction de $(\mathrm{I}_n - AB)^{-1}$.

CONSEILS

Utiliser la suite géométrique de matrices (A^p) .

SOLUTION

1) L'application $(M \mapsto BMC)$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. C'est donc une application continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et :

$$\lim_{p\to+\infty}(BM_pC) = B\left(\lim_{p\to+\infty} M_p\right)C.$$

2) Notons I_n la matrice identité $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et convenons que $A^0 = \mathrm{I}_n$.
Il est élémentaire de prouver :

$$(\mathrm{I}_n - A)\left(\sum_0^p A^k\right) = \mathrm{I}_n - A^{p+1} \qquad \textbf{(2)}$$

Si nous posons $S_p = \sum_0^p A^k$, nous définissons une suite d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et :

$$N(S_{m+p} - S_m) = N\left(\sum_{m+1}^{m+p} A^k\right) \leqslant \sum_{m+1}^{m+p} N(A^k)$$
$$\leqslant \sum_{m+1}^{m+p}(N(A))^k = (N(A))^{m+1}\frac{1}{1-N(A)}.$$

On déduit de ces inégalités que la suite (S_p) est une suite de Cauchy de l'espace vectoriel normé de dimension finie $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Elle converge vers une matrice S. Or, la suite (A^p) converge vers la matrice nulle. La relation **(2)** nous donne alors $(\mathrm{I}_n - A)S = \mathrm{I}_n$, ce qui entraîne l'inversibilité de la matrice $(\mathrm{I}_n - A)$ et la formule : $(\mathrm{I}_n - A)^{-1} = S = \lim\limits_{p\to+\infty} \sum\limits_0^p A^k$.

On pourra étudier d'abord le cas :

$$N(A) < 1 \quad \text{et} \quad N(B) < 1.$$

3) • D'après la question précédente, si A et B ont toutes deux une norme strictement inférieure à 1, alors AB et BA aussi d'après **(1)**, donc $\mathrm{I}_n - AB$ et $\mathrm{I}_n - BA$ sont inversibles. De plus, on a alors :

$$\begin{aligned}(\mathrm{I}_n - AB)^{-1} &= \lim_{p\to+\infty} \sum_0^p (AB)^k = \lim_{p\to+\infty} \left(\mathrm{I}_n + \sum_1^p (AB)^k\right) \\ &= \mathrm{I}_n + \lim_{p\to+\infty} \sum_1^p (AB)^k = \mathrm{I}_n + \lim_{p\to+\infty} A\left(\sum_0^{p-1} (BA)^k\right) B \\ &= \mathrm{I}_n + A \lim_{p\to+\infty} \left(\sum_0^{p-1} (BA)^k\right) B = \mathrm{I}_n + A(\mathrm{I}_n - BA)^{-1} B.\end{aligned}$$

• Soit A et B deux éléments quelconques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tels que $\mathrm{I}_n - BA$ soit inversible. Montrons qu'il en est de même de $\mathrm{I}_n - AB$ et que :

$$(\mathrm{I}_n - AB)^{-1} = (\mathrm{I}_n + A(\mathrm{I}_n - BA)^{-1} B)$$

Pour cela, il suffit de calculer :

$$\begin{aligned}&(\mathrm{I}_n - A\,B)\,(\mathrm{I}_n + A(\mathrm{I}_n - B A)^{-1}\,B) \\ &\quad = \mathrm{I}_n - A\,B + A\,(\mathrm{I}_n - B\,A)^{-1} B - A\,B\,A\,(\mathrm{I}_n - B\,A)^{-1}\,B \\ &\quad = \mathrm{I}_n - A\,B + A\left((\mathrm{I}_n - B\,A)^{-1} - B\,A\,(\mathrm{I}_n - B\,A)^{-1}\right) B \\ &\quad = \mathrm{I}_n - A\,B + A\,(\mathrm{I}_n - B\,A)(\mathrm{I}_n - B\,A)^{-1}\,B = \mathrm{I}_n.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Exercices

1 Soit a un réel. Pour tout x de $\mathbb{R}^*$, on pose :

$$f(x) = \frac{a + \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}.$$

Étudier, en fonction de a, les limites à droite et à gauche de f en 0.

2 Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et h une application de E dans E. On suppose que :

- h admet une limite, L, en 0_E.
- $\forall x \in E \quad h\left(\frac{x}{2}\right) = h(x)$.

Prouver que h est constante.

3 Dans cet exercice, a et b sont des réels > 0 et E désigne la fonction partie entière.

1) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{a}\mathrm{E}\left(\frac{b}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{b}{x}\mathrm{E}\left(\frac{x}{a}\right)$.

2) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x}{a}\mathrm{E}\left(\frac{b}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{b}{x}\mathrm{E}\left(\frac{x}{a}\right)$.

4 On fixe α et β deux réels > 0. Calculer :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{1 + x^\alpha} - \sqrt{1 - x^\alpha}}{x^\beta}.$$

5 Soit h une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et :

$$\Delta = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = y\right\}.$$

On définit l'application f sur $\mathbb{R}^2 \backslash \Delta$ par :

$$f(x, y) = \frac{h(x) - h(y)}{x - y}.$$

Prouver que f est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.

6 Soit la fonction f définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1 + xy)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Déterminer son domaine de définition et prouver qu'elle est continue sur ce domaine.

7 Soit f et g deux fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in [a, b] \quad f(x) > g(x).$$

Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que :

$$\forall x \in [a, b] \quad f(x) \geqslant \lambda + g(x).$$

8 (*PSI*) Soit $(E, \langle | \rangle)$ un espace préhilbertien.

1) Montrer que, pour tout a de E, l'application :

$$f_a : \begin{cases} E \to \mathbb{C} \\ x \mapsto \langle x \mid a \rangle \end{cases} \quad \text{est continue sur } E.$$

2) En déduire que, pour toute partie A de E, l'orthogonal de A est un sous-espace vectoriel fermé de E.

9 Soit N une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Prouver :

$$\exists k \in \mathbb{R}^+ \ \forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \quad N(AB) \leqslant k\, N(A)N(B)$$

10 (*PSI*) L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et $\| \ \|$ désigne la norme euclidienne :

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

On note $\| \ \|_{\mathcal{L}}$ la norme d'endomorphisme subordonnée à $\| \ \|$ sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$:

$$\| f \|_{\mathcal{L}} = \sup_{\|(x,y)\| \leqslant 1} \| f(x, y)\|.$$

Soit a un réel quelconque. On désigne par p le projecteur sur $\mathbb{R}(1, 0)$ parallèlement à $\mathbb{R}(a, 1)$ et par q le projecteur sur $\mathbb{R}(a, 1)$ parallèlement à $\mathbb{R}(1, 0)$.

1) Calculer $\|p\|_{\mathcal{L}}$ et $\|q\|_{\mathcal{L}}$.

2) On note f l'affinité par rapport à $\mathbb{R}(1, 0)$ parallèlement à $\mathbb{R}(\sqrt{3}, 1)$ de rapport $\frac{1}{2}$.

Calculer $\| f \|_{\mathcal{L}}$.

c) Soit u un endomorphisme autoadjoint de $\mathbb{R}^2$.

Exprimer $\|u\|_{\mathcal{L}}$ en fonction des valeurs propres de u.

11* Soit f une application convexe de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.

1) Montrer que, pour tout a de $\mathbb{R}^+$, la fonction :
$\left(x \longmapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}\right)$ est croissante sur $]a, +\infty[$.

2) Montrer que $\dfrac{f(x)}{x}$ admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

3) On suppose que la limite l de $\dfrac{f(x)}{x}$ est réelle.

Montrer que $f(x) - lx$ admet une limite l' dans $\overline{\mathbb{R}}$.

12 * Soit f et g deux fonctions de $[0,1]$ dans $[0,1]$, croissantes et telles que $f \circ g = g \circ f$.

Montrer que f et g ont un point fixe commun.

Indication : Considérer :

$$A = \{x \in [0,1] \mid f(x) \geqslant x \quad \text{et} \quad g(x) \geqslant x\}$$

et sa borne supérieure.

13 * Déterminer toutes les applications h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ayant une limite finie en 0 et telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad h(2t) = h(t)\cos(t).$$

14 * Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé et A une partie de E.

Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que la fonction caractéristique de A, χ_A soit continue.

15 Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé, d la distance associée à $\|\ \|$ et A une partie non vide de E. Pour tout x de E, on note $d(x,A) = \inf\limits_{a \in A} d(x,a)$. On appelle cette quantité la distance du point x à la partie A.

Montrer que l'application $\delta : \begin{cases} E \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \delta(x) = d(x,A) \end{cases}$ est 1-lipschitzienne.

16 On utilise les notations de l'*exercice* 15.

1) Soit A et B deux fermés non vides de $(E, \|\ \|)$.

Prouver que :

$$(A \cap B = \varnothing) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \in E \quad d(x,A) + d(x,B) \neq 0).$$

2) Soit A et B deux fermés non vides et disjoints de $(E, \|\ \|)$.

Construire une application f, continue de E dans $\mathbb{R}$ et telle que :

$$f|_A = 0 \quad \text{et} \quad f|_B = 1.$$

En déduire l'existence de deux ouverts disjoints U et V tels que :

$$A \subset U \quad \text{et} \quad B \subset V.$$

17 * Soit $(E, \|\ \|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On note L l'ensemble des applications lipschitziennes de $(E, \|\ \|)$ dans lui-même qui s'annulent en 0_E. Pour tout élément f de L, on note I_f l'ensemble des réels $k \geqslant 0$ tels que f soit k-lipschitzienne.

1) Prouver que, pour tout f de L, I_f est un intervalle.

2) Montrer que $\forall (f,g) \in L^2 \quad I_f + I_g \subset I_{f+g}$.

3) Pour tout f de L, on pose $N(f) = \inf I_f$.

Montrer que N est une norme sur L.

18 * Soit K une partie compacte d'un espace vectoriel normé $(E, \|\ \|)$ et f une application de K dans K telle que :

$$\forall (x,y) \in K^2 \quad (x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|).$$

Montrer que f admet un point fixe et un seul.

19 Soit $(E, \|\ \|)$ et (F, N) deux espaces vectoriels normés, et f une application linéaire de E dans F telle que, pour toute suite bornée (u_n) de E, la suite $(f(u_n))$ soit bornée. Montrer que f est continue sur E.

20 Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie, F une partie fermée et non bornée de E et une application f continue de F dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\lim_{\substack{\|x\| \to +\infty \\ x \in F}} f(x) = +\infty.$$

1) Soit y dans F. Montrer que $f^{-1}\big(\,]-\infty, f(y)]\big)$ est une partie fermée et bornée de E.

2) En déduire qu'il existe a dans F tel que :

$$f(a) = \inf_{x \in F} f(x).$$

21 ** Montrer que, si n est dans $\mathbb{N}^*$ et p dans $[\![1,n]\!]$, l'ensemble $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{rg}\,(A) < p\}$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

22 * (*PSI*) Soit (φ_n) une suite d'éléments de $\mathcal{L}(E)$ où E est un espace vectoriel de dimension finie.

1) On suppose que, pour tout x de E, la suite $(\varphi_n(x))$ converge dans E et l'on note $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \varphi_n(x)$.

Montrer que f est un endomorphisme de E.

2) Montrer que la suite (φ_n) converge dans $\mathcal{L}(E)$ si, et seulement si, pour tout vecteur x de E, la suite $(\varphi_n(x))$ converge dans E.

23 (*PSI*) Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie.

On note $\|\ \|_{\mathcal{L}}$ la norme de $\mathcal{L}(E)$ associée à la norme $\|\ \|$ de E.

1) Montrer que, si p est un projecteur non nul, alors $\|p\|_{\mathcal{L}} \geqslant 1$.

2) On suppose que la norme $\|\ \|$ est la norme associée à un produit scalaire, $\langle | \rangle$, sur E.

Caractériser les projecteurs de E tels que $\|p\|_{\mathcal{L}} = 1$.

24 * (*PSI*) On désigne par N_1, N_2 et N_∞ les normes usuelles sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Sur $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$, on définit les trois normes d'applications linéaires correspondantes $\|\ \|_1, \|\ \|_2, \|\ \|_\infty$

tr est la fonction trace.

Calculer $\|\mathrm{tr}\|_1$, $\|\mathrm{tr}\|_2$ et $\|\mathrm{tr}\|_\infty$.

Suites et séries de fonctions

4

Introduction

La notion de limite de suite (ou de série numérique) conduit, lorsque la suite dépend d'un paramètre, à celle de limite de suite (ou de série) de fonctions. Abel, au début du XIX^e *siècle, fournit, avec* $\sum(-1)^{n-1}\dfrac{\sin(n\,x)}{n}$, *un exemple de fonction non continue, somme d'une série de fonctions continues. Cet exemple, qui sera étudié avec les séries de Fourier, contraignit ses contemporains à approfondir la notion de convergence.*

Nous devons à Weierstrass (1841) *la définition rigoureuse de la convergence uniforme et les propriétés développées dans les chapitres suivants sur les suites et séries de fonctions.*

Baire, en 1908, *introduit la convergence normale.*

Deux problèmes apparaissent ensuite.

1. *Une suite (ou une série) de fonctions convergente étant donnée, la fonction limite est-elle continue ?*
2. *Quelles suites de fonctions « simples » approchent une fonction continue ?*

OBJECTIFS

- Convergence simple d'une suite ou d'une série de fonctions.
- Convergence uniforme d'une suite ou d'une série de fonctions.(*PSI*)
- Convergence normale d'une série de fonctions.
- Théorème d'interversion des limites pour une suite de fonctions uniformément convergente.(*PSI*)
- Théorème d'interversion des limites pour une série de fonctions normalement convergente.
- Continuité de la fonction somme d'une série de fonctions normalement convergente.
- Approximation uniforme sur $[a,b]$ des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ par des fonctions en escalier.
- Approximation uniforme sur $[a,b]$ des fonctions continues par des fonctions polynomiales.
- Approximation uniforme sur $\mathbb{R}$ des fonctions continues périodiques par des polynômes trigonométriques complexes.

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, (non vide et non réduit à un singleton) et, sauf mention explicite du contraire, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On note $\mathcal{F}(I)$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel de ces fonctions. L'ensemble des fonctions bornées de I dans $\mathbb{K}$, $\mathcal{B}(I)$, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I)$. De même, l'ensemble $\mathcal{C}(I)$ des fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I)$.

***René Baire** (1874-1932), mathématicien français. On lui doit ce résultat étonnant : « l'ensemble des points de continuité d'une fonction dérivée est dense. »*

1 Modes de convergence

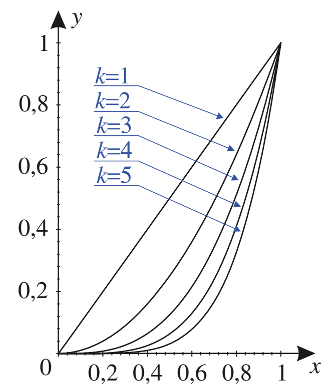
1.1. Convergence simple

1.1.1 Convergence simple d'une suite de fonctions

Une suite (f_n) de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ est dite **simplement convergente sur** I si, pour tout x de I, la suite numérique $(f_n(x))$ admet une limite. En désignant cette limite unique par $f(x)$, on définit une application f de I dans $\mathbb{K}$, appelée **limite simple** de la suite (f_n) ; on dit que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur I vers f.

(f_n) converge simplement sur I vers f si :

$$\forall x \in I \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant N \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \qquad \textbf{(1)}$$



Doc. 1. *Convergence simple sur* $[0, 1]$ *de la suite de fonctions* (f_n)

```
> assume(t>=0,t<=1);
    fn:=(n,t)->t^n;
    f:=unapply(limit(fn(n,t),
              n=infinity),t);
    plot({f(t),seq(fn(k,t),
              k=1..5)},t=0..1);
```

$$fn := (n,t) \to t^n$$
$$f := 0$$

Exemples

- $f_n(t) = t^n$ sur $I = [0, 1]$.

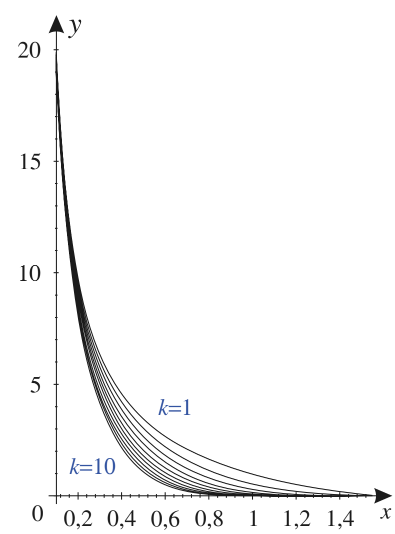
La suite (f_n) de fonctions converge simplement vers la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(1) = 1$ et, pour $t < 1$, $f(t) = 0$. (*doc.* 1.)

- $f_n(x) = \dfrac{\sin(x)\cos^n(x)}{1 - \cos(x)}$ sur $I = \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Soit x fixé dans $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, alors $\cos(x)$ appartient à $[0, 1[$.

La suite de fonctions (f_n) converge donc simplement sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ vers la fonction nulle. (*doc.* 2.)

► ***Pour s'entraîner : ex. 1.***



Doc. 2. *Convergence simple sur* $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ *de la suite de fonctions* (f_n).

1.1.2 Convergence simple d'une série de fonctions

De même, la série de fonctions $\sum u_n$ **converge simplement sur** I, si, pour tout x de I, la série numérique $\sum u_n(x)$ converge.

On appelle alors **fonction somme** de la série la fonction S définie sur I par :

$$S(x) = \sum_0^\infty u_n(x).$$

La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I vers S si :

$$\forall x \in I \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant N \quad |S_n(x) - S(x)| \leqslant \varepsilon$$

Étudier la convergence simple d'une suite de fonctions ou d'une série de fonctions revient à étudier la convergence d'une suite ou d'une série numérique dépendant du paramètre x. Le domaine de convergence simple est le domaine de définition de la fonction somme.

Rapport Mines-Ponts, 2003

« Pour étudier la convergence d'une suite de fonctions, la représentation graphique des premières fonctions de la suite (à l'aide de la calculatrice éventuellement) permet de s'orienter vers le type de convergence que semble posséder la suite. »

Application 1

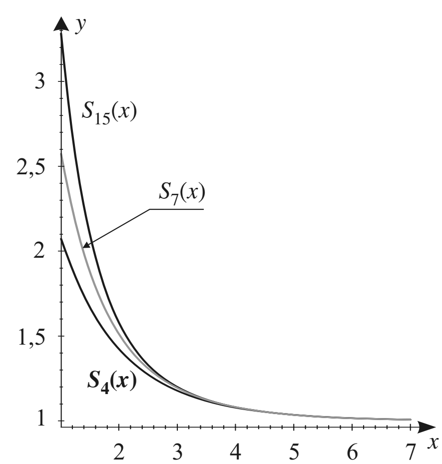
La fonction ζ de Riemann et la fonction μ

On considère les fonctions :

$$\zeta(x) = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^x} \quad \text{et} \quad \mu(x) = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}.$$

ζ est appelée la fonction ζ de Riemann.

Déterminer les domaines de définition de ces deux fonctions.

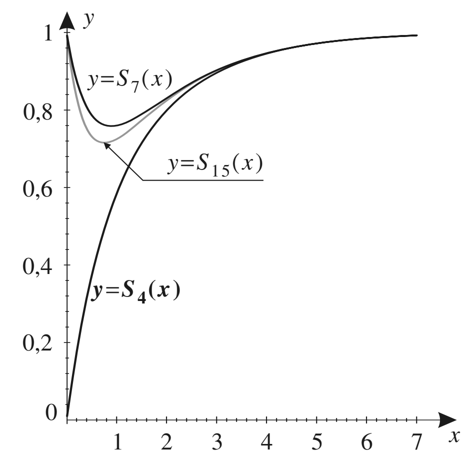


Doc. 3. *La fonction ζ de Riemann.*

```
> restart;fn:=(n,x)->n^(-x);
Sn:=(n,x)->sum('k'^(-x),'k'=1..n);
plot({Sn(4,x),Sn(7,x),
      Sn(15,x)},x=1.01..7);
```

$$fn := (n, x) \to n^{(-x)}$$

$$Sn := (n, x) \to \sum_{'k'=1}^{n} {'k'}^{(-x)}$$



Doc. 4. *La série de fonctions converge vers la fonction μ.*

```
> restart;fn:=(n,x)->(-1)^(n+1)*n^(-x);
Sn:=(n,x)->sum((-1))^('k'+1)*'k'^(-x),
                              'k'=1..n);
plot({Sn(4,x),Sn(7,x), Sn(15,x)},x=0.01..7);
```

$$fn := (n, x) \to (-1)^{(n+1)} n^{(-x)}$$

$$Sn := (n, x) \to \sum_{'k'=1}^{n} (-1)('k' + 1)' k'^{(-x)}$$

La fonction ζ et son prolongement à $\mathbb{C}$ sont fondamentaux en théorie des nombres. Cette fonction est en particulier l'objet d'une conjecture de Riemann (1826-1866), reprise par Hilbert dans son huitième problème, et toujours non élucidée. Aussi cette fonction, et la fonction μ, ingrédients classiques des problèmes de concours, nous fourniront-elles un fil conducteur pour les chapitres d'étude des suites et séries de fonctions. Au fur et à mesure de l'approfondissement de nos connaissances, nous en verrons la mise en œuvre avec ces deux fonctions.

1) La série numérique $\sum \frac{1}{n^x}$ converge si, et seulement si, $x > 1$. Le domaine de définition de la fonction somme ζ est $]1, +\infty[$ (*doc.* 3).

2) De même, la série numérique $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ est grossièrement divergente pour x fixé, inférieur ou égal à 0. Elle converge pour $x > 0$ comme le montre le critère spécial des séries alternées.
La fonction somme μ de cette série de fonctions est donc définie sur $]0, +\infty[$ (*doc.* 4).

1.1.3 L'espace vectoriel normé $(\mathcal{B}(I), \| \|_\infty)$

Considérons l'espace vectoriel, $\mathcal{B}(I)$, des fonctions bornées de I dans $\mathbb{K}$ et l'application :

$$\begin{array}{rcl} \| \|_\infty : \mathcal{B}(I) & \to & \mathbb{R}^+ \\ f & \mapsto & \| f \|_\infty = \sup_{x \in I} | f(x) |. \end{array}$$

Nous avons, dans le *chapitre* 2, rencontré cette application et montré qu'elle est une norme sur $\mathcal{B}(I)$.

Nous constatons ainsi que parler de la convergence d'une suite de fonctions n'a de sens que si l'on précise le type de convergence envisagé et l'intervalle d'étude.

1.2. Convergence uniforme de suites et séries de fonctions (*PSI*)

Pour les PC : GOTO 1.3

1.2.1 Convergence uniforme de suites de fonctions

Une suite (f_n) de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ **converge uniformément sur** I s'il existe une fonction f de I dans $\mathbb{K}$ telle que

$$\lim_{n \to +\infty} \| f - f_n \|_\infty = 0.$$

Rapport Mines-Ponts, 2003
« ...lacunes dans les connaissances de seconde année (convergence uniforme)... »

La suite (f_n) converge uniformément sur I vers f équivaut à :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \qquad \| f_n - f \|_\infty \leqslant \varepsilon$$

soit à :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant N \quad \forall x \in I \qquad | f_n(x) - f(x) | \leqslant \varepsilon \qquad \textbf{(2)}$$

■ La relation **(2)** ressemble beaucoup à la relation **(1)**, mais la position du « $\forall x \in I$ » n'est pas la même. Dans la relation **(1)**, l'entier naturel N dépend de x, alors que dans la relation **(2)**, le même N convient pour tous les x. Ceci justifie la terminologie « uniforme ». On retrouve le fait que la convergence uniforme entraîne la convergence simple, la réciproque étant fausse, comme le montre l'*exemple* 2 du paragraphe suivant.

■ À cause de cette définition, la norme $\| \|_\infty$ est aussi appelée **norme de la convergence uniforme**.

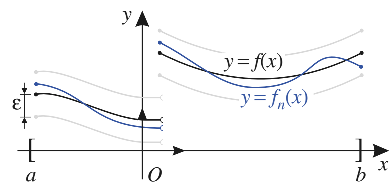
• La convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) est donc la convergence de la suite $(f_n - f)$ de fonctions bornées de $\mathcal{B}(I)$, relativement à la norme $\| \|_\infty$, vers la fonction nulle.

• La convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) vers f sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ s'exprime ainsi : pour tout $\varepsilon > 0$, il est possible de trouver un entier N tel que, pour tout $n \geqslant N$, le graphe de f_n soit contenu dans la bande du plan (xOy) (*doc.* 5) :

$$\{(x, y) \mid x \in I, \ y \in [\, f(x) - \varepsilon, \ f(x) + \varepsilon]\}.$$

Théorème 1

Si (f_n) est une suite de fonctions de $\mathcal{B}(I)$ convergeant uniformément sur I vers f, alors la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur I vers f.



Doc. 5. *Convergence uniforme sur* $[a, b]$.

Théorème 2 : Condition suffisante de non-convergence uniforme

I étant un intervalle de $\mathbb{R}$ et (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ convergeant simplement vers f, s'il existe une suite (x_n) de points de I tels que la suite numérique $(f_n(x_n) - f(x_n))$ ne tende pas vers 0, alors la convergence de la suite (f_n) vers f n'est pas uniforme sur I.

Démonstration

En effet : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |f_n(x_n) - f(x_n)| \leqslant \| f_n - f \|_\infty$

▶ ***Pour s'entraîner : ex. 2 et 3.***

1.2.2 Quelques exemples

■ **Exemple 1**

On considère la suite de fonctions (f_n) définie par :

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 e^{-n x}. \end{array} \right.$$

Étudions la convergence de cette suite de fonctions.

- Fixons d'abord x pour étudier la convergence simple de la suite (f_n).

La suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$.

- Cette convergence est-elle uniforme ?

Pour tout $n \geqslant 1$, la fonction f_n est dérivable et $f_n'(x) = x e^{-n x}(2 - n x)$. Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad |f_n(x)| \leqslant f_n\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{4}{n^2} e^{-2}.$$

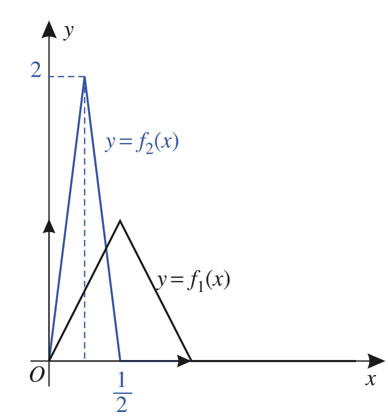
La suite de fonctions (f_n) converge donc uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle.

Dans Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste (1892), ***Poincaré*** *voulait caractériser complètement tous les mouvements de systèmes mécaniques. Il montra notamment que des développements en série, utilisés dans le problème des trois corps, étaient convergents, mais pas uniformément convergents en général, remettant ainsi en question les démonstrations de stabilité de Lagrange et Laplace.*

■ **Exemple 2 : Fonction « bosse glissante »**

Soit la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par (*doc.* 6) :

$$\left\{ \begin{array}{lll} f_n(x) = 2 n^2 x & \text{si} & x \in \left[0, \dfrac{1}{2n}\right] \\[2ex] f_n(x) = -2 n^2 \left(x - \dfrac{1}{n}\right) & \text{si} & x \in \left[\dfrac{1}{2n}, \dfrac{1}{n}\right] \\[2ex] f_n(x) = 0 & \text{si} & x \geqslant \dfrac{1}{n} \end{array} \right.$$



Doc. 6. *Fonction « bosse glissante ».*

- Vous prouverez que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.
- La convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}^+$, car :

$$\| f_n - 0\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} | f_n(t)| = n.$$

- Toutefois, si nous choisissons $a > 0$ et si nous considérons la restriction des f_n à $[a, +\infty[$, la suite de fonctions $(f_{n\,|[a,+\infty[})$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[a, +\infty[$.

1.2.3 Convergence uniforme sur tout segment

J étant une partie de I, lorsque $(f_n - f)$ est bornée sur J, on note :

$$\sup_{x \in J} | f(x) - f_n(x)| = \| f_{n|J} - f_{|J} \|_\infty .$$

Une suite de fonctions (f_n), définies sur I et convergeant simplement sur I vers une fonction f, **converge uniformément** vers f **sur tout segment** contenu dans I si, pour tout segment J de $\mathbb{R}$ contenu dans I, la suite $(f_{n|J})$ des restrictions de f_n à J converge uniformément vers la restriction $f_{|J}$ de f à J.

En d'autres termes, la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment contenu dans I si, pour tout segment J de $\mathbb{R}$ contenu dans I, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \| f_{n|J} - f_{|J} \|_\infty = 0.$$

Nous utiliserons aussi la convergence uniforme sur des intervalles contenus dans I. Vous en verrez un exemple dans l'*Application* 2.

► ***Pour s'entraîner : ex. 4.***

1.2.4 Exemples

■ Exemple 1

Soit $f_n : [0, 1[\to \mathbb{R}, \quad t \mapsto t^n$.

Le graphe et le calcul nous indiquent que : $\| f_n - 0\|_\infty = \sup_{t \in [0,1[} t^n = 1$

La convergence de la suite de fonctions (f_n) vers la fonction nulle n'est pas uniforme sur $[0, 1[$.

Mais, si $J = [a, b]$ est un segment de $[0, 1[$, on a : $\| f_{n|J} - 0\|_\infty = b^n$

Lorsque n tend vers $+\infty$, b^n tend vers 0, donc la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur tout segment de $[0, 1[$ vers la fonction nulle. (*doc.* 8.)

■ Exemple 2

Soit la suite (f_n) de fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par $f_n(x) = \dfrac{n\,(x^3 + x)\mathrm{e}^{-x}}{n\,x + 1}$.

- Fixons x dans $[0, +\infty[$:

La suite numérique $(f_n(x))$ converge. La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction f définie par :

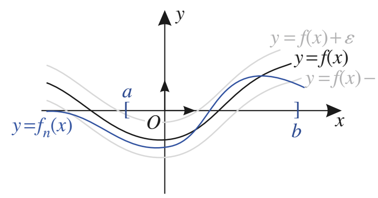
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ (x^2+1)\mathrm{e}^{-x} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Rapport X-ESPCI, 2002

« Il est fortement conseillé aux futurs candidats de réviser les différents types de convergence des séries de fonctions. »

Rapport Mines-Ponts, 2003

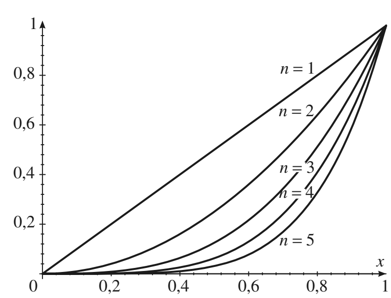
« La convergence a été encore plus rarement étudiée. »



Doc. 7. *Convergence uniforme sur tout segment.*

■ Les fonctions $f_n - f$ doivent donc être bornées sur tout segment J de I, à partir d'un certain rang.

■ La convergence uniforme sur I entraîne la convergence uniforme sur tout segment de I. Mais la réciproque est fausse. Il suffit de considérer le premier *exemple* ci-contre.



Doc. 8. *Convergence uniforme sur tout segment de* $[0, 1[$.

```
> assume(t>=0,t<=1);
fn:=(n,t)->t^n;
f:=unapply(limit(fn(n,t),
n=infinity),t);
plot({f(t),seq(fn(k,t),k=1..5)},
t=0..1);
```

$$fn := (n, t) \to t^n$$
$$f := 0$$

- La convergence est-elle uniforme sur $[0,+\infty[$?

Faisons appel à Maple, ou à une calculatrice graphique, pour le graphe de f et celui des f_n, pour n allant de 1 à 10. (*doc.* 9.)

La distance entre les réels $f_n(x)$ et $f(x)$ est proche de 1 pour x proche de 0.

$$\forall t > 0 \quad |f_n(t) - f(t)| = \left|\frac{n\,(t^3+t)\mathrm{e}^{-t}}{nt+1} - (t^2+1)\mathrm{e}^{-t}\right| = \left|\frac{\mathrm{e}^{-t}}{nt+1}(t^2+1)\right|.$$

D'où :

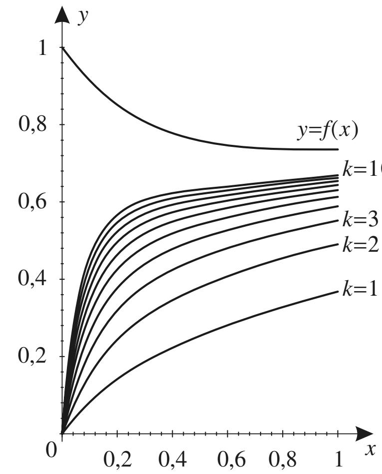
$$\left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)\right| \geqslant \frac{\mathrm{e}^{-1/n}}{2}.$$

La convergence de la suite (f_n) vers f sur $[0,+\infty[$ n'est pas uniforme. Considérons les restrictions de ces fonctions à un segment $[a,b]$ $(0 < a < b)$.

$$\forall t \in [a,b] \quad |f_n(t) - f(t)| = \left|\frac{\mathrm{e}^{-t}}{nt+1}(t^2+1)\right| \leqslant \frac{1+b^2}{n\,a+1}.$$

$$\| f_{n|[a,b]} - f_{|[a,b]}\|_\infty \leqslant \frac{1+b^2}{n\,a+1}.$$

La convergence de la suite de fonctions (f_n) vers f est uniforme sur tout segment $[a,b]$ de $]0,+\infty[$.



Doc. 9.

```
> restart:fn:=(n,x)->(n*(x^3+x)
          *exp(-x))/(n*x+1);
f:=unapply(limit(fn(n,x),
n=infinity),x);
> plot({f(x),seq(fn(k,x),
  k=1..10)},x=0..1);
```

$$f\,n := (n,x) \to \frac{n\,(x^3+x)\mathrm{e}^{(-x)}}{n\,x+1}$$

$$f := x \to (x^2+1)\mathrm{e}^{(-x)}$$

1.2.5 Cas des fonctions bornées

Théorème 3

Soit (f_n) une suite de fonctions bornées convergeant uniformément vers f sur I, alors la fonction f est bornée.

Démonstration

$$\forall x \in I \quad |f(x)| \leqslant \|f - f_n\|_\infty + \|f_n\|_\infty.$$

La convergence uniforme d'une suite (f_n) de fonctions bornées sur I, vers f, est la convergence dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{B}(I), \|\ \|_\infty)$.

Théorème 4

Soit (f_n) une suite de fonctions bornées sur I convergeant uniformément vers f sur I, alors la suite (f_n) vérifie le critère de Cauchy de convergence uniforme :

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N\ \forall p \in \mathbb{N} \quad \| f_{n+p} - f_n\|_\infty < \varepsilon.$$

1.2.6 Convergence uniforme d'une série de fonctions

Soit (u_k) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$. Alors, la suite des sommes partielles (S_n), définie par $S_n(x) = \sum_0^n u_k(x)$, est une suite de fonctions définies sur I. Si la série de fonctions $\sum u_k$ converge simplement sur I, on peut définir la fonction reste d'indice n sur I en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in I \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x).$$

Rapport Mines-Ponts, 2003

« Certains semblent mal maîtriser la notion de convergence uniforme car ils ne précisent pas le domaine de variation de la variable. »

La série de fonctions $\sum u_k$ de I dans $\mathbb{K}$ est dite **convergente uniformément** (ou **uniformément convergente**) sur I lorsque la suite des fonctions sommes partielles (S_n) associée converge uniformément sur I.

Théorème 5
Une série de fonctions $\sum u_k$ de I dans $\mathbb{K}$ est uniformément convergente si, et seulement si, la série de fonctions $\sum u_k$ converge simplement sur I et si la suite des fonctions restes (R_n) converge uniformément sur I vers la fonction nulle.

Rapport Mines-Ponts 2003
« Il y a toujours confusion entre convergence uniforme sur tout segment de I et convergence uniforme sur I. »

Rapport X-ESPCI, 2000
« graves confusions entre convergence simple, uniforme, uniforme sur tout segment. »

Rapport Centrale, 2001
« Et toujours l'erreur classique : la convergence uniforme sur tout segment $[a, b]$ de $]0, +\infty[$ implique la convergence uniforme sur $]0, +\infty[$. »

1.2.7 Convergence uniforme sur tout segment d'une série de fonctions

La série de fonctions $\sum u_k$ est dite **convergente uniformément sur tout segment de I** lorsque, pour tout segment J de I, la série de fonctions $\sum u_{k|J}$ converge uniformément sur J.

▶ ***Pour s'entraîner : ex. 5.***

Application 2

Utilisation du critère spécial des séries alternées : la fonction μ

La fonction μ est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\mu(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

1) *Étudier la convergence uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}^{+*}$ de la série de fonctions définissant la fonction μ.*

2) *Montrer que cette convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}^{+*}$.*

1) Soit $b > 0$ fixé. Le critère spécial des séries alternées s'applique.

$$\forall x \geqslant b \quad |R_n(x)| \leqslant \left| \frac{(-1)^n}{(n+1)^x} \right| \leqslant \frac{1}{(n+1)^b}.$$

Le majorant est indépendant de x et tend vers 0.

La série de fonctions de somme $\mu(x)$ converge uniformément sur $[b, +\infty[$, pour tout $b > 0$.

2) Montrons que la convergence de cette série de fonctions n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Pour tout n, $(-1)^n u_{n+1} = R_n - R_{n+1}$. Les fonctions u_n, différences de fonctions bornées sur $\mathbb{R}^{+*}$, sont bornées sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Si la convergence de la série de fonctions était uniforme sur $\mathbb{R}^{+*}$, la suite (u_n) aurait pour limite 0 dans l'espace vectoriel normé des fonctions bornées sur $\mathbb{R}^{+*}$, muni de $\| \ \|_\infty$. Or, $\|u_n\|_\infty = 1$, ce n'est pas le cas.

1.3. La convergence normale

1.3.1 Définition

Étant donné une suite (u_k) de fonctions bornées sur I, on dit que la série de fonctions $\sum u_k$ **converge normalement** sur I si la série $\sum \|u_k\|_\infty$ converge.

⚠ *La convergence normale ne concerne que les **séries de fonctions**.*

Théorème 6
Toute série de fonctions $\sum u_k$, normalement convergente sur I, est simplement convergente sur I.

Démonstration

Soit $\sum u_k$ une série de fonctions normalement convergente sur I et x un point de I.
Alors, la série numérique $\sum |u_k(x)|$ est à termes positifs, et majorée par la série convergente $\sum \|u_k\|_\infty$, donc converge. La série numérique $\sum u_k(x)$ converge absolument, donc la série de fonctions $\sum u_k$ converge simplement sur I.

Rapport Mines-Ponts, 2001
« Mauvaise connaissance de la convergence normale. »

Rapport Mines-Ponts 2003
« La notion même de convergence normale est mal connue et encore moins bien maîtrisée. »

Théorème 7 (*PSI*)
Toute série de fonctions $\sum u_k$ normalement convergente sur I est uniformément convergente sur I.

Démonstration

$$\forall x \in I \quad |R_n(x)| \leqslant \sum_{n+1}^{\infty} |u_k(x)| \leqslant \sum_{n+1}^{\infty} \|u_k\|_\infty = \varepsilon_n.$$

ε_n est le reste d'une série numérique convergente, donc tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
La suite des fonctions reste converge uniformément vers la fonction nulle sur I.

La réciproque est fausse.
Considérons la série de fonctions constantes $\sum \frac{(-1)^n}{n}$.
Cette série de fonctions n'est pas normalement convergente. Cependant, elle converge pour tout x réel car la série numérique $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ *vérifie le critère spécial des séries alternées et, pour tout n :*

$$\|R_n\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \sum_{n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \right| \leqslant \frac{1}{n+1},$$

donc la série de fonctions converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

1.3.2 Convergence normale sur tout segment

On dit que la série de fonctions $\sum u_k$ **converge normalement sur tout segment de I** si, pour tout segment J de I, la série $\sum \|u_{k|J}\|_\infty$ converge.

Exemple

La série $\sum \frac{x^n}{n!}$ qui définit la fonction exponentielle converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Rapport Mines-Ponts, 2003
« Encore cette année le jury rappelle qu'il faut préciser sur quel ensemble a lieu telle ou telle convergence. »

1.3.3 Méthode pratique

Théorème 8
Soit $\sum u_k$ une série de fonctions définies sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
S'il existe une suite de réels (ε_n) telle que :
- $\forall n \in \mathbb{N} \ \forall x \in I \quad |u_n(x)| \leqslant \varepsilon_n$
- la série $\sum \varepsilon_k$ converge,

alors la série de fonctions $\sum u_k$ converge normalement sur I.

▶ ***Pour s'entraîner : ex. 6 et 7.***

Rapport E3A, 2002
« Les majorations permettant d'établir la convergence normale sont presque toujours inexactes voire farfelues. »

Rapport Mines-Ponts, 2003
« Il fallait majorer par une expression indépendante de x pour obtenir la convergence normale. »

Théorème 9
Si la série de fonctions $\sum u_k$ est normalement convergente sur I, alors :

$$\left\| \sum_0^\infty u_n \right\|_\infty \leqslant \sum_0^\infty \|u_n\|_\infty .$$

La convergence normale est un puissant outil pour établir la convergence uniforme d'une série de fonctions.

Démonstration

Posons $S_n(x) = \sum_0^n u_k(x)$ et $S(x) = \sum_0^\infty u_k(x)$.

On sait que : $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in I \quad |S_n(x)| \leqslant \sum_0^n \|u_k\|_\infty \leqslant \sum_0^\infty \|u_k\|_\infty$.

Il en résulte : $\forall x \in I \ |S(x)| \leqslant \sum_0^\infty \|u_k\|_\infty$.

Puis : $\|S\|_\infty = \left\| \sum_0^\infty u_n \right\|_\infty \leqslant \sum_0^\infty \|u_n\|_\infty$.

(PSI) Lorsqu'une série de fonctions converge normalement sur tout segment de I, elle converge uniformément sur tout segment de I.

Application 3

Les fonctions ζ et μ

Rappelons que :

$$\zeta(x) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^x} \qquad \text{et} \qquad \mu(x) = \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$$

et que ζ est définie sur $]1,+\infty[$ et μ sur $]0,+\infty[$.

1) *Étudier la convergence normale de la série de fonctions définissant ζ .*

2) *(PSI) Étudier la convergence uniforme de la série de fonctions définissant ζ .*

3) *Étudier la convergence normale de la série de fonctions définissant μ.*

4) *Donner une relation entre les fonctions ζ et μ.*

1) Montrons d'abord que ζ est normalement convergente sur tout intervalle $[a,+\infty[$ $(a > 1$ fixé).

$$\forall x \in [a,+\infty[\quad \frac{1}{n^x} \leqslant \frac{1}{n^a},$$

La série numérique $\sum \frac{1}{n^a}$ converge, donc la série de fonctions $\sum \frac{1}{n^x}$ est normalement convergente sur $[a,+\infty[$.

Mais la convergence de la série de fonctions définissant ζ n'est pas normale sur $]1,+\infty[$.

2) (PSI) Si la convergence de la série de fonctions $\sum n^{-x}$ était uniforme sur $]1,+\infty[$, on aurait :

$$\forall x \in]1,+\infty[\quad \sum_{n+1}^{2n} \frac{1}{k^x} \leqslant R_n(x) \leqslant \|R_n\|_\infty.$$

En faisant tendre x vers 1, on obtiendrait :

$$\frac{1}{2} \leqslant \sum_{n+1}^{2n} \frac{1}{k} \leqslant \|R_n\|_\infty,$$

ce qui contredit la convergence uniforme.

3) On en déduit que la série de fonctions $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ converge normalement sur tout intervalle $[a,+\infty[$ $(a > 1$ fixé).

4) Relation entre $\mu(x)$ et $\zeta(x)$.

Pour tout $x > 1$:

$$\mu(x) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^x} - 2\sum_1^\infty \frac{1}{(2n)^x}$$

$$= (1 - 2^{1-x}) \sum_1^\infty \frac{1}{n^x} = \zeta(x)(1 - 2^{1-x}).$$

1.4. Extension

A est une partie de $\mathbb{C}$. Étant donnée une suite (u_k) de fonctions bornées de A dans $\mathbb{K}$, on dit que la série de fonctions $\sum u_k$ **converge normalement** sur A si la série $\sum \|u_k\|_\infty$ converge.

On dit que la série de fonctions $\sum u_k$ **converge normalement sur tout compact de A** si, pour tout compact J de A, la série $\sum \|u_{k|J}\|_\infty$ converge.

Cette extension nous sera utile lors de l'étude des séries entières.

Les théorèmes 6 et 7 se généralisent à des séries définies sur une partie A de $\mathbb{C}$.

Exemple

Considérons la série de fonctions définies sur $\mathbb{C}$, $\sum u_n$, avec :

$$u_n(z) = \frac{z^n}{n!}.$$

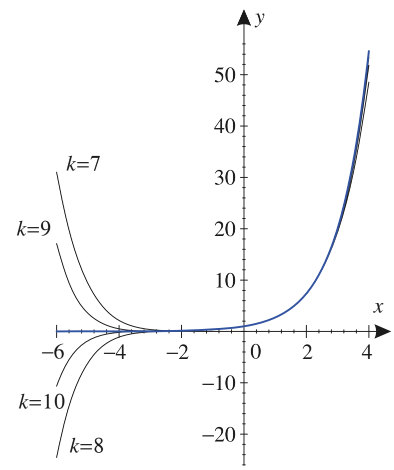
■ *Convergence simple*

Nous avons déjà établi que, pour tout z de $\mathbb{C}$, la série numérique $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge absolument et nous avons nommé **exponentielle** la fonction somme :

$$\exp(z) = \sum_0^\infty \frac{z^n}{n!} = e^z.$$

La série de fonctions converge donc simplement sur $\mathbb{C}$.

(*doc.* 10.)



Doc. 10. *Sommes partielles de la série* $\sum \frac{x^n}{n!}$.

```
> restart:
> F:=plot({seq(convert
   (series(exp(x),x,k),polynom),
   k=7..10)},x=-6..4):
> G:=plot(exp(x),x=-6..4):
> with(plots):display({F,G},
   title='y=exp(x)');
```

■ *Convergence normale sur tout compact de* $\mathbb{C}$

Soit J un compact de $\mathbb{C}$. On a :

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall z \in J \quad |z| \leqslant M.$$

Ainsi :

$$\forall z \in J \quad |u_n(z)| \leqslant \frac{M^n}{n!} \quad \text{et} \quad \|u_{n|J}\|_\infty \leqslant \frac{M^n}{n!}.$$

La série numérique $\sum \frac{M^n}{n!}$ converge. La série $\sum u_n$ converge donc normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$.

■ (*PSI*) *Converge-t-elle uniformément sur* $\mathbb{C}$?

Soit n fixé. La fonction reste d'ordre n est définie par $R_n(z) = \sum_{n+1}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$.

On remarque que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad R_n(t) \geqslant \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Or, $\lim_{t \to +\infty} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} = +\infty$. La suite de fonctions (R_n) ne converge donc pas uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{C}$.

Inconvénients de la convergence simple

On ne maîtrise pas les propriétés analytiques : continuité, dérivabilité de la fonction limite en cas de convergence simple de la suite ou de la série de fonctions.

2 Continuité de la limite d'une suite (ou d'une série) de fonctions

2.1. Théorème d'interversion des limites (*PSI*)

2.1.1 Le théorème

Théorème 10

Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$ et a adhérent à I.

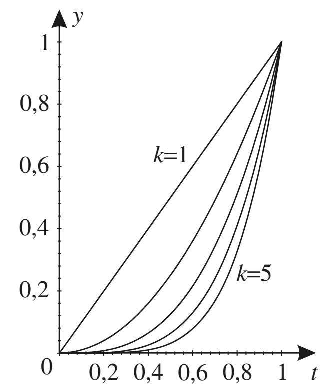
Si la suite vérifie :

- (f_n) converge uniformément sur I vers f ;
- chaque fonction f_n admet une limite b_n en a.

Alors :

- la suite (b_n) converge vers un scalaire b ;
- f admet en a la limite b :

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to+\infty}\left(f_n(x)\right)\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to a}\left(f_n(x)\right)\right).$$



Doc. 11. *La fonction limite n'est pas continue sur* $[0,1]$.

$fn := (n,t) \to t^n$
$f := 0$

Démonstration

- Montrons que la suite (b_n) est une suite de Cauchy de $\mathbb{K}$.

Fixons un $\varepsilon > 0$.

La suite (f_n) converge uniformément vers f sur I, et :

$$\exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geqslant N\ \forall p\in\mathbb{N}\quad \|f_{n+p}-f_n\|_\infty\leqslant\varepsilon.$$

Donc : $\exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geqslant N\ \forall p\in\mathbb{N}\ \forall x\in I\quad |f_{n+p}(x)-f_n(x)|\leqslant\varepsilon.$

L'application $(x\mapsto|x|)$ est continue. Faisons tendre x vers a :

$$\exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geqslant N\ \forall p\in\mathbb{N}\quad |b_{n+p}-b_n|\leqslant\varepsilon.$$

La suite (b_n) est donc une suite de Cauchy de $\mathbb{K}$, elle converge vers un scalaire b.

- Montrons que f admet en a la limite b.

$$|f(x)-b|\leqslant|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-b_n|+|b_n-b|.$$

Fixons $\varepsilon>0$. Il existe N tel que :

$$\forall n\geqslant N\qquad \|f-f_n\|_\infty\leqslant\varepsilon\quad\text{et}\quad|b_n-b|\leqslant\varepsilon.$$

On en déduit :

$$\forall n\geqslant N\ \forall x\in I\quad |f(x)-b|\leqslant 2\varepsilon+|f_n(x)-b_n|.$$

Terminons en supposant a réel.

Soit $n\geqslant N$, la fonction f_n admet b_n comme limite en a, donc :

$$\exists\alpha>0\ \forall x\in\,]a-\alpha,a+\alpha[\,\cap I\quad |f_n(x)-b_n|\leqslant\varepsilon.$$

En définitive, pour cet ε fixé, pour ce n et pour tout x de $]a-\alpha,a+\alpha[\,\cap I$, on a :

$$|f(x)-b|\leqslant|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-b_n|+|b_n-b|\leqslant 3\varepsilon.$$

On a prouvé que : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$.

Rapport Mines-Ponts, 2001

« L'interversion des passages à la limite ou la justification de la convergence de la série sont mal traitées ou passées sous silence. »

Le *théorème* s'applique donc aux extrémités des intervalles de définition des fonctions f_n. Il s'applique aussi en $+\infty$ si I contient un intervalle de la forme $[c,+\infty[$ et en $-\infty$ si I contient un intervalle de la forme $]-\infty,c]$.

Lorsque $a=+\infty$, on substitue à α un réel M et à $]a-\alpha,a+\alpha[$ l'intervalle $]M,+\infty[$. Adapter pour $a=-\infty$.

2.1.2 Les conséquences

Corollaire 10.1

- Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$ et a un point de I. Si toutes les fonctions f_n sont continues en a et si la suite de fonctions converge uniformément sur I vers f, alors f est continue en a.
- Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{C}(I)$ convergeant uniformément vers f sur I. Alors f est continue sur I.
- Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{C}(I)$ convergeant vers f uniformément sur tout segment de I. Alors f est continue sur I.

Si la suite (f_n) de fonctions continues sur I converge uniformément vers f sur tout segment de I, alors f est continue sur tout segment de I, donc continue sur I.

▶ ***Pour s'entraîner : ex. 8 et 9.***

Corollaire 10.2 : Théorème d'interversion des limites pour une série de fonctions

Soit (u_n) une suite de fonctions de $\mathcal{F}(I)$ et a adhérent à I. Si :

- la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur I vers S ;
- chaque fonction u_n admet une limite b_n en a ;

alors :

- la série $\sum b_n$ converge vers un scalaire b ;
- la fonction somme S admet en a la limite b.

$$\lim_{x\to a}\left(\sum_0^{\infty} u_n(x)\right) = \sum_0^{\infty}\left(\lim_{x\to a} u_n(x)\right)$$

■ On peut avoir $f = \lim f_n$ continue en a, sans que les f_n soient continues. Ainsi, la suite de fonctions (f_n) définies sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = \dfrac{\mathrm{E}(x)}{(n+1)}$ converge simplement vers la fonction nulle. Elle converge aussi uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}^+$, mais les f_n ne sont pas continues, bien que f le soit.

■ On peut aussi avoir $f = \lim f_n$ continue en a, sans que la convergence soit uniforme. Ainsi, la suite de fonctions (f_n) définies sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = t^n$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction nulle f. Il n'y a pas convergence uniforme, mais les f_n et f sont continues sur $[0,1[$.

Corollaire 10.3

Soit $\sum u_k$ une série de fonctions continues sur I, uniformément convergente sur tout segment de I. Alors la fonction somme $S = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$ est continue sur I.

▶ ***Pour s'entraîner : ex. 10 à 12.***

2.1.3 Exemples

■ *La fonction ζ de Riemann*

Supposons la série de fonctions uniformément convergente sur $]1,+\infty[$. On peut alors appliquer à la fonction ζ le *théorème d'intervention des limites*, car :

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{n^x} = \frac{1}{n}.$$

On en déduit que la série $\sum \frac{1}{n}$ converge. Ce qui est faux.

■ *La fonction* μ

Si l'on suppose la série de fonctions définissant μ uniformément convergente sur $]0,+\infty[$, on peut appliquer le *théorème d'interversion des limites*, avec :

$$\lim_{x\to 0}\frac{(-1)^{n+1}}{n^x}=(-1)^{n+1}.$$

On obtient la convergence de la série $\sum(-1)^{n+1}$, ce qui est faux.

■ *La série de fonctions* $\sum u_k$ définie par :

$$u_k(t)=(-1)^k\ln\left(1+\frac{t^2-1}{k(2+t^2)}\right)$$

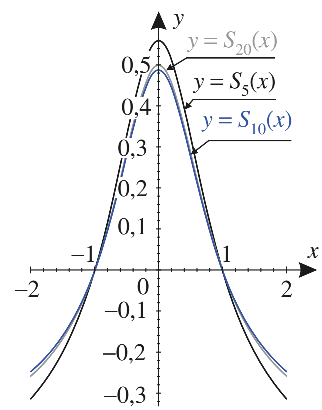
Si t est un réel fixé, la série numérique $\sum u_k(t)$ est une série alternée qui vérifie le critère spécial des séries alternées, et donc converge. De plus, pour tout n, on a :

$$|S(t)-S_n(t)|=|R_n(t)|\leqslant|u_{n+1}(t)|\leqslant\left|\ln\left(1+\frac{t^2-1}{(n+1)(2+t^2)}\right)\right|$$

En distinguant les cas $|t|\geqslant 1$, et $|t|<1$, on obtient :

$$\|R_n\|_\infty\leqslant\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right).$$

La série de fonctions $\sum u_k$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers S (*doc.* 12).



Doc. 12. *Convergence uniforme sur* $\mathbb{R}$ *de la série de fonctions.*

De plus, $\lim_{t\to+\infty}u_k(t)=(-1)^k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$. Donc, nous pouvons appliquer le *théorème d'interversion des limites*. On obtient :

- la convergence de la série numérique $\sum(-1)^k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$;
- $\lim_{x\to+\infty}S(x)=\sum_1^\infty(-1)^k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

$$S_{2n}=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$$
$$=\ln\left(\frac{3^2\,5^2\ldots(2n-1)^2(2n+1)}{2^2\,4^2\ldots(2n-2)^2(2n)^2}\right)=\ln\left(\frac{(2n+1)((2n)!)^2}{2^{4n}(n!)^4}\right).$$

Utilisons la formule de Stirling : $n!\sim n^{n+1/2}\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi}$, on en déduit :

$$S_{2p}\sim\ln\left(\frac{2}{\pi}\right).\quad\text{Donc}\quad\lim_{n\to+\infty}S_{2n}=\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{x\to+\infty}S(x)=\ln\left(\frac{2}{\pi}\right).$$

2.2. Le théorème d'interversion des limites (*PC*)

Théorème 11 : Théorème d'interversion des limites pour une série de fonctions

Soit (u_n) une suite de fonctions de $\mathcal{F}(I)$ et a adhérent à I. Si :

- la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur I vers S ;

Rapport Centrale, 2000

« Les théorèmes d'interversion (limites, séries, intégrale) sont évidemment à justifier avec soin. »

- chaque fonction u_n admet une limite b_n en a ;

alors :

- la série $\sum b_n$ converge vers un scalaire b ;
- la fonction somme S admet en a la limite b.

$$\lim_{x \to a} \left(\sum_0^{\infty} u_n(x) \right) = \sum_0^{\infty} \left(\lim_{x \to a} u_n(x) \right)$$

Rapport Mines-Ponts, 2001
« L'interversion des passages à la limite ou la justification de la convergence de la série sont mal traitées ou passées sous silence. »

La démonstration n'est pas exigible des candidats et nécessite des outils qui ne sont pas à notre programme.

Corollaire 11.1
Soit $\sum u_k$ une série de fonctions continues sur I, normalement convergente sur tout segment de I. Alors la fonction somme $S = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$ est continue sur I.

Rapport E3A, 2002
« Ils affirment que S est forcément continue, vu qu'une somme d'applications continues est continue. »

▸ ***Pour s'entraîner : ex. 10 et 11.***

Application 4

Les fonctions ζ et μ

1) *Montrer que* $\lim_{x \to 0} \mu(x) = \dfrac{1}{2}$.

2) *Calculer* $\mu(1)$.

3) *Donner* $\lim_{x \to +\infty} \zeta(x)$ *et* $\lim_{x \to +\infty} \mu(x)$.

4) *Montrer que :* $\exists a \in \mathbb{R} \quad \zeta(x) \sim_{1^+} \dfrac{a}{x-1}$ *et préciser* a.

5) *Retrouver ce résultat en utilisant la relation établie entre* ζ *et* μ *dans le chapitre précédent.*

6) *Montrer la continuité des fonctions* ζ *et* μ *sur* $]1, +\infty[$.

7) *(PSI) Préciser le domaine de continuité de la fonction* μ.

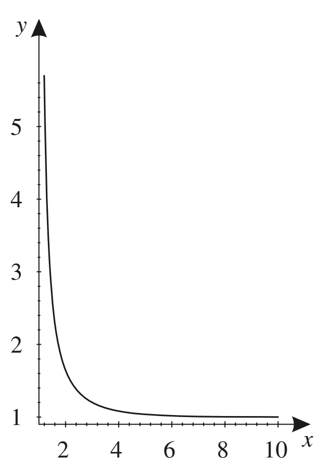
Rappelons que :

$$\zeta(x) = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

et :

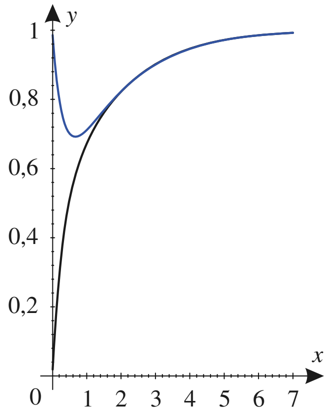
$$\mu(x) = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$$

et que ζ est définie sur $]1, +\infty[$ et μ sur $]0, +\infty[$.



Doc. 13. *La fonction* ζ.

```
> plot(Zeta(x),x=1..10);
```



Doc. 14. *La suite de fonctions converge vers la fonction* μ.

```
> restart;fn:=(n,x)->(-1)^(n+1)*n^(-x);
Sn:=(n,x)->sum((-1)^('k'+1)*'k'^(-x),
   'k'=1..n);
plot({Sn(27,x),Sn(28,x)},x=0.01..7);
```

$$fn := (n, x) \to (-1)^{(n+1)}\, n^{(-x)}$$
$$Sn := (n, x) \to \sum_{'k'=1}^{n} (-1)^{('k'+1)}\, 'k'^{(-x)}$$

1) Décalons les termes dans l'expression de $\mu(x)$.

$$\mu(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)^x}.$$

D'où :

$$-1 + 2\,\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left[\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}\right].$$

L'étude, sur $[1, +\infty[$, de la fonction :

$$u \mapsto \frac{1}{u^x} - \frac{1}{(u+1)^x}$$

permet d'appliquer le critère des séries alternées. Nous pouvons écrire :

$$0 \leqslant -1 + 2\,\mu(x) \leqslant 1 - \frac{1}{2^x}.$$

Puis, $\dfrac{1}{2} \leqslant \mu(x) \leqslant 1 - \dfrac{1}{2 \cdot 2^x}$. Donc :

$$\lim_{x \to 0} \mu(x) = \frac{1}{2}.$$

2) $\mu(1) = \displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2.$

3) De même, les séries de fonctions définissant les fonctions ζ et μ étant normalement convergentes sur l'intervalle $[2, +\infty[$, on peut appliquer pour chacune le théorème de la double limite et on obtient :

$$\lim_{x \to +\infty} \zeta(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \mu(x) = 1.$$

4) Procédons également en comparant $\dfrac{1}{n^x}$ à une intégrale. Soit $x > 1$ fixé.

$$\forall k \geqslant 2 \qquad \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}\,t}{t^x} \leqslant \frac{1}{k^x} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}\,t}{t^x}.$$

ce qui donne :

$$\frac{1}{-x+1}[(k+1)^{-x+1} - k^{-x+1}]$$
$$\leqslant \frac{1}{k^x} \leqslant \frac{1}{-x+1}[k^{-x+1} - (k-1)^{-x+1}].$$

D'où :

$$\frac{1}{x-1}[-(n+1)^{-x+1} + 1]$$
$$\leqslant \sum_{1}^{n} \frac{1}{k^x} \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}[-n^{-x+1} + 1].$$

Faisons tendre n vers $+\infty$, on obtient :

$$\frac{1}{x-1} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x-1},$$

d'où : $\zeta(x) \sim_1 \dfrac{1}{x-1}$.

5) Immédiat.

6) Il suffit de rappeler que les séries définissant ces fonctions convergent normalement sur tout segment de $]1, +\infty[$ et que la fonction : $x \mapsto \dfrac{1}{k^x}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ pour obtenir le résultat souhaité.

7) (*PSI*) Nous avons, dans l'*application* 2, établi la convergence uniforme, sur tout segment de $\mathbb{R}^{+*}$, de la série de fonctions définissant μ.

2.3. Extension

Dans ce paragraphe, les applications considérées sont définies sur une partie A de $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Nous admettrons que le théorème d'interversion des limites se généralise au cas d'une série de fonctions convergeant normalement sur A.

Théorème 12 : Théorème d'interversion des limites pour une série de fonctions

Soit (u_n) une suite de fonctions de $\mathcal{F}(A)$ et a adhérent à A. Si :

- la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur A vers S ;
- chaque fonction u_n admet une limite b_n en a ;

alors :

- la série $\sum b_n$ converge vers un scalaire b ;
- la fonction somme S admet en a la limite b.

$$\lim_{x \to a} \left(\sum_0^{\infty} u_n(x) \right) = \sum_0^{\infty} \left(\lim_{x \to a} u_n(x) \right)$$

Le choix d'une partie A de $\mathbb{C}$ a été dicté par la nécessité d'étudier plus loin la continuité de fonctions sommes de séries entières sur le disque ouvert de convergence.

Corollaire 12.1

Soit $\sum u_k$ une série de fonctions continues sur A, normalement convergente sur tout compact de A. Alors la fonction somme $S = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$ est continue sur A.

Exemple

Nous avons établi que la série de fonctions $\sum \frac{z^n}{n!}$ est normalement convergente sur tout compact de $\mathbb{C}$. C'est une série de fonctions continues sur $\mathbb{C}$, donc la fonction somme, l'**exponentielle**, est continue sur $\mathbb{C}$.

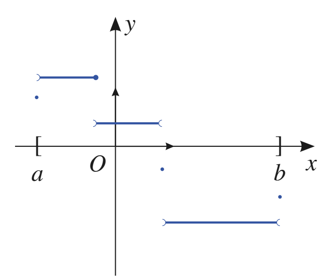
3 Approximations

Dans ce paragraphe, les fonctions considérées sont définies sur $\mathbb{R}$ ou sur un segment de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

3.1. Fonctions en escalier

On appelle **subdivision** d'un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, toute suite finie et croissante de points de $[a, b]$, $(x_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$, telle que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

On appelle **fonction en escalier** sur $[a, b]$, toute fonction f à valeurs dans $\mathbb{K}$, définie sur $[a, b]$, pour laquelle il existe une subdivision $(x_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ de $[a, b]$, telle que la restriction de f à chaque $]x_i, x_{i+1}[$ $(i \in [\![0, n-1]\!])$ soit une fonction constante (*doc.* 15).



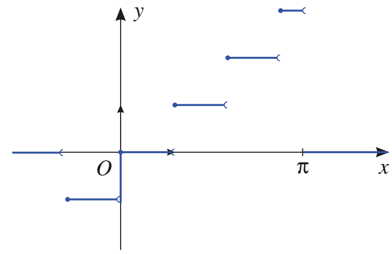
Doc. 15. *Fonction en escalier sur* $[a, b]$.

L'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{K})$. Cet espace vectoriel est noté $\mathcal{E}sc([a, b], \mathbb{K})$.

Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ est dite en escalier sur $\mathbb{R}$ s'il existe un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ tel que $f_{|[a,b]}$ soit en escalier sur $[a, b]$ et $f_{|\mathbb{R}-[a,b]}$ soit nulle.

Exemple : La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -1 \\ \mathrm{E}(x) & \text{si} \quad -1 \leqslant x < \pi \\ 0 & \text{si} \quad \pi \leqslant x. \end{cases}$$



Doc. 16. *Fonction en escalier sur* $\mathbb{R}$.

3.2. Fonctions continues par morceaux

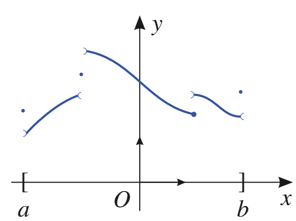
On appelle **fonction continue par morceaux** sur $[a, b]$, toute fonction f à valeurs dans $\mathbb{K}$, définie sur $[a, b]$ pour laquelle il existe une subdivision $(x_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ de $[a, b]$, telle que la restriction de f à chaque $]x_i, x_{i+1}[$ $(i \in [\![0, n-1]\!])$ puisse se prolonger en une fonction continue sur $[x_i, x_{i+1}]$. Une telle subdivision est appelée **subdivision adaptée** à la fonction f.

Rapport X-ESPCI, 2001
« Les difficultés proviennent ... de la continuité par morceaux. »

L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$. Cet espace vectoriel est noté $\mathcal{CM}([a, b])$.

Une fonction f d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ est dite **continue par morceaux sur I** si sa restriction à tout segment contenu dans I est continue par morceaux. L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de I dans $\mathbb{K}$. Cet espace vectoriel est noté $\mathcal{CM}(I)$.

Exemple : La fonction partie entière, E, est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.



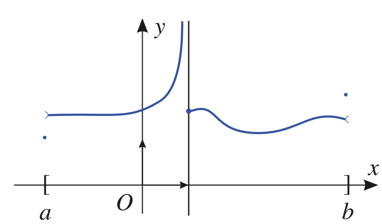
Doc. 17. *Fonction continue par morceaux sur* $[a, b]$.

3.3. Approximation uniforme des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$

Théorème 13 (Théorème d'approximation)

Toute fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$, peut être approchée uniformément par des fonctions en escalier sur $[a, b]$:

$$\forall f \in \mathcal{CM}([a, b]) \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists g \in \mathcal{E}sc([a, b]) \quad \| f - g \|_\infty \leqslant \varepsilon.$$



Doc. 18. *Fonction non continue par morceaux sur* $[a, b]$.

Démonstration

(*PSI*) Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. Fixons un réel $\varepsilon > 0$ et notons A l'ensemble des c de $[a, b]$ tels que f puisse être approchée uniformément sur $[a, c]$, à ε près, par des fonctions en escalier sur $[a, c]$. A est une partie non vide de $\mathbb{R}$, majorée par b. Elle possède une borne supérieure M. Montrons que : $M = b$.

Posons $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

$$\exists \alpha > 0 \ \forall x \in]a, a+\alpha[\ |f(x) - l| \leqslant \varepsilon$$

La fonction g définie sur $[a, a+\alpha]$ par : $g(a) = f(a)$ et $\forall x \in]a, a+\alpha]$ $g(x) = l$ est en escalier sur $[a, a+\alpha]$ et approche uniformément f à ε près sur cet intervalle. Donc : $M \geqslant a + \alpha$. Si $a < M < b$, un raisonnement analogue, construit avec les limites à gauche et à droite de f en M, permet de montrer l'existence de $\beta > 0$ tel que f soit approchée uniformément à ε près sur $[a, M+\beta]$ par une fonction en escalier sur cet intervalle. Donc : $M = b$.

La démonstration est hors programme en *PC*

Généralisation : Si E est un espace vectoriel de dimension finie, on définit de manière analogue la notion de fonction en escalier, de fonction continue par morceaux de $[a, b]$ dans E. Le théorème ci-dessus est encore vérifié. Sa justification repose sur le fait que les fonctions coordonnées d'une fonction continue par morceaux à valeurs dans E sont continues par morceaux.

(*PSI*) Ce *théorème* signifie que toute fonction de $\mathcal{CM}([a, b])$ est la limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier sur $[a, b]$:

$$\forall f \in \mathcal{CM}([a, b]) \quad \exists (f_n) \in (\mathcal{E}\mathrm{sc}[a, b])^{\mathbb{N}} \quad \lim_{n \to +\infty} \| f - f_n \|_\infty = 0.$$

3.4. Approximation uniforme des fonctions continues sur [a, b] par des fonctions polynomiales

Théorème 14 : Premier théorème de Weierstrass

Toute fonction numérique, continue sur un segment $[a, b]$, peut être approchée uniformément sur $[a, b]$ par des fonctions polynomiales sur $[a, b]$.

La démonstration de ce *théorème* et celle du *théorème* suivant sont hors programme.

Exemple : Considérons la fonction **exponentielle**, un réel $a > 0$ et les fonctions polynômes P_n définies par $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

Pour tout x dans $[-a, a]$ $|\exp(x) - P_n(x)| \leqslant \sum_{n+1}^{+\infty} \frac{a^k}{k!}$.

Si $\varepsilon > 0$ est fixé, il existe n tel que $\forall x \in [-a, a]$ $|\exp(x) - P_n| \leqslant \varepsilon$.

► ***Pour s'entraîner : ex. 13 et 14.***

3.5. Approximation uniforme des fonctions continues sur [a, b] par des polynômes trigonométriques

On appelle fonction **polynôme trigonométrique** toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, combinaison linéaire des fonctions $e_k : (t \mapsto e^{ikt})$, où k est un entier relatif.

Vous vérifierez sans difficulté que toute fonction polynôme trigonométrique est combinaison linéaire, à coefficients complexes, des fonctions :

$$c_k : t \mapsto \cos(kt)\ (k \in \mathbb{N}) \quad \text{et} \quad s_k : t \mapsto \sin(kt)\ (k \in \mathbb{N}^*).$$

Inversement, toute combinaison linéaire de fonctions c_k et s_k est une fonction polynôme trigonométrique.

*Ce théorème, publié en 1885 par **Weierstrass**, fut généralisé, en 1937, par l'américain **Stone**, aux fonctions à valeurs réelles ou complexes continues sur un compact de $\mathbb{R}$.*

Théorème 15 : Second théorème de Weierstrass

Toute fonction à valeurs complexes, continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, peut être approchée uniformément par des polynômes trigonométriques.

Exemple

Le cours sur les séries de Fourier permet de prouver que la fonction Arccos (cos) peut être approchée uniformément sur $\mathbb{R}$ par la suite des polynômes trigonométriques :

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{N} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}.$$

Si f a pour période $T > 0$, on substitue $e^{in2\pi t/T}$ à e^{int}. Nous reverrons ceci dans le *chapitre* sur les séries de Fourier. Dans ce chapitre, nous verrons également une application importante de ce *théorème*.

FICHE MÉTHODE

- L'**étude d'une suite** (ou d'une série) de fonctions commence le plus souvent par celle de la convergence simple. On fixe la variable x et on étudie la suite (ou la série) numérique associée.

- Pour **étudier la convergence normale** d'une série de fonctions bornées sur I, on essaye de majorer $|u_n(x)|$ par le terme général α_n ne dépendant pas de x d'une série convergente :

$$\forall x \in I \ \ |u_n(x)| \leqslant \alpha_n \quad \text{et} \quad \sum \alpha_n \text{ converge.}$$

- Pour montrer qu'une **fonction S, somme d'une série de fonctions $\sum u_n$, est continue** sur I, il suffit d'établir que :
  - les fonctions u_n sont continues sur I ;
  - la convergence de la série $\sum u_n$ vers S est normale (ou uniforme (*PSI*)) sur tout segment de I.

Programme *PSI*

- La **convergence uniforme d'une suite** (ou d'une série) de fonctions est l'étude de la convergence dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{B}(I), \| \ \|_\infty)$.

- Pour **étudier la convergence uniforme** d'une suite de fonctions bornées sur I, on peut :
  - chercher à majorer $|f_n(x) - f(x)|$ par un réel a_n ne dépendant pas de x et tendant vers 0 lorsque n tend vers l'infini ;
  - faire l'étude, n étant fixé, de la fonction $f_n - f$, dans le but de déterminer $\|f_n - f\|_\infty$.

- Lorsque les fonctions f_n ne sont pas bornées sur I, ou lorsque la suite de fonctions ne converge pas uniformément sur I, on peut chercher à **établir la convergence uniforme** sur tout segment de I.

- Pour **étudier la convergence uniforme d'une série $\sum u_n$ de fonctions bornées sur I :**
  - si la série numérique $\sum u_n(x)$ vérifie, pour tout x, le critère spécial des séries alternées, on majore le reste $|R_n(x)|$ par $|u_{n+1}(x)|$, puis on tente de majorer $|u_{n+1}(x)|$ par un réel a_n ne dépendant pas de x et tendant vers 0 lorsque n tend vers l'infini ;
  - sinon, on peut essayer de prouver la convergence normale de la série de fonctions.

- Pour montrer qu'une **fonction f, limite d'une suite de fonctions (f_n), est continue** sur I, il suffit d'établir que :
  - les fonctions f_n sont continues sur I ;
  - la convergence de la suite (f_n) vers f est uniforme sur tout segment de I.

TD

Polynômes d'interpolation de Lagrange et convergence

(*D'après ENSI, 1990.*)

Dans tout cet exercice, n désigne un entier naturel non nul, $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant n$, a et b deux réels tels que : $a < b$ et $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $n+1$ réels distincts tels que : $a \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leqslant b$. f est une fonction continue sur $[a,b]$.

1) Donner l'expression du polynôme P_n de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que, pour tout j de $[\![0,n]\!]$: $P_n(x_j) = f(x_j)$.

Nous allons étudier la convergence de la suite (P_n) dans deux cas particuliers.

A) Premier exemple : f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a,b]$ et toutes les dérivées de f sont bornées sur $[a,b]$ par une même constante réelle M.

1) x étant un réel de $[a,b]$ différent de tous les x_j, on note φ la fonction définie sur $[a,b]$ par :

$$\varphi(u) = f(u) - P_n(u) - \frac{f(x) - P_n(x)}{q_n(x)} q_n(u),$$

où q_n est le polynôme défini par $q_n(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$.

En utilisant plusieurs fois le *théorème de Rolle*, montrer qu'il existe un réel v de $[a,b]$ tel que :

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(v)}{(n+1)!} q_n(x).$$

2) Pour chaque entier $n \geqslant 1$, on choisit arbitrairement les réels $x_0, x_1, \ldots, x_n$ tels que :

$$a \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leqslant b$$

et on définit ainsi une suite de fonctions polynômes (P_n).

Montrer que la suite de fonctions (P_n) approche uniformément f sur $[a,b]$.

Donner un exemple pour f et $[a,b]$.

B) Second exemple : La fonction f est définie sur $[-1,1]$ par $f(x) = |x|$ et, pour tout entier j de $[\![0,n]\!]$, on pose :

$$x_j = -1 + \frac{2j}{n+1}.$$

1) p et q étant des entiers naturels tels que $0 \leqslant p < q$, montrer :

$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{q}{k} \frac{q-2k-1}{k+1} = 1 + (-1)^p \binom{q-1}{p} \frac{q-2p-2}{p+1} \qquad \textbf{(1)}$$

m désignant la partie entière de $\frac{n}{2}$, on pose :

$$A(n) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{n-2k-1}{k+1} \quad \text{et} \quad B(n) = \sum_{k=m+1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{n-2k-1}{k+1}.$$

2) Montrer que $P_n(1) = A(n) - B(n)$.

3) Calculer $A(n) + B(n)$ et en déduire $P_n(1)$ en fonction de n et de m.

4) Calculer $P_n(1)$ lorsque n est pair.

5) Calculer $P_n(1)$ lorsque n est impair.

Donner alors un équivalent en $+\infty$ de $|f(1) - P_n(1)|$.

6) En déduire que la suite (P_n) n'est pas simplement convergente sur $[-1,1]$.

Exercice résolu

La série de fonctions $\sum \dfrac{1}{\mathrm{sh}\,(nx)}$

ÉNONCÉ

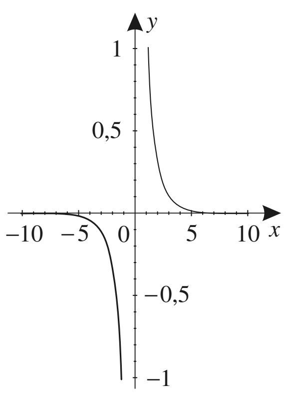
On considère la série de fonctions $\sum u_n$ où, pour $n > 0$, u_n est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $u_n(x) = \dfrac{1}{\mathrm{sh}\,(n\,x)}$.

1) Donner le domaine de définition de la fonction somme $S = \displaystyle\sum_1^{+\infty} u_n$. Etudier la convergence normale.

2) Donner un équivalent en 0 et en $+\infty$ de S.

CONSEILS

Regarder le domaine de convergence simple de la série de fonctions.




```
> plot(sum('1/sinh(n*x)',
         'n'=1..100),
         x=-10..10,y=-1..1) ;
```

Utiliser la décroissance de la fonction positive $t \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{sh}\,(tx)}$ pour encadrer son intégrale sur $[n, n+1]$ et comparer $S(x)$ à une intégrale.

SOLUTION

1) Étudions d'abord la convergence simple de la série de fonctions. Soit x fixé, strictement positif. $u_n(x) \sim 2\mathrm{e}^{-n\,x}$. La série numérique $\sum \mathrm{e}^{-n\,x}$ est une série géométrique de raison e^{-x}. La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Précisons le mode de convergence de la série de fonctions.

Si n est un naturel non nul fixé, la fonction $x \mapsto \mathrm{sh}\,(n\,x)$ est croissante sur $\mathbb{R}^{+}$, de 0 à $+\infty$. La fonction u_n n'est pas bornée sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Considérons un réel $a > 0$. $\|u_{n|[a,+\infty[}\|_\infty = \dfrac{1}{\mathrm{sh}\,(n\,a)}$. La convergence de la série numérique $\sum \dfrac{1}{\mathrm{sh}\,(n\,a)}$ entraîne la convergence normale (donc uniforme) de la série de fonctions sur $[a, +\infty[$.

2) • Si $x > 0$:

$$\int_1^{N+1} \frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{sh}\,(t\,x)} \leqslant \sum_1^N \frac{1}{\mathrm{sh}\,(n\,x)} \leqslant \frac{1}{\mathrm{sh}\,(x)} + \int_1^N \frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{sh}\,(t\,x)}.$$

Calculons, pour $0 < a < b$ et $x > 0$, $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{sh}\,(t\,x)}$.

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{sh}\,(t\,x)} = \frac{1}{x}\int_{a\,x}^{b\,x} \frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{sh}\,(u)} = \frac{1}{x}\int_{a\,x}^{b\,x} \frac{\mathrm{d}\,u}{2\mathrm{th}\left(\frac{u}{2}\right)\mathrm{ch}^2\left(\frac{u}{2}\right)}$$

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{sh}\,(t\,x)} = \frac{1}{x}\left[\ln\left(\mathrm{th}\left(\frac{u}{2}\right)\right)\right]_{a\,x}^{b\,x} = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{\mathrm{th}\left(\frac{b\,x}{2}\right)}{\mathrm{th}\left(\frac{a\,x}{2}\right)}\right).$$

Puis :

$$\frac{1}{x}\ln\left(\frac{\mathrm{th}\left(\frac{(N+1)\,x}{2}\right)}{\mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right)}\right) \leqslant \sum_1^N \frac{1}{\mathrm{sh}\,(n\,x)} \leqslant \frac{1}{\mathrm{sh}\,(x)} + \frac{1}{x}\ln\left(\frac{\mathrm{th}\left(\frac{N\,x}{2}\right)}{\mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right)}\right)$$

Les termes de cette inégalité ont une limite lorsque N tend vers $+\infty$:

$$-\frac{1}{x}\ln\left(\mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \leqslant S(x) \leqslant \frac{1}{\mathrm{sh}\,(x)} - \frac{1}{x}\ln\left(\mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \qquad \textbf{(1)}$$

- De plus, lorsque x tend vers 0, on a :

$$\frac{1}{x}\ln\left(\mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \sim_0 \frac{1}{x}\ln\left(\frac{x}{2}\right) \sim_0 \frac{\ln(x)}{x} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\mathrm{sh}\,(x)} \sim_0 \frac{1}{x}.$$

Nous en déduisons, lorsque x tend vers 0 : $S(x) \sim_0 -\dfrac{\ln(x)}{x}$.

- $\dfrac{1}{\mathrm{sh}\,(x)} \sim_{+\infty} 2\mathrm{e}^{-x}$ et $\ln\left(\mathrm{th}\left(\dfrac{x}{2}\right)\right) \sim_{+\infty} \left(\mathrm{th}\left(\dfrac{x}{2}\right) - 1\right) \sim_{+\infty} -2\mathrm{e}^{-x}$.

Pour l'étude en $+\infty$, l'inégalité **(1)** ne suffit plus. Procédons plus finement en isolant $\dfrac{1}{\mathrm{sh}\,(x)}$.

$$\frac{1}{x}\ln\left(\frac{\mathrm{th}\left(\dfrac{(N+1)\,x}{2}\right)}{\mathrm{th}\,(x)}\right) \leqslant \sum_{2}^{N} \frac{1}{\mathrm{sh}\,(nx)} \leqslant \frac{1}{x}\ln\left(\frac{\mathrm{th}\left(\dfrac{N\,x}{2}\right)}{\mathrm{th}\left(\dfrac{x}{2}\right)}\right)$$

D'où :

$$\frac{1}{\mathrm{sh}\,(x)} - \frac{1}{x}\ln(\mathrm{th}\,(x)) \leqslant S(x) \leqslant \frac{1}{\mathrm{sh}\,(x)} - \frac{1}{x}\ln\left(\mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

Avec :

$$\frac{1}{\mathrm{sh}\,(x)} \sim 2\mathrm{e}^{-x}, \quad \frac{1}{x}\ln\left(\mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \sim -2\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}, \quad \frac{1}{x}\ln(\mathrm{th}\,(x)) \sim -2\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{x}.$$

Les deux derniers termes sont donc négligeables devant le premier. Nous en déduisons, lorsque x tend vers $+\infty$, $S(x) \sim 2\mathrm{e}^{-x}$.

Exercices

1 Soit (f_n) une suite de fonctions monotones convergeant simplement vers f sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Montrer que la fonction f est monotone.

2 (*PSI*) Étudier la convergence sur [0,1] de la suite de fonctions $f_n(x) = x^n(1-x)^n$.

3 (*PSI*) Construire, le plus simplement possible, une suite de fonctions en escalier convergeant uniformément sur $[0, \pi]$ vers la fonction sinus.

4 (*PSI*) Étudier la convergence de la suite de fonctions :

1) $f_n(x) = (\sin x)^n$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

2) $f_n(x) = n\,x^n(1-x^2)$ sur $[0,1]$.

3) $f_n(x) = \dfrac{(\ln x)^{2n} - 2}{(\ln x)^{2n} + 2}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

5 (*PSI*) Étude de la série de fonctions $\sum (-1)^n \dfrac{n+x^2}{n^2}$.

6 Soit la série de fonctions $\sum u_n$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$u_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{(n+1)} & \text{si } x \in [n\pi, (n+1)\pi[\\ 0 & \text{si } x \notin [n\pi, (n+1)\pi[\end{cases}$$

Étudier la convergence de cette série de fonctions.

7 Étudier la convergence simple, normale de la série de fonctions $\sum \dfrac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\ln n}$ (et uniforme en *PSI*).

8 (*PSI*) Peut-on trouver une suite de fonctions polynômes convergeant uniformément sur $]0,1]$ vers $\left(t \mapsto \dfrac{1}{t}\right)$?

9 (*PSI*) On considère la suite de fonctions (f_n) définies par :
$$f_n(x) = \exp(-x^n).$$
Étudier la convergence simple de la suite (f_n).
Est-elle uniforme sur $[a, +\infty[$ lorsque $0 < a < 1$?
Soit $a > 1$. Même question sur $[a, +\infty[$?

10 Calculer :

1) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \sum_1^\infty \frac{x^2}{(n+x)^2}$. **2)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sum_1^\infty \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n^2}$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sum_1^\infty \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n^2}$.

11 On pose $f(x) = \displaystyle\sum_1^\infty \frac{\cos(nx)}{n^{3/2}}$

Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

12 (*PSI*) Étudier l'ensemble D de définition de :

$$f(x) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^n}{2n+1}.$$

f est-elle continue sur D ? Déterminer $f(1)$.

13 Soit $a > 0$, f une fonction continue de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ et l un réel tels que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.

Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynôme P telle que la fonction, $\left(x \mapsto P\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$, approche uniformément f, à ε près sur $[a, +\infty[$.

14 Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on ait $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Montrer que f est la fonction nulle.

15 Soit la suite de fonctions (f_n) définie, sur $\mathbb{R}^{+*}$, par :

$$f_n(x) = n\,x^\alpha \mathrm{e}^{-nx^2}.$$

Étudier, selon les valeurs du réel α, la convergence de la série de fonctions $\sum f_n$.

16* (*PSI*) Soit (P_n) une suite de polynômes de $\mathbb{R}_p[X]$ ($p > 0$ fixé). On suppose que la suite de fonctions polynômes associée converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f.

1) Montrer que f est une fonction polynôme de degré $\leqslant p$ et que la convergence est uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}$.

2) Que dire si cette suite converge uniformément sur $\mathbb{R}$?

17 On considère la fonction définie par :

$$f(x) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^2} \operatorname{Arctan}(nx).$$

1) Donner son domaine de définition et de continuité.

2) Étudier ses limites aux bornes du domaine.

3) Donner un équivalent en $+\infty$ de $f(x) - \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Dérivation, intégration des fonctions vectorielles

5

Introduction

*Les paradoxes de Zénon d'Élée (*V^{e} *siècle av. J.-C.) posent le problème de la division à l'infini. La méthode d'exhaustion, mise au point par Eudoxe (*IV^{e} *siècle av. J.-C.) est utilisée de façon très fructueuse par Archimède (*III^{e} *siècle av. J.-C.) pour des calculs d'aires et de volumes. Les mathématiciens arabes (à partir du* IX^{e} *siècle ap. J.-C.) développent ces méthodes. Au* XI^{e} *siècle, al-Biruni conçoit les notions de vitesse et d'accélération.*

Faute de culture mathématique suffisante, ces travaux n'ont rencontré aucun écho en Europe avant le XVI^{e} *siècle. Les recherches de nombreux savants (Stevin, Kepler, Galilée, Cavalieri, Pascal, Fermat, Descartes...), aux* XVI^{e} *et* XVII^{e} *siècles, sur les centres de gravité, les mesures de volume, la tangente, la cycloïde,... préludent à la naissance, à la fin du* XVII^{e} *siècle, du calcul différentiel et intégral moderne. Progressivement, le support géométrique fait place aux notions abstraites de limite et d'infiniment petit.*

En 1696*, Guillaume de L'Hospital publie le premier livre de calcul infinitésimal. Ce puissant outil est mis au point par Newton* (1643-1727) *et Leibniz* (1646-1716) *avec des langages différents, mais les notations de Leibniz s'imposent. Il permet de résoudre des problèmes qui se ramènent à des équations différentielles.*

OBJECTIFS

- Dérivabilité en un point, fonction dérivable sur un intervalle.
- Opérations sur les fonctions dérivables.
- Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ ou $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur un intervalle.
- Intégrale d'une fonction vectorielle continue par morceaux sur un segment.
- Sommes de Riemann d'une fonction continue.
- Linéarité de l'intégrale, inégalité de la moyenne.
- Relation de Chasles, invariance par translation.
- Convergence en moyenne et en moyenne quadratique d'une suite ou d'une série de fonctions continues sur un segment.

Les fonctions étudiées dans ce chapitre sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point. Elles sont à valeurs dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). De telles fonctions seront dites à valeurs vectorielles (ou simplement vectorielles). Lorsque $E = \mathbb{K}$, ces fonctions seront dites à valeurs numériques (ou numériques). Nous noterons $\mathcal{F}(I, E)$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel de ces fonctions.

Soit I un intervalle d'extrémités a et b, avec $a < b$. L'ensemble des points de $]a, b[$ est appelé l'intérieur de I et ces points sont dits intérieurs à I. Un intervalle non vide et non réduit à un point est un intervalle d'intérieur non vide.

Si I n'est pas borné supérieurement, nous adopterons la notation $\sup I = +\infty$. De même, si I n'est pas borné inférieurement, $\inf I = -\infty$.

Isaac Newton (1643-1727), *physicien, mathématicien et astronome anglais.*

1 Dérivation

1.1. Fonction dérivable sur un intervalle

1.1.1 Définitions

1.1.1.1 *Dérivabilité en un point*

Soit x_0 un point de I et f une fonction de I dans E.

f est dite **dérivable** en x_0 de I si l'application de $I \setminus \{x_0\}$ dans E, définie par :

$$x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

admet une limite en x_0. Alors, la limite est appelée **dérivée** de f en x_0 et notée $f'(x_0)$ ou $\mathrm{D}f(x_0)$ ou encore $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$ et elle appartient à E.

Théorème 1

Soit x_0 un point de l'intervalle I et f une application de I dans E.
L'application f est dérivable en x_0 si, et seulement s'il existe une application ε de I dans E et un vecteur V de E tels que :

$$\forall x \in I \quad f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\, V + (x - x_0)\, \varepsilon(x) \text{ et } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0_E \quad \mathbf{(1)}$$

Lorsque f est dérivable, la propriété (**1**) s'écrit également :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\, f'(x_0) + o(x - x_0)$$

Théorème 2

Soit x_0 un point de l'intervalle I et f une application de I dans E.
Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.

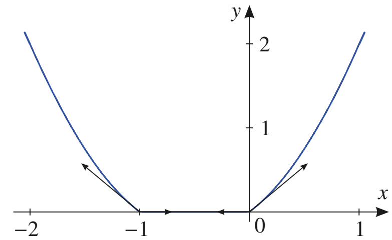
La réciproque est fausse.
La fonction valeur absolue fournit un contre-exemple.

1.1.1.2 *Dérivées à gauche, à droite*

Si x_0 est un point adhérent à I, différent de $\sup I$, on dit que f admet une dérivée à droite en x_0 si l'application de $I \setminus \{x_0\}$ dans E définie par : $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite à droite en x_0.

La limite est alors appelée **dérivée à droite** de f en x_0 et notée $f'_d(x_0)$ ou $\mathrm{D}f(x_0^+)$ ou encore $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0^+)$; elle appartient à E.

On définit de même la **dérivée à gauche**, notée $f'_g(x_0)$, $\mathrm{D}f(x_0^-)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0^-)$.



Doc. 1. *La fonction :*

$$\left(x \mapsto \max\left\{0, x + x^2\right\}\right)$$

est dérivable à droite et à gauche en -1 *et en* 0.

1.1.1.3 *Propriétés*

Les propriétés suivantes s'établissent sans peine :

1) Soit x_0 un point de I. Si f est dérivable à droite (respectivement à gauche) en x_0, alors f est continue à droite (respectivement à gauche) en x_0.

2) Soit x_0 un point intérieur à I. Si f est dérivable à droite et à gauche en x_0, alors f est continue en x_0.

3) Soit x_0 un point intérieur à I. f est dérivable en x_0 si, et seulement si :

- f est dérivable à droite en x_0 ;
- f est dérivable à gauche en x_0 ;
- $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Rapport TPE, 1997

« Les candidats rencontrent de plus en plus de difficultés en calcul : calcul de dérivées, de primitives, décomposition en éléments simples, voire même calcul algébrique élémentaire. »

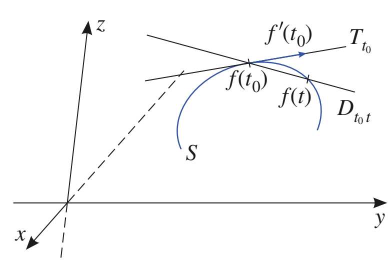
S'entraîner à calculer des dérivées.

1.1.2 Interprétations géométrique et cinématique de la dérivation

1.1.2.1 *Interprétation géométrique*

L'étude des courbes est développée dans le volume *Algèbre-Géométrie*.

Soit (I, f, S) une courbe de E et t_0 un point intérieur à I. Supposons f dérivable et de dérivée non nulle au point t_0 de I.
La courbe admet au point $f(t_0)$ une tangente qui est la droite affine $T_{t_0} = f(t_0) + \mathbb{R}\, f'(t_0)$. Cette droite est la position limite de la sécante $D_{t_0\, t}$ lorsque t tend vers t_0 (*doc.* 2).



Doc. 2. *La droite affine :*

$$T_{t_0} = f(t_0) + \mathbb{R}\, f'(t_0)$$

est tangente à la courbe (I, f, S) *au point* $f(t_0)$ *lorsque* $f'(t_0) \neq 0_E$.

1.1.2.2 *Interprétation cinématique*

La cinématique du point permet de donner l'interprétation suivante à l'étude d'une courbe (I, f, S).

Le paramètre t est appelé le **temps** ; il varie dans l'intervalle I.

Le support S de la courbe est la **trajectoire** du point mobile dont on étudie le mouvement.

La fonction f est la **loi horaire du mouvement**.

La **vitesse moyenne** du point mobile sur sa trajectoire S entre les instants t et t_0 est :

$$\frac{\| f(t) - f(t_0)\|}{|t - t_0|} = \left\| \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \right\|.$$

La limite en t_0 de la fonction numérique $\left(t \mapsto \left\| \dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \right\| \right)$, lorsqu'elle existe, est la **vitesse instantanée** du point mobile à l'instant t_0.

Rapport Mines-Ponts, 2001

« Confusion entre continuité et dérivabilité. »

Rapport E3A, 2002

« ...oubliant malheureusement souvent la justification de l'existence des dérivées. »

La limite en t_0 de la fonction vectorielle $\left(t \mapsto \dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}\right)$, lorsqu'elle existe, est le vecteur dérivé $f'(t_0)$. Il est appelé **vecteur vitesse** du point mobile à l'instant t_0.

On remarque que si f est dérivable en t_0, alors la vitesse instantanée du point mobile en t_0 est la norme du vecteur vitesse en ce point.

Rapport Centrale, 2000

« Ce n'est pas parce qu'on a pu calculer la dérivée d'une fonction que celle-ci est dérivable, mais parce que la fonction est dérivable qu'on peut calculer sa dérivée. »

▶ ***Pour s'entraîner : ex. 1.***

1.1.3 Fonction dérivable sur un intervalle

Une fonction dérivable en tout point de l'intervalle I est dite dérivable sur I.

Lorsque f est dérivable sur I, on peut définir la **fonction dérivée** de f :

$$\mathrm{D}f = f' : \begin{cases} I & \to & E \\ x & \mapsto & f'(x) \end{cases}$$

L'**égalité** des accroissements finis n'est valable que pour les fonctions à valeurs réelles. Nous verrons l'**inégalité** des accroissements finis pour les fonctions à valeurs vectorielles. Dans l'*application* qui suit, nous démontrons cette inégalité dans le cas particulier d'une fonction à valeurs dans un espace euclidien.

Application 1

Inégalité des accroissements finis dans un espace euclidien

Soit $(E, \langle\ |\ \rangle)$ *un espace euclidien,* $\|\ \|$ *la norme associée à* $\langle\,|\,\rangle$ *et* $[a, b]$ *un segment d'intérieur non vide de* $\mathbb{R}$.

Montrer que si f *est une application de* $[a, b]$ *dans* E, *continue sur* $[a, b]$ *et dérivable sur* $]a, b[$, *alors :*

$$\exists c \in\,]a, b[\quad \|f(a) - f(b)\| \leqslant (b - a)\|f'(c)\|$$

Définissons l'application Φ :

$$\Phi : \begin{cases} [a, b] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \langle f(b) - f(a) \mid f(t)\rangle \end{cases}$$

Φ est à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$; on peut donc lui appliquer le théorème des accroissements finis :

$$\exists c \in\,]a, b[\quad |\Phi(b) - \Phi(a)| = (b - a)|\Phi'(c)|.$$

Par définition de Φ, nous obtenons :

$$\exists c \in\,]a, b[\quad \langle f(b) - f(a) \mid f(b) - f(a)\rangle$$
$$= (b - a)\,|\langle f(b) - f(a) |\, f'(c)\rangle|.$$

Et grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$\exists c \in\,]a, b[$

$$\|f(b) - f(a)\|^2 \leqslant (b - a)\,\|f(b) - f(a)\|\,\|f'(c)\|$$

L'inégalité recherchée en découle.

1.2. Opérations sur les fonctions dérivables

1.2.1 Linéarité de la dérivation

Théorème 3

Soit f et g deux applications de I dans E, dérivables sur l'intervalle I, et α et β deux scalaires.

L'application $\alpha f + \beta g$ est dérivable sur I et, de plus :

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$$

Rapport E3A, 2002

« Une minorité invoque la linéarité de la dérivation. »

1.2.2 L'espace vectoriel $\mathcal{C}^1(I, E)$

Les fonctions f dérivables sur I dont la dérivée f' est continue sur I sont dites **continûment dérivables** ou de **classe $\mathcal{C}^1$** sur I. L'ensemble de ces fonctions est noté $\mathcal{C}^1(I, E)$.

Rappelons que $\mathcal{C}(I, E)$ ou $\mathcal{C}^0(I, E)$ désigne l'ensemble des applications continues de I dans E.

► ***Pour s'entraîner : ex. 2.***

Théorème 4

- $\mathcal{C}^1(I, E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(I, E)$.
- L'application D de $\mathcal{C}^1(I, E)$ dans $\mathcal{C}^0(I, E)$, définie par $D(f) = f'$ est linéaire.

1.2.3 Composée d'une application linéaire et d'une application dérivable

Théorème 5

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, u une application linéaire de E dans F, f une application de I dans E et x_0 un point de I.

- Si f est dérivable en x_0, alors l'application $u \circ f$ est dérivable en x_0 et :
$$(u \circ f)'(x_0) = u\big(f'(x_0)\big)$$
- Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, alors $u \circ f$ l'est aussi et :
$$(u \circ f)' = u \circ f'$$

Démonstration

Si f est dérivable en x_0, il existe une application ε de I dans E telle que :
$$\forall x \in I \quad f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\, f'(x_0) + (x - x_0)\, \varepsilon(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0_E.$$
Par conséquent :
$$\forall x \in I \quad u \circ f(x) = u \circ f(x_0) + (x - x_0)\, u\big(f'(x_0)\big) + (x - x_0) u\big(\varepsilon(x)\big).$$
De plus, toute application linéaire entre espaces vectoriels normés de dimension finie est continue, donc $\lim_{x \to x_0} u\big(\varepsilon(x)\big) = 0_F$.

1.2.4 Dérivation composante par composante

Dans ce paragraphe, on note $B = (e_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ une base de E.

Pour tout i de $[\![1, p]\!]$, on considère l'application ***i*-ième coordonnée dans la base *B*** (on dit aussi ***i*^{e} composante**), notée e_i^* :
$$e_i^* : \begin{cases} E & \to & \mathbb{K} \\ v = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \alpha_j\, e_j & \mapsto & e_i^*(v) = \alpha_i \end{cases}$$

On constate que e_i^* est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Pour toute application f de I dans E et tout i de $[\![1, p]\!]$, on note $f_i = e_i^* \circ f$. L'application f peut s'écrire :

$$f : \begin{cases} I & \rightarrow & E \\ x & \mapsto & f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} f_i(x)\, e_i \end{cases}$$

Les applications f_i, de I dans $\mathbb{K}$, sont appelées les **applications coordonnées** ou **applications composantes** de f relatives à la base B.

Théorème 6

Soit $B = (e_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ une base de l'espace vectoriel E, x_0 un point de l'intervalle I et f une application de I dans E.

• f est dérivable en x_0 si, et seulement si, les applications coordonnées de f relatives à la base B sont dérivables en x_0. Alors :

$$f'(x_0) = \sum_{i=1}^{p} f_i'(x_0)\, e_i .$$

• Lorsque f est dérivable sur I, les applications coordonnées de f' sont les dérivées des applications coordonnées de f :

$$\forall x \in I \quad f'(x) = \sum_{i=1}^{p} f_i'(x)\, e_i .$$

• f est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans E si, et seulement si, chaque application coordonnée de f est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{K}$.

Corollaire 6.1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f une application continue de I dans E, dérivable sur l'intervalle $\overset{\circ}{I} = \,]\inf I, \sup I[$.

Alors f est constante sur I si, et seulement si, pour tout x de cet intervalle $f'(x) = 0_E$.

Le *théorème des accroissements finis* appliqué à chaque application coordonnée de f permet de prouver ce corollaire.

Le cas des fonctions à valeurs complexes

Soit f une application de I dans $\mathbb{C}$. Les fonctions $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ et $\overline{f}$ sont définies sur I par :

$$\operatorname{Re} f(x) = \operatorname{Re}\big(f(x)\big) \; ; \quad \operatorname{Im} f(x) = \operatorname{Im}\big(f(x)\big); \quad \overline{f}(x) = \overline{f(x)}.$$

La famille $(1, \mathrm{i})$ est une base de $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, et les fonctions $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont les applications coordonnées de f dans cette base.

Corollaire 6.2
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{C}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
- f est dérivable sur I ;
- $\mathrm{Re} f$ et $\mathrm{Im} f$ sont dérivables sur I ;
- $\overline{f}$ est dérivable sur I.

Lorsqu'elles sont vérifiées, on a :

$$\mathrm{D}f = \mathrm{D}(\mathrm{Re}\, f) + \mathrm{i}\,\mathrm{D}(\mathrm{Im} f),$$
$$\mathrm{D}\left(\overline{f}\right) = \overline{\mathrm{D}f} = \mathrm{D}(\mathrm{Re} f) - \mathrm{i}\mathrm{D}(\mathrm{Im} f).$$

Corollaire 6.3
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{C}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ;
- $\mathrm{Re} f$ et $\mathrm{Im} f$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ;
- $\overline{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

1.2.5 Composée d'une application bilinéaire et de deux applications dérivables

Théorème 7
Soit E, F et G trois espaces vectoriels de dimensions finies, I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une application de I dans E, g une application de I dans F et B une application bilinéaire de $E \times F$ dans G.
On définit l'application $B(f,g)$ de I dans G en posant :

$$B(f,g) : \begin{cases} I & \to & G \\ x & \mapsto & B(f,g)(x) = B(f(x), g(x)) \end{cases}$$

• Si f et g sont dérivables au point x_0 de I, alors l'application $B(f,g)$ est dérivable en x_0 et :

$$B(f,g)'(x_0) = B\big(f'(x_0), g(x_0)\big) + B\big(f(x_0), g'(x_0)\big).$$

• Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, alors $B(f,g)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et :
$$B(f,g)' = B(f',g) + B(f,g').$$

Démonstration

• La dérivabilité de f et de g en x_0 se traduit par l'existence des applications ε_1 et ε_2, définies sur I, à valeurs dans E et F respectivement et telles que :

$$\forall x \in I \quad f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon_1(x) = 0_E$$
$$\forall x \in I \quad g(x) = g(x_0) + (x - x_0) g'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon_2(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon_2(x) = 0_F$$

On en déduit, pour tout x de I :

$$B(f,g)(x) = B\big(f(x_0), g(x_0)\big) + (x-x_0)\Big[B\big(f'(x_0), g(x_0)\big) + B\big(f(x_0), g'(x_0)\big)\Big] + (x-x_0)\varepsilon(x)$$

Avec :

$$\varepsilon(x) = (x-x_0)B\big(f'(x_0), g'(x_0)\big) + B\big(\varepsilon_1(x), g(x_0) + (x-x_0)g'(x_0) + (x-x_0)\varepsilon_2(x)\big) + B\big(f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + (x-x_0)\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x)\big)$$

Or, toute application bilinéaire entre espaces vectoriels normés de dimension finie est continue. De plus :

$$B\big(0_E, g(x_0)\big) = B\big(f(x_0), 0_F\big) = 0_G.$$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0_G$. Le théorème en découle.

1.3. Exemples

■ Soit $f_1, \dots, f_n$ n applications de I dans $\mathbb{K}$, dérivables sur I et g l'application produit :

$$g : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & g(x) = f_1(x)\, f_2(x) \dots f_n(x). \end{array}$$

On montre par récurrence que l'application g est dérivable sur I et que :

$$g'(x) = \sum_{k=1}^{n} f_1(x) \dots f_{k-1}(x)\, f_k'(x)\, f_{k+1}(x) \dots f_n(x)$$

■ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, f une application dérivable de I dans E et φ une application dérivable de I dans $\mathbb{K}$. Alors, l'application $\varphi f : \begin{cases} I & \to & E \\ x & \mapsto & (\varphi f)(x) = \varphi(x)\, f(x) \end{cases}$ est dérivable sur I et $(\varphi f)' = \varphi' f + \varphi f'$.

Il suffit, pour prouver ceci, de considérer l'application bilinéaire :

$$B : \begin{cases} \mathbb{K}\times E & \to & E \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda x \end{cases}.$$

■ Soit $(E, \langle\,|\,\rangle)$ un espace préhilbertien de dimension finie, f et g deux applications dérivables de I dans E.

Définissons l'application $\langle f \mid g\rangle$ en posant :

$$\langle f \mid g\rangle : \begin{cases} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \langle f|g\rangle(x) = \langle f(x)|g(x)\rangle \end{cases}$$

Le produit scalaire étant une application bilinéaire de $E\times E$ dans $\mathbb{K}$, l'application $\langle f \mid g\rangle$ est dérivable sur I et $\langle f \mid g\rangle' = \langle f' \mid g\rangle + \langle f \mid g'\rangle$.

En particulier, l'application :

$$\langle f \mid f\rangle : \begin{cases} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \langle f \mid f\rangle(x) = \langle f(x) \mid f(x)\rangle = \| f(x)\|^2 \end{cases}$$

est dérivable sur I et de dérivée $\langle f \mid f\rangle' = 2\langle f \mid f'\rangle$.

On sait que la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. Supposons que la fonction f ne s'annule pas sur I, alors la fonction $\langle f \mid f\rangle$ est strictement positive.

Notons $f(t) = \overrightarrow{OM}(t)$. Choisissons une autre origine A :

$\forall t \in I$
$f(t) = \overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}(t)$

Le vecteur $\overrightarrow{OA}$ est constant, donc :

$\forall t \in I$
$$f'(t) = \frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\,t}(t) = \frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{AM}}{\mathrm{d}\,t}(t)$$

Donc, le vecteur vitesse du point mobile M sur sa trajectoire ne dépend pas de l'origine utilisée pour effectuer les calculs. C'est pourquoi on le note souvent $\dfrac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}\,t}(t)$.

Le *théorème de dérivation des fonctions composées* vous permettra de prouver que la fonction $\| f \|$ est dérivable sur I et que $\| f \|' = \dfrac{\langle f \mid f' \rangle}{\| f \|}$.

■ De l'exemple précédent, on déduit le résultat géométrique suivant :

Soit $(E, \langle \mid \rangle)$ un espace vectoriel euclidien, $f \in \mathcal{C}^1(I, E)$ et $R \in \mathbb{R}^{+*}$.

On note $\| \ \|$ la norme sur E associée à $\langle \mid \rangle$ et on suppose que :

$$\forall t \in I \quad \| f(t) \| = R.$$

L'application $(t \mapsto \langle f(t) \mid f(t) \rangle)$ est constante sur I, donc sa dérivée est nulle :

$$\forall t \subset I \quad \langle f(t) \mid f'(t) \rangle = 0.$$

On vient de prouver que, si la courbe (I, f, S) de l'espace euclidien E a son support S tracé sur la sphère de centre 0_E et de rayon R, alors pour tout point t de I, les vecteurs $f(t)$ et $f'(t)$ sont orthogonaux (*doc.* 3).

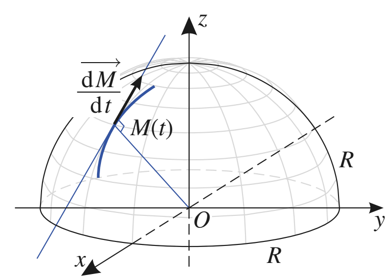
■ Dans cet exemple, $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure canonique d'espace vectoriel euclidien orienté et $\wedge$ désigne le produit vectoriel sur $\mathbb{R}^3$.

Soit f et g deux applications dérivables de I dans $\mathbb{R}^3$. On définit $f \wedge g$ en posant :

$$f \wedge g : \begin{cases} I & \rightarrow \quad \mathbb{R}^3 \\ x & \mapsto \quad (f \wedge g)(x) = f(x) \wedge g(x) \end{cases}$$

Le produit vectoriel étant une application bilinéaire de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, l'application $f \wedge g$ est dérivable sur I et :

$$(f \wedge g)' = f' \wedge g. + f \wedge g'$$



Doc. 3. *Mouvement d'un point mobile sur une sphère.*

1.4. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

1.4.1 Définitions

Soit k un entier naturel, une application f de I dans E est dite :

- de classe $\mathcal{C}^0$ sur I si elle est continue sur I ;
- de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur I si elle est dérivable sur I et si sa dérivée f' est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I ;
- de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si elle est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I pour tout entier k.

Pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on note $\mathcal{C}^k(I, E)$ l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, à valeurs dans E. Il est clair que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathcal{C}^k(I, E) \supset \mathcal{C}^{k+1}(I, E) \supset \mathcal{C}^\infty(I, E)$$

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, l'application dérivée de l'application f' est notée f'', $f^{(2)}$, $D^2 f$ ou encore $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$.

Elle est appelée **dérivée seconde** de f.

Rapport CCP, 2001

« Le fait que ρ est de classe $\mathcal{C}^2$ n'a été établi que par un petit nombre... »

Si $E = \mathbb{K}$, on note $\mathcal{C}^k(I)$. Pour $k \geqslant 1$, la formule de Leibniz donne la dérivée à l'ordre p, $1 \leqslant p$ du produit de deux fonctions de $\mathcal{C}^k(I)$. $\mathcal{C}^k(I)$ a la structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel et d'anneau.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^k(I, E)$. La **dérivée k-ième** de f est l'application notée $f^{(k)}$, $\mathrm{D}^k f$ ou encore $\dfrac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}\,x^k}$.

Elle est définie par récurrence par la formule suivante :

$$f^{(0)} = f \quad \text{et} \quad f^{(k)} = \left(f^{(k-1)}\right)'.$$

▶ ***Pour s'entraîner : ex. 3,4 et 5.***

Rapport Mines-Ponts, 1997

« Une proportion relativement importante de candidats (plus de 20 %) trouve le moyen de se tromper dès le début dans le calcul de la dérivée seconde de $\dfrac{1}{\sin 2x}$. C'est difficilement excusable à bac + 2 ! »

1.4.2 Opérations sur les applications de classe $\mathcal{C}^k$ à valeurs vectorielles

Dans ce paragraphe, sauf spécification contraire, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Théorème 8

L'ensemble $\mathcal{C}^k(I, E)$ des applications de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Si $k \in \mathbb{N}$, l'application « dérivée k-ième », définie par :

$$\mathrm{D}^k : \begin{cases} \mathcal{C}^k(I, E) & \to \quad \mathcal{C}^0(I, E) \\ f & \mapsto \quad \mathrm{D}^k(f) = f^{(k)} \end{cases}$$

est linéaire.

Théorème 9

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p, $B = (e_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ une base de E, k un élément de $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et f une application de I dans E dont les applications coordonnées relativement à la base B sont notées $f_1, \ldots, f_p$.

Alors :

$$f \in \mathcal{C}^k(I, E) \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!] \quad f_i \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{K})$$

De plus, si k est dans $\mathbb{N}$ et si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, alors :

$$\forall x \in I \quad f^{(k)}(x) = \sum_{i=1}^{p} f_i^{(k)}(x)\, e_i$$

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716), *mathématicien et philosophe allemand. Il étudie d'abord la philosophie, le droit et la théologie. Agé de 26 ans, lors d'une mission diplomatique à Paris, il rencontre Huygens qui l'incite à approfondir sa connaissance des mathématiques et de la physique. Nous lui devons les notations modernes du calcul différentiel et intégral :* $\dfrac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}\,\boldsymbol{x}}$, $\displaystyle\int \ldots$
Ses très nombreux écrits témoignent d'un esprit universel.

1.4.3 Composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Théorème 10

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$, φ une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ de J dans I et f une application de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans E, alors l'application $f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J.

Exemple

Si u est une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geqslant 1)$ sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, alors la fonction $(x \mapsto \ln|u(x)|)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et, de plus :

$$\forall x \in I \quad \frac{\mathrm{d} \ln|u(x)|}{\mathrm{d}\,x} = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

C'est le seul cas où il est possible de dériver directement une fonction contenant une valeur absolue sans distinguer les différents cas suivant le signe de u, ni utiliser la fonction signe.

Application 2

Utilisation de la formule de Leibniz

Soit $y = f(x) = \sqrt{x^2-1}$, x *réel* >1.

1) *Établir que :*

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(x) = f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(x^2-1)^{n-1/2}},$$

où P_n *est une fonction polynomiale.*

2) *Préciser le monôme de plus haut degré de* $P_n(x)$. *[Distinguer les cas* $n=0$, $n=1$ *et* $n \geqslant 2$.*]*

3) *Établir que :*

$$P_{n+1}(x) + A_n(x)\,P_n(x) + B_n(x)\,P_{n-1}(x) = 0,$$

où $A_n(x)$ *et* $B_n(x)$ *sont des polynômes à préciser. (Prouver que* $(x^2-1)\ f'(x) = x\ f(x)$ *et lui appliquer la formule de Leibniz* $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\{u(x)\,v(x)\} = \dots$*)*

4) *Démontrer que* $P'_n(x) = -n\,(n-2)\,P_{n-1}(x)$ *pour tout* $n \geqslant 1$. *Calculer* $P_n(1)$.

5) *De tout ce qui précède, déduire que* $(-1)^{n-1}\ f^{(n)}(x) > 0$ *si* $n \geqslant 2$.

1) $P_0(x) = 1$.

Supposons que, pour un entier $n \geqslant 0$, on ait

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(x^2-1)^{n-1/2}}$$

avec P_n fonction polynôme.

Alors :

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{\left(x^2-1\right)\,P'_n(x) - (2n-1)\,x\,P_n(x)}{(x^2-1)^{n+1/2}}.$$

Posons :

$$P_{n+1}(x) = \left(x^2-1\right)\,P'_n(x) - (2n-1)\,x\,P_n(x) \qquad \textbf{(1)}$$

C'est une fonction polynôme et :

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{(x^2-1)^{(n+1)-1/2}}$$

2) $P_0(x) = 1$, son monôme de plus haut degré est 1.

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Donc $P_1(x) = x$ son monôme de plus haut degré est x.

$$f''(x) = \frac{-1}{\left(x^2-1\right)^{3/2}}.$$

Donc $P_2(x) = -1$, son monôme de plus haut degré est -1.

L'égalité **(1)** vous permettra de prouver que, pour $n \geqslant 2$, le monôme de plus haut degré de $P_n(x)$ est :

$$\frac{(-1)^{n-1}\,n!}{2}\,x^{n-2}.$$

3) De l'égalité $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$, on déduit :

$$\left(x^2-1\right)\ f'(x) = x\ f(x) \qquad \textbf{(2)}$$

Sachant que, pour $k \geqslant 2$, $\left(x^2-1\right)^{(k)} = 0$, la formule de Leibniz permet d'écrire, pour $n \geqslant 2$:

$$[(x^2-1)\ f'(x)]^{(n)} = (x^2-1)\ f^{(n+1)}(x) + n\,(2x)\ f^{(n)}(x) + n\,(n-1)\ f^{(n-1)}(x)$$

De même :

$$[x\ f(x)]^{(n)} = x\ f^{(n)}(x) + n\ f^{(n-1)}(x)$$

Donc, d'après **(2)** :

$$\left(x^2-1\right)\ f^{(n+1)}(x) + (2n-1)\,x\ f^{(n)}(x) + (n^2-2n)\ f^{(n-1)}(x) = 0$$

Par définition des polynômes P_n, on trouve :

$$P_{n+1}(x) + (2n-1)\,x\,P_n(x) + (n^2-2n)(x^2-1)\,P_{n-1}(x) = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

Pour $n \geqslant 2$: $A_n(x) = (2n-1)\,x$ et $B_n(x) = (n^2-2n)(x^2-1)$.

Vous vérifierez que la formule reste valable pour $n=1$.

4) De **(1)** et **(3)**, nous déduisons :

$$\left(x^2-1\right)\,P'_n(x) + \left(n^2-2n\right)\left(x^2-1\right)\,P_{n-1}(x) = 0$$

D'où la formule suivante pour tout $n \geqslant 1$:

$$P'_n(x) = -n\,(n-2)\,P_{n-1}(x) \qquad \textbf{(4)}$$

De **(3)**, on déduit :

$$P_{n+1}(1) + (2n-1)\,P_n(1) = 0$$

Sachant que $P_1(1) = 1$, on en déduit par récurrence que $P_{n+1}(1) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n}(2i-1)$ et :

$$P_n(1) = (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!}$$

5) Le signe de $(-1)^{n-1} f^{(n)}(x)$ sur $]1, +\infty[$ est celui de $(-1)^{n-1} P_n(x)$.

Pour $n = 2$, $(-1)^{n-1} P_n(x) = 1 > 0$.

Supposons que, pour un entier $n \geqslant 2$, on ait $(-1)^{n-1} P_n(x) > 0$ pour tout $x \geqslant 1$.

On sait que $(-1)^n P_{n+1}(1) > 0$ et, d'après **(4)** :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(-1)^n P_{n+1}(x)] = (-1)^{n-1}(n+1)(n-1) P_n(x) > 0$$

Donc la fonction $\big(x \mapsto (-1)^n P_{n+1}(x)\big)$ est strictement positive sur $[1, +\infty[$.

On a prouvé par récurrence que, pour tout $n \geqslant 2$, $(-1)^{n-1} f^{(n)}(x) > 0$ pour tout $x > 1$.

1.4.4 $\mathcal{C}^k$-difféomorphismes

Dans ce paragraphe, I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ d'intérieurs non vides et k est un élément de $\mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$.

Une application φ de J dans I est un **$\mathcal{C}^k$-difféomorphisme** de l'intervalle J sur l'intervalle I si :

- φ est bijective ;
- φ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J ;
- φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.

Rapport ENSAM, 2002

« Peu de candidats savent ce qu'est un difféomorphisme et ceux qui s'en souviennent, tout en ignorant le théorème qui s'y rapporte... »

Exemples

- La fonction $(x \mapsto \ln x)$ définit un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $(x \mapsto x^3)$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, mais n'est pas un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En revanche, sa restriction de l'application $\big(x \mapsto x^3\big)$ à $\mathbb{R}^{+*}$ définit un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$.
- Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

– La fonction $\big(t \mapsto a + t(b-a)\big)$ définit un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $[0, 1]$ sur $[a, b]$.

– La fonction $\left(t \mapsto \dfrac{a+b}{2} + t\,\dfrac{b-a}{2}\right)$ définit un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $[-1, 1]$ sur $[a, b]$.

Rapport Centrale, 2001

« Les définitions de base ne sont pas connues : [...] $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme... »

Théorème 11

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$, k un élément de $\mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ et φ une application de classe $\mathcal{C}^k$ de J dans $\mathbb{R}$. L'application φ induit un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de l'intervalle J sur l'intervalle $\varphi(J)$ si, et seulement si :

$$\forall t \in J \quad \varphi'(t) \neq 0.$$

Démonstration

• Supposons que φ soit un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de l'intervalle J sur $\varphi(J)$.
Alors φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^k$. De plus, $\varphi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{Id}_J$. Dérivons cette expression.

$$\forall t \in J \quad (\varphi^{-1} \circ \varphi)'(t) = (\varphi^{-1})'\big(\varphi(t)\big) \times \varphi'(t) = 1.$$

Donc :

$$\forall t \in J \quad \varphi'(t) \neq 0$$

• Supposons que :

$$\forall t \in J \quad \varphi'(t) \neq 0.$$

φ' est une application continue de J dans $\mathbb{R}$ qui ne s'annule pas sur l'intervalle J. Elle est donc de signe constant et la fonction φ est strictement monotone, donc injective sur J. On a prouvé que φ induit une bijection de J sur $\varphi(J)$.
φ est continue, strictement monotone, donc φ^{-1} est continue.
Soit t_0 un point de $\varphi(J)$ et t dans $\varphi(J) \setminus \{t_0\}$. Alors, en posant $\varphi(x) = t$ et $\varphi(x_0) = t_0$:

$$\frac{\varphi^{-1}(t) - \varphi^{-1}(t_0)}{t - t_0} = \frac{x - x_0}{\varphi(x) - \varphi(x_0)}$$

$\dfrac{\varphi^{-1}(t) - \varphi^{-1}(t_0)}{t - t_0}$ admet la limite $\dfrac{1}{\varphi'(x_0)}$ car $\varphi'(x_0)$ n'est pas nul. L'application φ^{-1} est donc dérivable en t_0.
De plus :

$$(\varphi^{-1})' = \frac{1}{\varphi' \circ \varphi^{-1}}$$

est continue sur $\varphi(J)$.
• Si $k > 1$, on montre par récurrence que φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\varphi(J)$.

Application 3

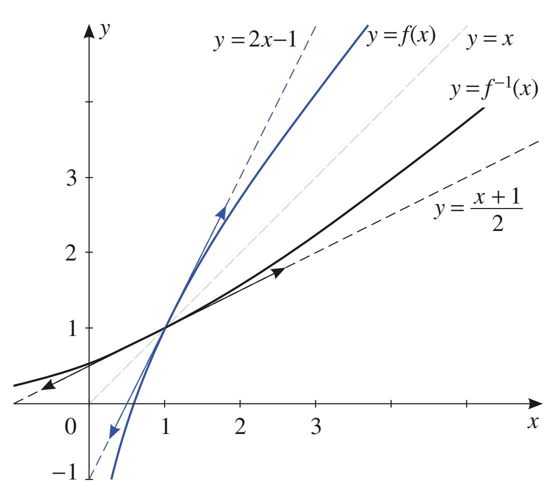
Étude d'un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme

Soit la fonction f définie par $f(x) = x + \ln x$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

1) *Montrer que f est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}$.*

2) *Donner un développement limité à l'ordre 3 de f^{-1} au voisinage de 1.*

3) *Donner un développement asymptotique à deux termes de $f^{-1}(x)$ en $+\infty$.*



Doc. 4. *Les graphes de f et f^{-1}.*

1) Vous montrerez que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, que sa dérivée ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que : $f(\mathbb{R}^{+*}) = \mathbb{R}$ f est donc un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}$.

2) Première méthode

L'application f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. La formule de Taylor-Young nous en donne un développement limité à tout ordre au voisinage de 1. À l'ordre 3, il s'écrit :

$$f^{-1}(1+h) = f^{-1}(1) + h\left(f^{-1}\right)'(1) + \frac{h^2}{2}\left(f^{-1}\right)''(1) + \frac{h^3}{6}\left(f^{-1}\right)^{(3)}(1) + o\left(h^3\right)$$

De plus :

$$f^{-1}(1) = a \Leftrightarrow a + \ln a = 1 \Leftrightarrow a = 1$$

Déterminons les dérivées successives de f^{-1} en 1 :

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}} \quad \text{et} \quad f'(y) = 1 + \frac{1}{y}$$

$$\left(f^{-1}\right)'(1) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \left(f^{-1}\right)''(x) = -\frac{f''\left(f^{-1}(x)\right)}{\left(f' \circ f^{-1}(x)\right)^3}$$

$$\left(f^{-1}\right)''(1) = \frac{1}{8}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \left(f^{-1}\right)^{(3)}(x) = -\Bigg(f^{(3)}\left(f^{-1}(x)\right) \times \frac{1}{\left(f' \circ f^{-1}(x)\right)^4} + f''\left(f^{-1}(x)\right) \times (-3) \times \frac{f''\left(f^{-1}(x)\right)}{\left(f' \circ f^{-1}(x)\right)^5}\Bigg)$$

$$\left(f^{-1}\right)^{(3)}(1) = -\frac{1}{32}$$

Et nous obtenons :

$$f^{-1}(1+h) = 1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{16} - \frac{h^3}{192} + o(h^3)$$

Seconde méthode

Puisque $f^{-1}(1) = 1$, le développement limité de f en 1 va nous permettre de trouver celui de f^{-1}.

• Posons $x = 1 + h$.

$$f(1+h) = (1+h) + \ln(1+h) = 1 + 2h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o\left(h^3\right)$$

Donc :

$$f^{-1}\left(f(1+h)\right) = 1 + h = f^{-1}\left(1 + 2h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o\left(h^3\right)\right) \qquad \textbf{(1)}$$

• Notons $u = 2h - \dfrac{h^2}{2} + \dfrac{h^3}{3} + o\left(h^3\right)$. Lorsque h tend vers 0, u tend aussi vers 0.

$$f^{-1}(1+u) = 1 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 + o\left(u^3\right) \qquad \textbf{(2)}$$

Calculons les puissances de u :

$$\begin{aligned} u &= 2h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o\left(h^3\right) \\ u^2 &= 4h^2 - 2h^3 + o\left(h^3\right) \\ u^3 &= 8h^3 + o\left(h^3\right) \end{aligned}$$

On déduit alors de **(1)** et **(2)** que :

$$1 + h = 1 + 2a_1 h + \left(-\frac{a_1}{2} + 4a_2\right) h^2 + \left(\frac{a_1}{3} - 2a_2 + 8a_3\right) h^3 + o\left(h^3\right)$$

L'unicité du développement limité d'une fonction en un point permet de calculer :

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{16} \quad \text{et} \quad a_3 = -\frac{1}{192}.$$

$$f^{-1}(1+u) = 1 + \frac{u}{2} + \frac{u^2}{16} - \frac{u^3}{192} + o\left(u^3\right)$$

3) Lorsque x tend vers $+\infty$, $f^{-1}(x)$ tend vers $+\infty$.

De plus :

$$x = f^{-1}(x) + \ln(f^{-1}(x)).$$

Donc :

$$f^{-1}(x) \sim x .$$

Soit :

$$f^{-1}(x) = x + x\varepsilon(x),$$

avec :

$$\lim_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0.$$

En reportant :

$$x = x + x\,\varepsilon(x) + \ln\left(x + x\,\varepsilon(x)\right);$$

soit :

$$\ln x + \ln\left(1 + \varepsilon(x)\right) = -x\,\varepsilon(x),$$

d'où :

$$x\,\varepsilon(x) = -\ln x + o(1).$$

Finalement,

$$f^{-1}(x) = x - \ln x + o(1).$$

Donc, le graphe de la fonction $(x \mapsto x - \ln x)$ est asymptote à celui de f^{-1}.

Expérimentalement, le *tableau* suivant indique que le graphe de f^{-1} est au-dessus de celui de $(x \mapsto x - \ln x)$ pour les valeurs calculées.

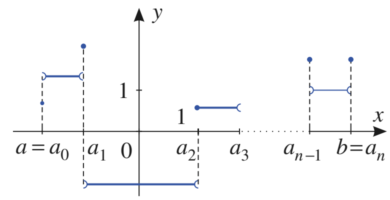
t	10	10^2	10^3	10^4
$x = f(t)$	12,3	104,6	1 006,9	10 009,2
$y_1 = f^{-1}(x)$	10	100	1 000	10 000
$y_2 = x - \ln x$	9,79	99,95	999,99	9 999,999

1.5. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux

Dans ce paragraphe, k est un élément de $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Une application f définie sur un segment $[a, b]$ à valeurs dans E est dite **de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux** sur $[a, b]$, s'il existe une subdivision $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ de $[a, b]$ telle que la restriction de f à chacun des intervalles $]a_{i-1}, a_i[$ soit prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a_{i-1}, a_i]$.

Une telle subdivision est dite subordonnée à f.

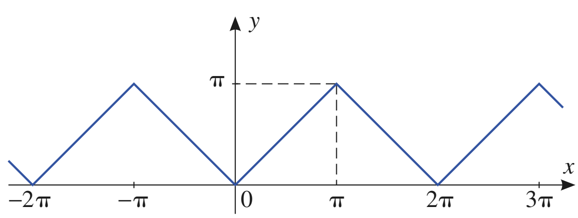


Doc. 5. *Une fonction en escalier est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *par morceaux*

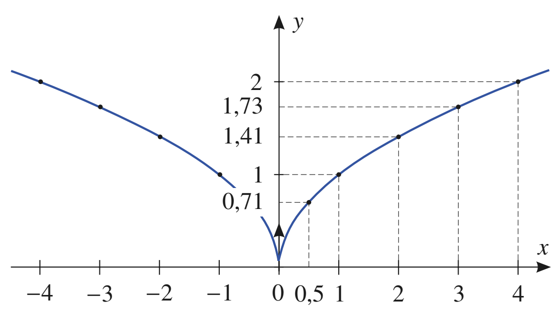
Exemples

• Toute fonction en escalier sur $[a, b]$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux sur $[a, b]$ (*doc.* 5).

• La fonction $\text{Arccos} \circ \cos$ est continue, paire et 2π périodique. Elle est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur tout segment de $\mathbb{R}$ (*doc.* 6).



Doc. 6. *La fonction* $\text{Arccos} \circ \cos$.



Doc. 7. *La fonction* $\left(x \mapsto \sqrt{|x|}\right)$.

• La fonction $\left(x \mapsto \sqrt{|x|}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Elle n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[-1, 1]$ (*doc.* 7).

En pratique, pour prouver que f est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur $[a, b]$, il suffit de trouver une subdivision $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ de $[a, b]$ telle que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

- f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $]a_{i-1}, a_i[$;
- f admet une limite à droite en a_{i-1} ;
- f admet une limite à gauche en a_i ;
- l'application f_i, définie sur $[a_{i-1}, a_i]$ par :

$$f_i(x) = \begin{cases} \lim\limits_{t \to a_{i-1}^+} f(t) & \text{si} \quad x = a_{i-1} \\ f(x) & \text{si} \quad x \in \,]a_{i-1}, a_i[\\ \lim\limits_{t \to a_i^-} f(t) & \text{si} \quad x = a_i \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a_{i-1}, a_i]$.

Une application f est dite de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur un intervalle I quelconque si sa restriction à tout segment est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux.

L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur l'intervalle I, à valeurs dans E, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, E)$, noté $\mathcal{CM}^k(I, E)$.

Exemples

• La fonction valeur absolue est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

• Pour tout n de $\mathbb{N}$, l'application $\left(x \mapsto |x|^{2n+1}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^{2n}$ sur $\mathbb{R}$ et aussi de classe $\mathcal{C}^{2n+1}$ par morceaux.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{F}(I, E)$. On remarque que, si f est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur I, alors les dérivées successives de f :

$$\left(f'(x), f''(x), \ldots, f^{(k)}(x)\right)$$

sont définies en tout point x de I sauf sur un ensemble P. L'ensemble P a la particularité suivante : tout segment $[a, b]$ inclus dans I ne contient qu'un nombre fini de points de P.

Dans ce cas, pour $j \in [\![1, k]\!]$, on note $\mathrm{D}^j f$ ou $f^{(j)}$ la fonction de $I \setminus P$ dans E définie par $\left(x \mapsto f^{(j)}(x)\right)$.

On retrouve la caractérisation des fonctions constantes parmi les fonctions continues sur I et dérivables sur l'ensemble des points intérieurs à I (*cf. corollaire* 6.1).

Théorème 12
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans E. Si f est continue sur I et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur cet intervalle, alors f est constante sur I si, et seulement si, $\mathrm{D} f = 0$.

2 Intégration sur un segment

2.1. Intégrale d'une fonction en escalier

2.1.1 Définitions

Soit $\mathcal{E}\mathrm{sc}([a, b], E)$ l'ensemble des fonctions en escalier de $[a, b]$ dans E, φ un élément de $\mathcal{E}\mathrm{sc}([a, b], E)$. Notons $(a_i)_{i \in [\![0, n]\!]}$ une subdivision de $J = [a, b]$ subordonnée à φ et λ_i la valeur prise par φ sur $]a_{i-1}, a_i[$.

Le vecteur de E : $I(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \left(a_i - a_{i-1}\right) \lambda_i$ est indépendant de la subdivision subordonnée à φ utilisée pour le calculer.

Le vecteur $I(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \left(a_i - a_{i-1}\right) \lambda_i$ est appelé intégrale de la fonction φ sur le segment $[a, b]$. Nous le noterons $\int_{[a,b]} \varphi$ ou $\int_J \varphi$.

■ L'intégrale ne dépend pas des valeurs prises par φ aux points de la subdivision.

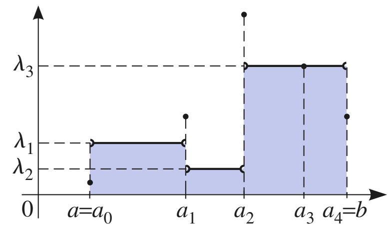
■ Si φ est une fonction constante sur J, de valeur λ :

$$\int_{[a,b]} \varphi = \int_J \varphi = (b - a)\,\lambda$$

■ Dans le cas d'une fonction à valeurs réelles positives, on retrouve l'interprétation classique en terme d'aire. C'est d'ailleurs l'origine historique de la notion d'intégrale (*doc.* 8).

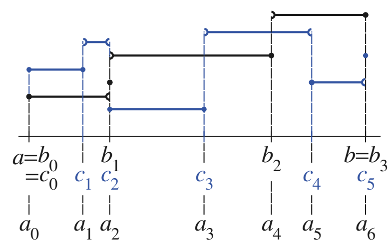
2.1.2 Propriétés

Théorème 13
Soit J un segment de $\mathbb{R}$. L'application de $\mathcal{E}\mathrm{sc}(J,E)$ dans E, qui à φ associe $\int_J \varphi$, est linéaire :
$\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2 \ \forall (\varphi,\psi) \in (\mathcal{E}\mathrm{sc}(J,E))^2$
$$\int_J (\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha \int_J \varphi + \beta \int_J \psi.$$



Doc. 8. *Ici, φ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et :*
$$\int_{[a,b]} \varphi = \sum_{i=1}^{n} \left(a_i - a_{i-1}\right) \lambda_i$$
représente l'aire de la portion colorée.

Théorème 14
Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $J = [a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$, φ une application en escalier de J dans E et u une application linéaire de E dans F. Alors :
- $u \circ \varphi \in \mathcal{E}\mathrm{sc}(J,F)$;
- $\displaystyle\int_J u \circ \varphi = u\left(\int_J \varphi\right)$.



Doc. 9. *Construction d'une subdivision subordonnée simultanément à deux fonctions en escalier.*

Théorème 15
Soit J un segment de $\mathbb{R}$ et φ un élément de $\mathcal{E}\mathrm{sc}(J,E)$. Si $\| \ \|$ est une norme sur l'espace vectoriel E. Alors :
- $\|\varphi\| \in \mathcal{E}\mathrm{sc}(J,\mathbb{R})$
- $\displaystyle\left\|\int_J \varphi\right\| \leqslant \int_J \|\varphi\|$.

Démonstration

Soit $(a_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ une subdivision de J subordonnée à φ. Sur chaque intervalle $]a_{i-1}, a_i[$, la fonction φ est constante, donc la fonction $\|\varphi\|$ l'est aussi.

Notons λ_i la valeur prise par φ sur $]a_{i-1}, a_i[$. On a :
$$\left\|\int_J \varphi\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1})\,\lambda_i\right\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1})\,\|\lambda_i\| = \int_J \|\varphi\|$$

Corollaire 15.1
Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$, φ un élément de $\mathcal{E}\mathrm{sc}([a,b],E)$, $\| \ \|$ une norme sur l'espace vectoriel E et M un réel $\geqslant 0$ tel que : $\forall x \in [a,b] \quad \|\varphi(x)\| \leqslant M$. Alors :
$$\left\|\int_{[a,b]} \varphi\right\| \leqslant \int_{[a,b]} \|\varphi\| \leqslant M\,(b-a).$$
En particulier, si $\|\varphi\|_\infty = \sup\{\|\varphi(x)\| \ ; \ x \in [a,b]\}$, alors :
$$\left\|\int_{[a,b]} \varphi\right\| \leqslant \int_{[a,b]} \|\varphi\| \leqslant \|\varphi\|_\infty\,(b-a).$$

2.2. Intégrale d'une application continue par morceaux sur un segment

2.2.1 Définition de l'intégrale

Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$. Toute fonction vectorielle continue par morceaux, f, de $[a,b]$ dans un espace vectoriel de dimension finie E ou $\mathbb{C}$ peut être approchée uniformément par des fonctions en escalier sur $[a,b]$.

Ce résultat a été vu dans le *chapitre* 4.

Cette propriété va nous permettre de définir l'**intégrale d'une application continue par morceaux sur un segment**.

Théorème 16

Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et f une application continue par morceaux de $[a,b]$ dans E.

- Si (φ_n) est une suite de fonctions en escalier de $[a,b]$ dans E qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$, alors la suite de vecteurs $\left(\int_{[a,b]} \varphi_n\right)$ converge dans E.
- Si (φ_n) et (ψ_n) sont deux suites de fonctions en escalier de $[a,b]$ dans E qui convergent uniformément vers f sur $[a,b]$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} \varphi_n = \lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} \psi_n$$

(PC) Il existe donc une suite (φ_n) de fonctions en escalier de $[a,b]$ dans $(E, \| \ \|_E)$ telle que, pour tout $n > 0$: $\sup\{\|f(t) - \varphi_n(t)\|_E \,;\, t \in [a,b]\} \leqslant \frac{1}{n}$.
On dit, dans ce paragraphe, que la suite (φ_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

Démonstration (*PSI*)

Pour toute application f de $\mathcal{CM}([a,b],E)$, posons :

$$\| f \|_\infty = \sup \{\| f(t) \|_E \mid t \in [a,b]\}.$$

Dans la suite de la démonstration, on fixe un élément f de $\mathcal{CM}([a,b],E)$.

• Soit (φ_n) une suite de fonctions en escalier de $[a,b]$ dans E qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$. C'est une suite de Cauchy de l'espace vectoriel normé $(\mathcal{CM}([a,b],E), \| \ \|_\infty)$ et :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \ \forall p \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N) \Rightarrow \left(\|\varphi_{n+p} - \varphi_n\|_\infty \leqslant \varepsilon\right)$$

Les fonctions φ_{n+p} et φ_n sont des fonctions en escalier sur $[a,b]$;

$$\left\| \int_{[a,b]} \varphi_{n+p} - \int_{[a,b]} \varphi_n \right\|_E = \left\| \int_{[a,b]} (\varphi_{n+p} - \varphi_n) \right\|_E \leqslant \|\varphi_{n+p} - \varphi_n\|_\infty (b-a).$$

On en déduit que la suite de vecteurs $\left(\int_{[a,b]} \varphi_n\right)$ est une suite de Cauchy de E ; elle converge donc dans E.

• Notons (φ_n) et (ψ_n) deux suites de fonctions en escalier de $[a,b]$ dans E telles que :

$$\lim_{n\to+\infty} \| f - \varphi_n\|_\infty = \lim_{n\to+\infty} \| f - \psi_n\|_\infty = 0.$$

– On peut écrire : $\|\varphi_n - \psi_n\|_\infty \leqslant \| f - \varphi_n\|_\infty + \| f - \psi_n\|_\infty$. On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \|\varphi_n - \psi_n\|_\infty = 0$$

Les suites $\left(\int_{[a,b]} \varphi_n\right)$ et $\left(\int_{[a,b]} \psi_n\right)$ convergent dans E. Notons :

$$L(\varphi) = \lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} \varphi_n \quad \text{et} \quad L(\psi) = \lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} \psi_n$$

En d'autres termes, la convergence des suites (φ_n) et (ψ_n) vers f, dans l'espace vectotiel normé $(\mathcal{CM}([a,b],E), \| \ \|_\infty)$, entraîne la convergence de la suite $(\varphi_n - \psi_n)$ vers la fonction nulle.

Lorsque f est elle-même une fonction en escalier, on peut choisir $\varphi_n = f$ pour tout n. On obtient l'intégrale telle qu'elle avait été définie dans le paragraphe précédent.
L'intégrale qui vient d'être définie pour les fonctions continues par morceaux sur un segment est bien une généralisation de l'intégrale des fonctions en escalier.

– On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant \left\| \int_{[a,b]} \varphi_n - \int_{[a,b]} \psi_n \right\|_E = \left\| \int_{[a,b]} (\varphi_n - \psi_n) \right\|_E \leqslant \|\varphi_n - \psi_n\|_\infty (b-a).$$

Le *théorème d'encadrement* permet de conclure que :

$$L(\varphi) = L(\psi).$$

Le *théorème* 16 permet de définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment.

Soit f une application continue par morceaux de $[a,b]$ dans E et (φ_n) une suite de fonctions en escalier de $[a,b]$ dans E qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$. L'intégrale de f sur le segment $[a,b]$ est la limite de la suite $\left(\int_{[a,b]} \varphi_n \right)$. On la note $\int_{[a,b]} f$ ou $\int_{[a,b]} f(t)\,\mathrm{d}t$.

$\int_{[a,b]} f$ est un vecteur de E. Par définition :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\int_{[a,b]} \varphi_n \right) = \int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

2.2.2 Sommes de Riemann

Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et f une application continue de $[a,b]$ dans E.

Pour tout entier $n > 0$, on pose :

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) \quad \text{et} \quad T_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$$

On appelle S_n et T_n des **sommes de Riemann*** de f sur le segment $[a,b]$.

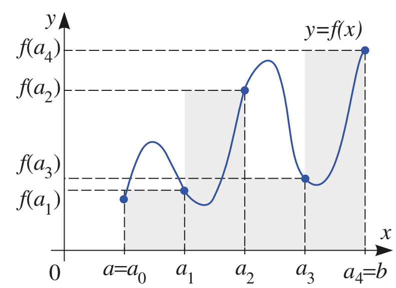
* Nous devons à Cauchy, en 1823, la première définition rigoureuse de l'intégrale. Il établit que, si f est une fonction réelle, continue dans un intervalle $[x_0, X]$ et $x_1 < x_2 < \cdots x_n = X$ n points de l'intervalle $[x_0, X]$, les sommes

$$S = (x_1 - x_0)\, f(x_0) + (x_2 - x_1)\, f(x_1) + \cdots + (X - x_{n-1})\, f(x_{n-1})$$

admettent, lorsque :

$$\max \{x_{i+1} - x_i \mid i \in [\![0, n-1]\!]\}$$

tend vers 0, une limite : « limite qui dépendra uniquement de la fonction $f(x)$ et des valeurs extrêmes x_0, X attribuées à la variable x. Cette limite est ce que l'on appelle une intégrale définie ». Riemann montre que cette définition de l'intégrale s'applique à un ensemble de fonctions plus vaste.

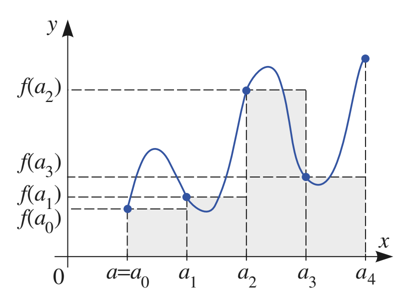


Doc. 10. *Sur ce schéma,*

$$n = 4, \quad a_i = a + i\,\frac{b-a}{n}$$

et l'aire hachurée représente :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(a_i)\,\frac{b-a}{n}.$$



Doc. 11. *Sur ce schéma,*

$$n = 4, \quad a_i = a + i\,\frac{b-a}{n}$$

et l'aire hachurée représente :

$$T_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(a_i)\,\frac{b-a}{n}.$$

Corollaire 16.1

Soit f une application continue de $[a,b]$ dans E. Les suites de sommes de Riemann (S_n) et (T_n) convergent vers $\int_{[a,b]} f$:

$$\int_{[a,b]} f = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)$$

Rapport CCP, 1997

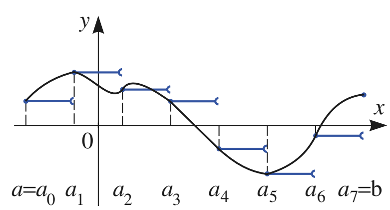
Vous ne pourrez pas abuser les examinateurs

« En ce qui concerne l'intégration, plusieurs candidats ont affirmé n'avoir jamais entendu parler de sommes de Riemann. »

Lorsque f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, il est aisé de voir que S_n et T_n représentent des sommes d'aires de rectangles (*doc.* 10 et 11).

La démonstration est hors programme car elle utilise une notion qui ne figure pas aux programmes *PC* et *PSI*. Toutefois, il nous paraît intéressant de vous faire remarquer qu'elle repose sur l'idée suivante. On désigne par φ_n la fonction en escalier sur $[a,b]$ définie, pout tout i entre 0 et $n-1$, sur chaque intervalle $\left[a+\frac{i(b-a)}{n}, a+\frac{(i+1)(b-a)}{n}\right[$ par (*doc.* 12) :

$$\varphi_n(x) = f\left(a+\frac{i(b-a)}{n}\right) \quad \text{et} \quad \varphi_n(b) = f(b).$$



Doc. 12. *La fonction en escalier* φ_n.

La suite de fonctions en escalier que nous venons de construire, (φ_n), converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

▶ ***Pour s'entraîner : ex. 6.***

Application 4

Utilisation des sommes de Riemann

1) *Calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i \sin\left(\frac{i\pi}{n}\right)$.

2) *On fixe un réel* $\alpha \neq 1$. *Déterminer un équivalent de la suite* (u_n) *définie par* $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^\alpha}$.

3) *Traiter la question* **2)** *dans le cas où* $\alpha = 1$.

1) Notons :

$$S_n = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i \sin\left(\frac{i\pi}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \sin\left(\frac{i\pi}{n}\right)$$

En posant $f(x) = x\sin(\pi x)$, on constate que f est continue sur $[0,1]$ et que S_n est une somme de Riemann de f sur $[0,1]$.

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_{[0,1]} t\sin(\pi t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}.$$

2) $$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k^\alpha} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(n+i)^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)^\alpha}.$$

Posons $g(x) = \frac{1}{(1+x)^\alpha}$. La fonction g est continue sur $[0,1]$.

$\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} g\left(\dfrac{i}{n}\right)$ est une somme de Riemann de g sur $[0,1]$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{2^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}.$$

On en déduit que :

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{2^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}\frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

3) Lorsque $\alpha = 1$:

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\left(1+\dfrac{i}{n}\right)}$$

On reconnaît là une somme de Riemann de la fonction continue $\left(t \longmapsto \dfrac{1}{1+t}\right)$ sur le segment $[0,1]$. Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \int_{[0,1]} \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \ln(2).$$

2.2.3 Linéarité de l'intégrale d'une application continue par morceaux sur un segment

Théorème 17

Soit J un segment de $\mathbb{R}$. L'application de $\mathcal{CM}(J,E)$ dans E, qui à f associe $\displaystyle\int_J f$, est linéaire :

$$\forall\,(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2\ \forall\,(f,g)\in(\mathcal{CM}(J,E))^2\quad \int_J(\alpha f+\beta g) = \alpha\int_J f + \beta\int_J g.$$

Démonstration

Soit (φ_n) et (ψ_n) deux suites de fonctions en escalier de J dans E convergeant uniformément vers f et g respectivement.

La suite de fonctions en escalier $(\alpha\varphi_n+\beta\psi_n)$ converge uniformément vers $\alpha f+\beta g$ et :

$$\int_J(\alpha f+\beta g) = \lim_{n\to+\infty}\int_J(\alpha\varphi_n+\beta\psi_n) = \alpha\int_J f + \beta\int_J g.$$

► ***Pour s'entraîner : ex. 7.***

Théorème 18

Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions continues par morceaux de $[a,b]$ dans E. Si f et g coïncident, sauf sur une partie finie de $[a,b]$, alors :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} g.$$

À vous de prouver, le plus brièvement possible, ce résultat en considérant $f-g$.

■ Conséquence importante (*PSI*)

Si f est une fonction définie sur un segment $J=[a,b]$ privé d'une subdivision $S=(a_0,a_1,\dots a_n)$ de $[a,b]$ et telle que la restriction de f à chacun des intervalles ouverts $]a_i,a_{i+1}[$ est prolongeable en une fonction continue sur $[a_i,a_{i+1}]$, f peut être prolongée en une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$, que nous noterons $\widetilde{f}$. L'intégrale de $\widetilde{f}$ sur $[a,b]$ ne dépend pas des valeurs choisies pour prolonger f. Nous l'appellerons intégrale de f sur $[a,b]$ et la noterons encore :

$$\int_J f \text{ ou } \int_{[a,b]} f.$$

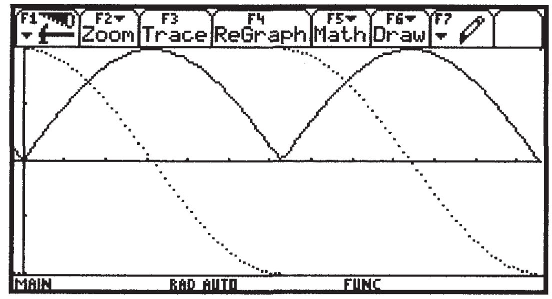
Ainsi, si g est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux de J dans E, on peut calculer $\int_J g'$ bien que g' ne soit pas définie en tout point de J.

2.2.4 Intégrale et applications linéaires

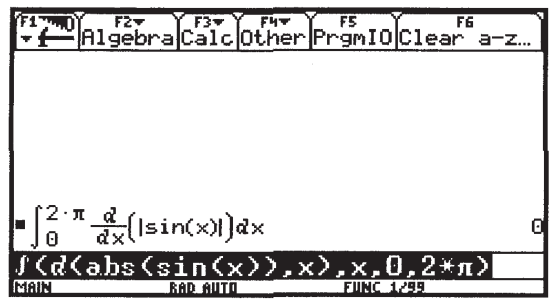
Théorème 19

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, u une application linéaire de E dans F, J un segment de $\mathbb{R}$ et f une application continue par morceaux de J dans E. Alors :

- $u \circ f \in \mathcal{CM}(J, F)$
- $\displaystyle\int_J u \circ f = u\left(\int_J f\right)$.



Doc. 13. *Le graphe de* $(x \longmapsto |\sin x|)$ *est en trait plein et celui de sa dérivée en pointillé.*



Doc. 14. *À vous de prouver, le plus brièvement possible, ce résultat.*

Démonstration

On note $\| \, \|_E$ une norme sur E et $\| \, \|_F$ une norme sur F. Puisque $u \in \mathcal{L}(E, F)$, on sait qu'il existe un réel M tel que $\forall v \in E \quad \|u(v)\|_F \leqslant M\|v\|_E$ (*cf. Analyse*, *chapitre* 3).

Pour toute application f de $\mathcal{CM}(J, E)$, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{t \in J} \|f(t)\|_E$.

Pour toute application g de $\mathcal{CM}(J, F)$, on pose $\|g\|_\infty = \sup_{t \in J} \|g(t)\|_F$.

L'application f de $\mathcal{CM}(J, E)$ étant fixée, on introduit une suite (φ_n) de fonctions en escalier de J dans E qui converge uniformément vers f sur J. On a donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \|f - \varphi_n\|_\infty = 0$$

De plus, les fonctions $u \circ \varphi_n$ sont des fonctions en escalier de J dans F et :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in J \quad \|u \circ f(t) - u \circ \varphi_n(t)\|_F &= \|u(f(t) - \varphi_n(t))\|_F \\ &\leqslant M\|f(t) - \varphi_n(t)\|_E \leqslant M\|f - \varphi_n\|_\infty\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant \|u \circ f - u \circ \varphi_n\|_\infty = \sup_{t \in J} \|u \circ f(t) - u \circ \varphi_n(t)\|_F \leqslant M\|f - \varphi_n\|_\infty$$

La suite de fonctions en escalier $(u \circ \varphi_n)$ converge uniformément vers $u \circ f$ sur J. D'où :

$$\int_J u \circ f = \lim_{n \to +\infty} \int_J u \circ \varphi_n$$

Or, φ_n est une fonction en escalier, donc $\displaystyle\int_J u \circ \varphi_n = u\left(\int_J \varphi_n\right)$.

La continuité de l'application linéaire u permet d'écrire :

$$\int_J u \circ f = \lim_{n \to +\infty} u\left(\int_J \varphi_n\right) = u\left(\lim_{n \to +\infty} \int_J \varphi_n\right) = u\left(\int_J f\right)$$

Dans la suite du paragraphe, on note $B = (e_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ une base de E.

Corollaire 19.1

Soit J un segment de $\mathbb{R}$ et f une application continue par morceaux de J dans E. On note $(f_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ les applications coordonnées de f relatives à la base B. Le calcul de l'intégrale de f peut être effectué composante par composante :

$$\int_J f = \sum_{i=1}^{p} \left(\int_J f_i\right) e_i$$

Démonstration

En notant e_i^* la fonction i-ième composante dans la base B :

$$\forall i \in [\![1,p]\!] \quad e_i^*\left(\int_J f\right) = \int_J e_i^* \circ f = \int_J f_i.$$

Donc :

$$\int_J f = \sum_{i=1}^{p} \left(\int_J f_i\right) e_i.$$

En particulier, si f est une fonction continue par morceaux sur le segment J, à valeurs complexes, alors :

- $\displaystyle\int_J f = \int_J \operatorname{Re} f + \mathrm{i}\int_J \operatorname{Im} f$;
- $\displaystyle\operatorname{Re}\left(\int_J f\right) = \int_J \operatorname{Re}(f),\ \operatorname{Im}\left(\int_J f\right) = \int_J \operatorname{Im}(f)$;
- $\displaystyle\int_J \overline{f} = \overline{\left(\int_J f\right)} = \int_J \operatorname{Re} f - \mathrm{i}\int_J \operatorname{Im} f.$

Application 5

Utilisation de fonctions complexes

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose :

$$a_n = \int_{[0,\frac{\pi}{2}]} \cos^n(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x,$$

et

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k.$$

1) *Prouver que la suite (a_n) tend vers 0. [On pourra utiliser l'inégalité $|a_n| \leqslant \int_{[0,\frac{\pi}{2}]} \cos^n(x)\,\mathrm{d}x$.]*

2) *On s'intéresse à la nature de la série $\sum(-1)^n a_n$. Établir la formule :*

$$S_n = \operatorname{Im}\int_{[0,\frac{\pi}{2}]} \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\cos(x)} - R_n(x),$$

avec $R_n(x) = \operatorname{Im}\displaystyle\int_{[0,\frac{\pi}{2}]} \frac{\left(-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\cos(x)\right)^{n+1}}{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\cos(x)}\,\mathrm{d}x.$

3) *Démontrer que $|R_n(x)|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.*

4) *En déduire la somme s de la série $\sum(-1)^n a_n$.*

1) Notons $b_n = \int_{[0,\frac{\pi}{2}]} \cos^n(x)\,\mathrm{d}x$.

Pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: $0 \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$. La suite (b_n) converge.

$$b_{2n} = \int_{[0,\frac{\pi}{2}]} \cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_{[0,2\pi]} \cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{4^{n+1}}\int_{[0,2\pi]} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)^{2n}\mathrm{d}x$$

Développons par la formule du binôme de Newton.

On sait que, si k est un entier non nul, $\int_{[0,2\pi]} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x = 0$. On en déduit :

$$b_{2n} = \frac{2\pi}{4^{n+1}}\binom{2n}{n} = \frac{\pi}{2}\,\frac{\prod_{i=1}^{2n} i}{\left(\prod_{i=1}^{n}(2i)\right)^2}$$
$$= \frac{\pi}{2}\prod_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{2i}\right).$$

Donc $\ln(b_{2n}) = \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sum_{i=1}^{n}\ln\left(1 - \frac{1}{2i}\right)$.

Or la série à termes négatifs $\sum \ln\left(1 - \frac{1}{2i}\right)$ est divergente.

Donc $\lim_{n\to+\infty} \ln(b_{2n}) = -\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} b_{2n} = 0$.

2) $(-1)^n a_n = \operatorname{Im}\left[\int_{[0,\frac{\pi}{2}]}\left(-\cos(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)^n\mathrm{d}x\right]$.

Pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $-\cos(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \neq 1$, donc :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$$
$$= \operatorname{Im}\left(\int_{[0,\frac{\pi}{2}]}\frac{1 - \left(-\cos(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)^{n+1}}{1 + \cos(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\,\mathrm{d}x\right)$$
$$= \operatorname{Im}\left(\int_{[0,\frac{\pi}{2}]}\frac{1}{1 + \cos(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\,\mathrm{d}x\right) - R_n(x).$$

3) On sait que, pour tout nombre complexe z, $|\operatorname{Im}(z)| \leqslant |z|$, donc :

$$|R_n(x)| \leqslant \int_{[0,\frac{\pi}{2}]}\frac{|\cos(x)|^{n+1}}{|1 + \cos(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}|}\,\mathrm{d}x$$

Or $|1 + \cos(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}| \geqslant 1$, donc $|R_n(x)| \leqslant b_{n+1}$. Cette majoration prouve que $\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$.

4) De ce qui précède, on déduit la convergence de la suite (S_n) et :

$$s = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$$
$$= \operatorname{Im}\left(\int_{[0,\frac{\pi}{2}]}\frac{1}{1 + \cos(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\,\mathrm{d}x\right)$$
$$= \int_{[0,\frac{\pi}{2}]}\frac{-\cos(x)\sin(x)}{1 + 3\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

En posant $u = \cos(x)$, on trouve :

$$s = \int_{[0,1]}\frac{-u}{1 + 3u^2}\,\mathrm{d}u = -\frac{\ln(2)}{3}.$$

2.2.5 Cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^+$

Théorème 20 : Positivité et croissance de l'intégrale

Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions continues par morceaux de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Alors :

- $f \geqslant 0 \Rightarrow \int_{[a,b]} f \geqslant 0$;
- $f \geqslant g \Rightarrow \int_{[a,b]} f \geqslant \int_{[a,b]} g$.

Démonstration

• Soit (φ_n) une suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$. Pour n fixé dans $\mathbb{N}$, définissons la fonction ψ_n en posant :

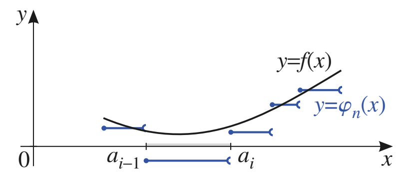
$$\forall t \in [a,b] \quad \psi_n(t) = \max(0, \varphi_n(t)).$$

Vous prouverez que :

- ψ_n est une fonction en escalier sur $[a,b]$;
- ψ_n est une fonction positive sur $[a,b]$;
- $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant \| f - \psi_n \|_\infty \leqslant \| f - \varphi_n \|_\infty$.

La suite de fonctions (ψ_n) est une suite de fonctions en escalier sur $[a,b]$ qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$. Donc :

$$\int_{[a,b]} f = \lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} \psi_n \geqslant 0$$



Doc. 15. *Si sur* $]a_{i-1}, a_i[$ *:*
$\varphi_n(x) = \lambda_\iota \leqslant 0,$
alors :
$\forall x \in]a_{i-1}, a_i[$
$[\varphi_n(x) = \lambda_i \leqslant \psi_n(x) = 0 \leqslant f(x)$

Rapport Mines-Ponts, 1997

« Les fautes de calcul sont trop fréquentes, elles se doublent parfois d'absurdités (trouver une valeur positive pour :

$$\int_0^1 \frac{1}{x-2}\sqrt{\frac{1-x}{x}}\,\mathrm{d}x,$$

par exemple). »

Théorème 21

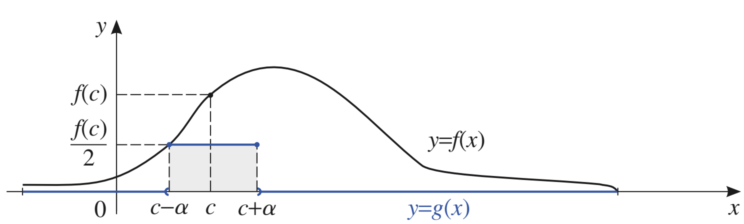
Soit J un segment de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue et positive sur J. Alors :

$$\int_J f = 0 \Leftrightarrow f = 0.$$

Démonstration

Considérons une fonction f continue positive sur J et non identiquement nulle. Alors il existe un point intérieur à J, que l'on notera c, tel que $f(c) > 0$. La continuité de f en c entraîne (*doc.* 16) :

$$\exists \alpha > 0 \ \forall x \in [c-\alpha, c+\alpha] \quad f(x) \geqslant \frac{f(c)}{2}$$



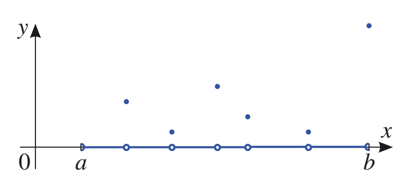
Doc. 16. *L'intégrale de* f *sur* J *est plus grande que l'aire hachurée.*

Appelons g la fonction définie par :

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{f(c)}{2} & \text{si } x \in [c-\alpha, c+\alpha] \\ g(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

g est une fonction de $\mathcal{CM}(J,\mathbb{R})$ et $f \geqslant g$, d'où $\displaystyle\int_J f \geqslant \int_J g = \alpha f(c) > 0.$

L'hypothèse de continuité est fondamentale comme l'illustre le schéma suivant (doc. 17).



Doc. 17. *Graphe d'une fonction positive et d'intégrale nulle sur* $[a,b]$*, mais qui n'est pas identiquement nulle sur cet intervalle.*

▶ ***Pour s'entraîner : ex. 8 et 9.***

2.2.6 Une inégalité fondamentale

Soit $\| \ \|$ une norme sur E. L'application $\| \ \|$ est une application continue de E dans $\mathbb{R}$. Si $[a,b]$ est un segment de $\mathbb{R}$ et f une application continue par morceaux de $[a,b]$ dans E, alors $\| f \|$ est une application continue par morceaux de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

Une majoration effectuée avec soin rapportera des points :

Rapport Mines-Ponts, 1997

« Les fautes de majoration-minoration sont fréquentes (même les plus grossières, du type $\cos(t) \leqslant 1$ *implique* $a\cos(t) \leqslant a$ *). »*

Rapport E3A, 1997.

« Rares sont les candidats qui prennent des précautions de valeurs absolues avant de majorer... »

Théorème 22

Si $[a,b]$ est un segment de $\mathbb{R}$ et f une application continue par morceaux de $[a,b]$ dans E, alors :

$$\left\| \int_{[a,b]} f \right\| \leqslant \int_{[a,b]} \| f \| \leqslant (b-a) \| f \|_\infty .$$

Démonstration

• Soit (φ_n) une suite de fonctions en escalier de $[a,b]$ dans E convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$.

Pour tout entier n, la fonction $\| \varphi_n \|$ est une fonction en escalier de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

De plus :

$$\forall t \in [a,b] \quad \big| \| f(t) \| - \| \varphi_n(t) \| \big| \leqslant \| f(t) - \varphi_n(t) \| \leqslant \| f - \varphi_n \|_\infty$$

La suite de fonctions en escalier $(\| \varphi_n \|)$ converge uniformément vers la fonction $\| f \|$ sur $[a,b]$. Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} \| \varphi_n \| = \int_{[a,b]} \| f \|$$

Par ailleurs, pour tout n, φ_n est une fonction en escalier de $[a,b]$ dans E, donc :

$$\left\| \int_{[a,b]} \varphi_n \right\| \leqslant \int_{[a,b]} \|\varphi_n\| \qquad \textbf{(1)}$$

Sachant que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} \varphi_n = \int_{[a,b]} f$ et que la fonction $\| \ \|$ est continue sur E,

on peut passer à la limite dans (1). On obtient :

$$\left\| \int_{[a,b]} f \right\| \leqslant \int_{[a,b]} \| f \|$$

• $\forall t \in [a,b] \quad \| f(t) \| \leqslant \| f \|_\infty$.

Donc : $$\int_{[a,b]} \| f(t) \| \,\mathrm{d}t \leqslant \int_{[a,b]} \| f \|_\infty = (b-a) \| f \|_\infty$$

► ***Pour s'entraîner : ex.10.***

Application 6

L'égalité $\left| \int_{[a,b]} f \right| = \int_{[a,b]} | f |$

Si f *est une application continue par morceaux de* $[a,b]$ *dans* $\mathbb{C}$*, alors :*

$$\left| \int_{[a,b]} f \right| \leqslant \int_{[a,b]} | f |$$

Dans cette application, nous allons étudier le cas d'égalité lorsque f *est continue.*

1) *Soit* f *une application continue de* $[a,b]$ *dans* $\mathbb{R}$.

Prouver que :

$$\left|\int_{[a,b]} f\right| = \int_{[a,b]} |f|$$

si, et seulement si, f ne change pas de signe sur $[a,b]$.

2) *Soit f une application continue de* $[a,b]$ *dans* $\mathbb{C}$.

Prouver que :

$$\left|\int_{[a,b]} f\right| = \int_{[a,b]} |f|$$

si, et seulement si,

$$\exists\, \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall x \in [a,b] \quad f(x) \in \mathbb{R}^+ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}.$$

Remarque : Géométriquement, cela signifie que les valeurs prises par f sont toutes sur une demi-droite du plan complexe issue de 0.

1) • Si f est de signe constant sur $[a,b]$, alors :

$$\left|\int_{[a,b]} f\right| = \int_{[a,b]} |f|$$

• Réciproquement, si $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geqslant 0$, alors :

$$\int_{[a,b]} (|f| - f) = 0$$

La fonction $|f| - f$ est continue et positive sur $[a,b]$. Son intégrale est nulle, donc elle est identiquement nulle.

Si $\displaystyle\int_{[a,b]} f < 0$, on applique le cas précédent à la fonction $-f$.

2) • Supposons que :

$$\exists\, \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall x \in [a,b] \quad f(x) \in \mathbb{R}^+ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$$

Alors

$$\forall x \in [a,b] \quad f(x) = |f(x)|\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}.$$

Donc :

$$\int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \int_{[a,b]} |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

et

$$\left|\int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \int_{[a,b]} |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

• Réciproquement, supposons que :

$$\left|\int_{[a,b]} f\right| = \int_{[a,b]} |f|$$

Cas particulier : $\displaystyle\int_{[a,b]} f = 0$

Alors $\displaystyle\int_{[a,b]} |f| = 0$. La fonction $|f|$ est continue et positive sur $[a,b]$. Son intégrale est nulle. Elle est identiquement nulle et le problème est résolu.

Cas général : $\displaystyle\int_{[a,b]} f \neq 0$

$\displaystyle\int_{[a,b]} f$ est un nombre complexe non nul que l'on met sous forme trigonométrique :

$$\exists\, \alpha \in \mathbb{R} \quad \int_{[a,b]} f = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \left|\int_{[a,b]} f\right|$$

On peut donc écrire :

$$\left|\int_{[a,b]} f\right| = \int_{[a,b]} f\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}$$
$$= \int_{[a,b]} \mathrm{Re}\left(f\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\right) + \mathrm{i}\int_{[a,b]} \mathrm{Im}\left(f\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\right)$$

On en déduit :

$$\int_{[a,b]} \mathrm{Im}\left(f\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\right) = 0$$

et $\displaystyle\int_{[a,b]} |f| = \left|\int_{[a,b]} f\right| = \int_{[a,b]} \mathrm{Re}\left(f\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\right)$

Donc :

$$\int_{[a,b]} \left(|f| - \mathrm{Re}\left(f\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\right)\right) = 0.$$

Or, pour tout t de $[a,b]$:

$$|f(t)| - \mathrm{Re}\left(f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\right)$$
$$= |f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}| - \mathrm{Re}\left(f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\right) \geqslant 0$$

car, pour tout nombre complexe z, $|z| \geqslant \mathrm{Re}\, z$.

La fonction $|f| - \mathrm{Re}\left(f\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\right)$ est continue et positive sur $[a,b]$. Puisque son intégrale sur $[a,b]$ est nulle, elle est identiquement nulle.

Application 7

Encore un peu de cinématique

Il semble évident que la distance parcourue par un point mobile de l'espace E est inférieure au produit du temps de parcours par la vitesse maximale du point. Prouvez-le.

Notons a et b les instants de départ et d'arrivée du point mobile et $\| \ \|$ une norme euclidienne sur E. La trajectoire du point est paramétrée par l'application :

$$f : \begin{cases} [a,b] \to E \\ t \mapsto f(t) \end{cases}$$

que l'on suppose de classe $\mathcal{C}^1$, comme toujours en cinématique.

La distance parcourue par le point mobile entre les instants a et b est :

$$d = \int_a^b \| f'(t) \| \, \mathrm{d}t.$$

La vitesse maximale du point mobile est $\| f' \|_\infty$.
On a :

$$d \leqslant (b-a) \| f' \|_\infty.$$

2.2.7 Valeur moyenne, inégalité de la moyenne

La valeur moyenne de f sur le segment $[a,b]$ est le vecteur de E :

$$\frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} f.$$

Corollaire 22.1 : Inégalité de la moyenne

Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et f une application continue par morceaux de $[a,b]$ dans E.

La norme de la valeur moyenne de f sur $[a,b]$ est inférieure à la valeur moyenne de la norme de f qui est elle-même inférieure à $\| f \|_\infty$.

$$\left\| \frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} f \right\| \leqslant \frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} \| f \| \leqslant \| f \|_\infty.$$

2.2.8 Intégrale et applications bilinéaires

Dans ce paragraphe, $(E, \| \ \|_E)$, $(F, \| \ \|_F)$ et $(G, \| \ \|_G)$ sont trois espaces vectoriels normés de dimensions finies.

Corollaire 22.2

Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{CM}([a,b], E)$, $g \in \mathcal{CM}([a,b], F)$.
On note $\| f \|_\infty = \sup\limits_{t \in [a,b]} \| f(t) \|_E$ et $\| g \|_\infty = \sup\limits_{t \in [a,b]} \| g(t) \|_F$.

Si B est une application bilinéaire de $E \times F$ dans G, alors :

- $B(f,g) \in \mathcal{CM}([a,b], G)$;
- $\exists K \in \mathbb{R}^+ \quad \left\| \int_{[a,b]} B(f,g) \right\|_G \leqslant K \| f \|_\infty \int_{[a,b]} \| g(t) \|_F \, \mathrm{d}t$
$$\leqslant K (b-a) \| f \|_\infty \| g \|_\infty .$$

Démonstration

• Lorsque E, F et G sont de dimension finie, toute application bilinéaire B de $E \times F$ dans G est continue et il existe un réel K tel que :

$$\forall\ (v, w) \in E \times F \quad \|B\,(v, w)\|_G \leqslant K\|v\|_E\|w\|_F\,.$$

Puisque f et g sont continues par morceaux sur $[a, b]$, l'application suivante :

$$\begin{cases} [a, b] \to E \times F \\ t \qquad \mapsto (\,f(t), g(t)) \end{cases}$$

est continue par morceaux sur $[a, b]$.

On en déduit que l'application $B\,(f, g) : (t \mapsto B\,(f(t), g(t)))$ est continue par morceaux sur $[a, b]$.

• De plus :

$$\left\| \int_{[a,b]} B\,(\,f, g) \right\|_G \leqslant \int_{[a,b]} \|B\,(f\,(t)\,, g\,(t))\,\|_G\,\mathrm{d}\,t\,.$$

Donc :

$$\left\| \int_{[a,b]} B\,(\,f, g) \right\|_G \leqslant \int_{[a,b]} K\|\,f\,(t)\,\|_E\|g(t)\|_F\,\mathrm{d}\,t \leqslant K(b-a)\|\,f\,\|_\infty\|g\|_\infty$$

2.3. Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle

Dans ce paragraphe, E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

2.3.1 La fonction caractéristique

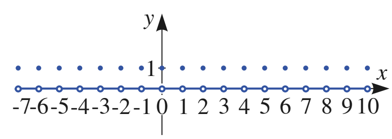
Soit K une partie de $\mathbb{R}$. La **fonction caractéristique** de K est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, notée χ_K, et définie par :

$$\chi_K : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \ \mapsto \chi_K(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \notin K \\ 1 \text{ si } t \in K \end{cases} \end{cases}$$

Exemples

La fonction caractéristique de $\varnothing$ est la fonction nulle.

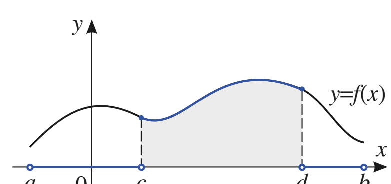
La fonction caractéristique de $\mathbb{Z}$ a le graphe ci-contre (*doc.* 18).



Doc. 18. $\chi_{\mathbb{Z}}(x) = 0$ *si* x *n'est pas un entier.*
$\chi_{\mathbb{Z}}(x) = 1$ *si* x *est un entier.*

> **Théorème 23**
>
> Soit J et K deux segments tels que $K \subset J$ et f une application continue par morceaux de J dans E. On note $\widetilde{f}$ la restriction de f à K. Les deux propriétés suivantes sont vérifiées :
>
> • $\widetilde{f} \in \mathcal{CM}(K, E)$;
>
> • $\displaystyle\int_J f\chi_K = \int_K \widetilde{f}$.

Dans la suite, nous noterons cette intégrale $\displaystyle\int_K f$ (*doc.* 19).



Doc. 19. *Sur ce schéma :* $J = [a, b]$, $K = [c, d]$, f *est une fonction de* $[a, b]$ *dans* $\mathbb{R}^+$.
En noir, se trouve le graphe de f.
En couleur, se trouve le graphe de $f\chi_K$.
L'aire de la partie grisée représente

$$\int_K f = \int_J f\chi_K\,.$$

2.3.2 La relation de Chasles

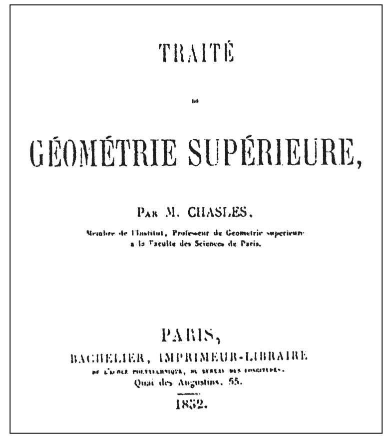
Théorème 24

Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$, f une application continue par morceaux de $[a,b]$ dans E et c un point de $]a,b[$. Alors :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$$

Démonstration

Les fonctions $\chi_{[a,c]} f + \chi_{[c,b]} f$ et f sont continues par morceaux sur $[a,b]$ et diffèrent uniquement en c. Donc leurs intégrales sur $[a,b]$ sont égales.



TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE,

PAR M. CHASLES,

Membre de l'Institut, Professeur de Géométrie supérieure à la Faculté des Sciences de Paris.

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

Quai des Augustins, 55.

1852.

Michel Chasles, *mathématicien français* (1793-1880). *Polytechnicien, il devient agent de change. Ruiné, il retourne aux mathématiques et excelle en géométrie.*

2.3.3 Extension de l'intégrale

Dans ce paragraphe, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f est une application continue par morceaux de I dans E.

Si J est un segment inclus dans I, alors la restriction de f à J est continue par morceaux et son intégrale sur ce segment est notée $\int_J f$.

Étant donnés deux éléments a et b de I, on définit l'intégrale de a à b de f, notée $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, par la formule :

$$\int_a^b f = \begin{cases} \int_{[a,b]} f & \text{si } a < b \\ 0_E & \text{si } a = b \\ -\int_{[b,a]} f & \text{si } a > b \end{cases}$$

On remarque que :

$$\forall (a,b) \in I^2 \quad \int_a^b f = -\int_b^a f$$

Si f est continue par morceaux sur un intervalle I, pour tous a et b de I, on a :

$$\left\| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leqslant \int_{\min(a,b)}^{\max(a,b)} \| f(t) \| \,\mathrm{d}t$$

2.3.4 Invariance par translation

Théorème 25 : Invariance par translation

Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$, f une application continue par morceaux de $[a,b]$ dans E et x_0 un réel. On définit l'application g sur $[x_0+a, x_0+b]$ en posant :

$$g : \begin{cases} [x_0+a, x_0+b] \to E \\ \qquad x \mapsto g(x) = f(x - x_0) \end{cases}$$

Alors :

- $g \in \mathcal{CM}([x_0+a, x_0+b], E)$.
- $\int_{[a,b]} f = \int_{[x_0+a, x_0+b]} g$.

L'invariance par translation est une conséquence de la formule de changement de variable :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a+x_0}^{b+x_0} f(t-x_0)\,\mathrm{d}t$$

que nous généraliserons aux fonctions vectorielles. Ce *théorème* est immédiat pour des fonctions en escalier. Pour une fonction continue par morceaux, f, revenir à la définition de :

$$\int_{[a,b]} f.$$

2.4. Des normes sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$

2.4.1 Norme de la convergence en moyenne

L'espace vectoriel $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ est muni de la norme N_1 définie par :

$$N_1 : \begin{cases} \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K}) \to \mathbb{R} \\ \qquad f \mapsto N_1(f) = \displaystyle\int_{[a,b]} |f| \end{cases}$$

Cette norme est appelée **norme de la convergence en moyenne**.

La norme N_1 a été donnée comme exemple de norme au *chapitre* 2. La continuité de f est essentielle pour obtenir l'implication :

$$N_1(f) = 0 \Rightarrow f = 0.$$

2.4.2 Convergence uniforme et convergence en moyenne (*PSI*)

L'espace vectoriel $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ est muni de la norme de la convergence uniforme.

$$\forall f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K}) \qquad \left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f| = N_1(f) \leqslant (b-a)\|f\|_\infty.$$

On en déduit le théorème suivant :

Théorème 26

Soit f une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$ et (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$. Alors :

- la suite (f_n) converge en moyenne vers f : $\lim\limits_{n\to+\infty} N_1(f_n - f) = 0$;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_{[a,b]} f_n = \int_{[a,b]} f$.

Exemples

■ Étudier la suite (u_n) où $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{n\mathrm{e}^{-x}}{2n+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f_n$.

Pour tout n, f_n est une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ (*doc.* 20).

La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2}$.

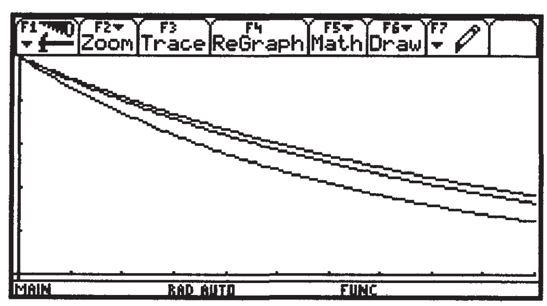
La convergence est-elle uniforme ?

$$\forall x \in [0,1] \quad |f(x) - f_n(x)| = \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{2(2n+x)} \leqslant \frac{1}{4n}$$

La suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

La suite (u_n) converge et :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{n\mathrm{e}^{-x}}{2n+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1-\mathrm{e}^{-1}}{2}.$$



Doc. 20. *Sur cet écran de TI, se trouvent, de bas en haut, les graphes de* f_1, f_5 *et* f. *La fenêtre utilisée est* $0 \leqslant x \leqslant 1$ *et* $0 \leqslant y \leqslant 0{,}5$. *Les graduations sur les axes sont espacées de* $0{,}1$.

⚠ *Si la suite de fonctions continues* (f_n) *converge simplement, mais non uniformément vers* f, *le théorème ne s'applique plus (cf. exercice 12).*

■ Étudier la suite de fonctions (f_n) définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = x^n$.

• La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction en escalier f, définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 0 \text{ si } x \neq 1 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

• La suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0,1]$ car f n'est pas continue.

• Pour tout entier n, $\displaystyle\int_0^1 |f_n| = \frac{1}{n+1}$. Donc la suite de fonctions (f_n) converge en moyenne vers la fonction nulle sur $[0,1]$.

On en déduit que la norme de la convergence uniforme $\| \|_\infty$ et la norme de la convergence en moyenne N_1 ne sont pas des normes équivalentes sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$.

Théorème 27

Soit $\sum u_n$ une série d'applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$, convergeant uniformément sur $[a,b]$ vers S, alors la série numérique $\displaystyle\sum \int_{[a,b]} u_n$ est convergente et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{[a,b]} u_n(x)\,\mathrm{d}x \right) = \int_{[a,b]} S = \int_{[a,b]} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \right) \mathrm{d}x.$$

2.4.3 Convergence normale et convergence en moyenne

Théorème 28

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$, convergeant normalement sur $[a,b]$, alors :

• la série numérique $\displaystyle\sum N_1(u_n) = \sum \int_{[a,b]} |u_n|$ est convergente ;

• on note S la fonction somme de la série, elle est continue sur $[a,b]$ et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{[a,b]} u_n(x)\,\mathrm{d}x \right) = \int_{[a,b]} S = \int_{[a,b]} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \right) \mathrm{d}x$$

$$\left| \int_{[a,b]} S \right| \leqslant N_1(S) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} N_1(u_n) \leqslant (b-a) \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|_\infty.$$

Démonstration

■ La série à termes réels $\sum \|u_n\|_\infty$ est convergente. De plus, nous savons que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant N_1(u_n) \leqslant (b-a)\,\|u_n\|_\infty \qquad \textbf{(1)}$$

Cet encadrement permet de conclure que la série numérique $\sum N_1(u_n)$ est convergente.

■ Les fonctions u_n sont continues sur $[a,b]$ et la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur le segment $[a,b]$. Donc S est continue sur $[a,b]$.

- $$\left|\int_{[a,b]} S\right| \leqslant \int_{[a,b]} |S| = N_1(S).$$

- De l'encadrement (**1**), on déduit aussi :

$$\sum_{n=0}^{\infty} N_1(u_n) \leqslant (b-a)\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|_\infty.$$

- Notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ la fonction somme partielle d'indice n de la série $\sum u_n$. On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad N_1(S_n) = \int_{[a,b]} \left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leqslant \int_{[a,b]} \sum_{k=0}^{n} |u_k| = \sum_{k=0}^{n} \int_{[a,b]} |u_k| = \sum_{k=0}^{n} N_1(u_k)$$

On en déduit le dernier point du théorème.

Corollaire 28.1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\sum u_n$ une série de fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$. Si cette série de fonctions converge normalement sur tout segment inclus dans I, alors :

$$\forall\,(x,y) \in I^2 \quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_x^y u_n(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_x^y \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\right)\mathrm{d}t$$

(*PSI*) Ce résultat s'applique si la série de fonctions converge uniformément sur tout segment contenu dans I .

▶ ***Pour s'entraîner : ex. 11.***

Application 8

Développement en série de la fonction logarithme sur $]0,2]$

Pour tout entier n et tout réel x de $]-1,1[$, on pose $u_n(x) = (-1)^n x^n$.

1) *Soit $a \in\,]0,1[$. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[-a,a]$.*

2) *Montrer que, pour tout x de $]-1,1[$,*

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

3) *Que dire des deux fonctions et des deux séries apparaissant à la question précédente lorsque x n'est pas dans $]-1,1[$?*

4) *Montrer que, pour tout x de $]0,2]$:*

$$\ln x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}.$$

1) Ce résultat a déjà été vu. On peut écrire :

$$\forall\, x \in [-a,a] \quad 0 \leqslant |u_n(x)| \leqslant a^n$$

Le majorant a^n est indépendant de x. La convergence de la série géométrique $\sum a^n$ permet de conclure.

2) Les hypothèses du *corollaire* 28.1 sont satisfaites, donc :

$\forall x \in]-1,1[$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^x u_n(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\right)\mathrm{d}t$$

Soit :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \ln(1+x)$$

En remplaçant x par $-x$, on trouve la deuxième égalité.

3) La fonction $(x \longmapsto \ln(1+x))$ est définie pour $x > -1$.

La série de fonctions $\sum(-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ converge sur $]-1,1]$.

De plus, le calcul de $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{n+1}$, en écrivant $\dfrac{1}{n+1} = \displaystyle\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t$ montre que $\ln 2 = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$.

On procède de même pour la fonction $(x \longmapsto \ln(1-x))$ en remplaçant x par $-x$.

4) Pour tout x de $]0,2]$, $x-1$ est dans $]-1,1]$ et $\ln x = \ln(1+(x-1)) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}$.

2.4.4 Norme de la convergence en moyenne quadratique sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$

2.4.4.1 *Le cas réel*

L'application suivante :

$$\langle \mid \rangle : \begin{cases} \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \times \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ (f,g) \mapsto \langle f \mid g \rangle = \displaystyle\int_{[a,b]} f\,g \end{cases}$$

définit un **produit scalaire** sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

On note N_2 la norme sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ associée à ce produit scalaire. Elle est appelée la **norme de la convergence en moyenne quadratique**.

Par définition, si f est une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$:

$$N_2(f) = \sqrt{\int_{[a,b]} f^2}$$

On rappelle l'inégalité suivante :

Théorème 29-$\mathbb{R}$. Inégalité de Cauchy-Schwarz
Soit f et g deux éléments de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Alors :

$$\left(\int_{[a,b]} fg\right)^2 \leqslant \left(\int_{[a,b]} f^2\right)\left(\int_{[a,b]} g^2\right)$$
$$|\langle f \mid g \rangle| \leqslant N_2(f)\,N_2(g)$$

L'égalité a lieu si, et seulement si, f et g sont liées.

⚠ *La continuité est essentielle pour prouver l'implication*

$$\left(\langle f \mid f \rangle = 0 \Rightarrow f = 0\right).$$

En effet, si $\langle f \mid f \rangle = 0$, alors : $\displaystyle\int_{[a,b]} f^2 = 0$ et l'application f^2 est continue et positive sur $[a,b]$. Son intégrale sur $[a,b]$ est nulle, donc f est identiquement nulle.

***Hermann Schwarz**, mathématicien allemand* (1843-1921).

En particulier, en prenant $g = 1$, on trouve :

$$\left(\int_{[a,b]} f\right)^2 \leqslant (b-a)\int_{[a,b]} f^2.$$

L'égalité a lieu si, et seulement si, f est constante.

2.4.4.2 *Le cas complexe*

L'application suivante :

$$\langle \mid \rangle : \begin{cases} \mathcal{C}([a,b],\mathbb{C}) \times \mathcal{C}([a,b],\mathbb{C}) \to \mathbb{C} \\ \qquad\qquad (f,g) \mapsto \langle f \mid g \rangle = \displaystyle\int_{[a,b]} \overline{f}\, g \end{cases}$$

définit un **produit scalaire** sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$.

Comme dans le cas réel, on note N_2 la norme sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$ associée à ce produit scalaire. Elle est appelée la norme de la convergence en moyenne quadratique.

De même que dans le cas réel, la continuité de f est essentielle pour obtenir la dernière implication.

Par définition, si f est une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$:

$$N_2(f) = \sqrt{\int_{[a,b]} |f|^2}$$

Théorème 29-$\mathbb{C}$. Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit f et g deux éléments de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$. Alors :

$$\left|\int_{[a,b]} fg\right|^2 \leqslant \left(\int_{[a,b]} |f|\,|g|\right)^2 \leqslant \left(\int_{[a,b]} |f|^2\right)\left(\int_{[a,b]} |g|^2\right)$$

L'égalité $\left|\int_{[a,b]} fg\right|^2 = \left(\int_{[a,b]} |f|^2\right)\left(\int_{[a,b]} |g|^2\right)$ a lieu si, et seulement si, f et g sont liées.

Exemples

- En utilisant la fonction constante $g = 1$, vous prouverez que :

$$\left|\int_{[a,b]} f\right|^2 \leqslant (b-a)\int_{[a,b]} |f|^2.$$

- Vous démontrerez aussi que :

$$\left|\int_{[a,b]} t\, f(t)\,\mathrm{d}t\right|^2 \leqslant \frac{b^3-a^3}{3}\int_{[a,b]} |f|^2.$$

► ***Pour s'entraîner : ex. 12 et 13.***

Application 9

Étude de $\left[\int_a^b f\right]\left[\int_a^b \frac{1}{f}\right]$

Soit a et b deux réels tels $a < b$. On désigne par F l'ensemble des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ qui ne s'annulent pas sur $[a, b]$.

1) *Calculer* $\inf_{f \in F} \left[\int_a^b f\right]\left[\int_a^b \frac{1}{f}\right]$.

2) *Déterminer pour quels éléments de f cette borne inférieure est atteinte.*

3) *Calculer* $\left[\int_a^b f_n\right]\left[\int_a^b \frac{1}{f_n}\right]$ *dans le cas où* $f_n(x) = \mathrm{e}^{nx}$. *Qu'en concluez-vous ?*

1) D'après le théorème des valeurs intermédiaires, tout élément de F est de signe constant sur $[a, b]$. De plus :

$$\left[\int_a^b f\right]\left[\int_a^b \frac{1}{f}\right] = \left[\int_a^b -f\right]\left[\int_a^b -\frac{1}{f}\right]$$

Donc :

$$\inf_{f \in F}\left[\int_a^b f\right]\left[\int_a^b \frac{1}{f}\right] = \inf_{f \in G}\left[\int_a^b f\right]\left[\int_a^b \frac{1}{f}\right]$$

où G est l'ensemble des éléments de F à valeurs strictement positives.

Pour tout élément f de G, l'*inégalité de Cauchy-Schwarz* permet d'écrire :

$$\left[\int_a^b f\right]\left[\int_a^b \frac{1}{f}\right] = \left[\int_a^b \left(\sqrt{f}\right)^2\right]\left[\int_a^b \left(\frac{1}{\sqrt{f}}\right)^2\right] \geqslant \left(\int_a^b \sqrt{f}\frac{1}{\sqrt{f}}\right)^2 = (b-a)^2$$

De plus, si f est une application constante, alors :

$$\left[\int_a^b f\right]\left[\int_a^b \frac{1}{f}\right] = (b-a)^2$$

Donc :

$$\inf_{f \in F}\left[\int_a^b f\right]\left[\int_a^b \frac{1}{f}\right] = (b-a)^2$$

2) On vient de voir que cette borne inférieure est atteinte pour toutes les fonctions constantes. Réciproquement, pour tout élément de G tel que :

$$\left[\int_a^b f\right]\left[\int_a^b \frac{1}{f}\right] = (b-a)^2$$

on a :

$$\left[\int_a^b \left(\sqrt{f}\right)^2\right]\left[\int_a^b \left(\frac{1}{\sqrt{f}}\right)^2\right] = \left(\int_a^b \sqrt{f}\frac{1}{\sqrt{f}}\right)^2$$

C'est le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Les fonctions $\sqrt{f}$ et $\frac{1}{\sqrt{f}}$ sont colinéaires.

On en déduit que f est constante. Pour les fonctions négatives, on applique ce qui précède à $-f$.

3) $$\left[\int_a^b \mathrm{e}^{nx}\,\mathrm{d}x\right]\left[\int_a^b \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x\right] = \frac{\mathrm{e}^{n(b-a)} + \mathrm{e}^{-n(b-a)} - 2}{n^2}.$$

On trouve que :

$$\sup_{f \in F}\left[\int_a^b f\right]\left[\int_a^b \frac{1}{f}\right] = +\infty.$$

2.4.5 Comparaison des trois normes

Théorème 30

Pour toute application f de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$:

$$N_2(f) \leqslant \sqrt{b-a}\, \| f \|_\infty$$

La fin de ce paragraphe est au programme de la section PSI uniquement.

Pour toute application f de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$:

$$N_1(f) \leqslant \sqrt{b-a}\,N_2(f).$$

La convergence uniforme d'une suite de fonctions entraîne sa convergence en moyenne quadratique et la convergence en moyenne quadratique d'une suite de fonctions entraîne sa convergence en moyenne :

$$\lim_{n\to+\infty} \| f - f_n \|_\infty = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} N_2(f - f_n) = 0\,;$$

$$\lim_{n\to+\infty} N_2(f - f_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} N_1(f - f_n) = 0.$$

En combinant les deux, on retrouve le résultat vu au **2.4.2.** :

$$\lim_{n\to+\infty} \| f - f_n\|_\infty = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} N_1(f - f_n) = 0$$

Mais les réciproques de ces implications sont fausses.

Exemples

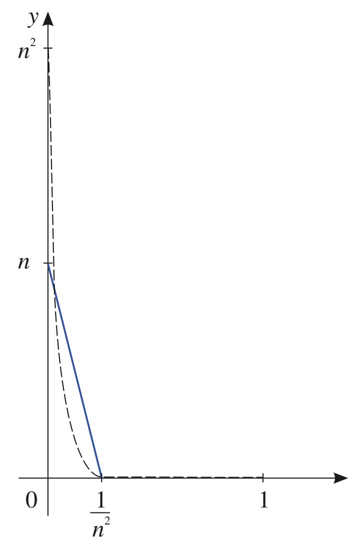
- $[a,b] = [0,1]$ et $f_n(x) = x^n$.

La suite (f_n) converge vers la fonction nulle en moyenne quadratique, mais pas uniformément.

- $[a,b] = [0,1]$. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $[0,1]$ (*doc.* 21) :

$$g_n(x) = \begin{cases} n(1-n^2x) & \text{si } x \in \left[0, \dfrac{1}{n^2}\right] \\ 0 & \text{si } x \in \left[\dfrac{1}{n^2}, 1\right] \end{cases}$$

La suite (g_n) converge en moyenne vers la fonction nulle, mais pas en moyenne quadratique.



Doc. 21. *Graphe des fonctions* g_n *et* g_n^2 *.*

FICHE MÉTHODE

- Pour montrer qu'**une application f de l'intervalle I dans E est dérivable en x_0**, on peut :

- utiliser les opérations sur les fonctions dérivables ;
- chercher si f peut s'écrire :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)V + (x - x_0)\varepsilon(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0_E \ ;$$

- montrer que la limite, lorsque x tend vers x_0, de $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe ;
- choisir une base de E et montrer que les applications coordonnées de f sont dérivables en x_0.

- Pour montrer qu'**une application φ de l'intervalle J dans l'intervalle I de classe $\mathcal{C}^k$** est un **$\mathcal{C}^k$-difféomorphisme** de J sur I, on prouve que :

- φ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J ;
- $\forall t \in J \quad \varphi'(t) \neq 0$;
- $\varphi(J) = I$.

- Pour montrer qu'**une application f de I dans E**, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, est **constante sur I**, il suffit de prouver que :

- f est continue sur I ;
- $\mathrm{D}f = 0$.

- (*PSI*) Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, E un espace vectoriel normé de dimension finie, f une fonction de $\mathcal{C}([a, b], E)$ et (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{C}([a, b], E)$ convergeant simplement vers f sur $[a, b]$.

Pour montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_{[a,b]} f_n = \int_{[a,b]} f$, il suffit de prouver que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

- Soit $\sum u_n$ une série d'applications continues de $[a, b]$ dans E, convergeant simplement sur $[a, b]$ vers S.

Pour montrer que **la série numérique $\displaystyle\sum \int_{[a,b]} u_n$ converge**, on peut :

- montrer la convergence normale sur $[a, b]$ de la série de fonctions $\sum u_n$;
- (***PSI***) établir que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers S ;
- prouver que $\displaystyle\int_{[a,b]} \left(\sum_{n=N}^{\infty} u_n(x) \right) \mathrm{d}x$ tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$.

On a alors : $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{[a,b]} u_n(x)\,\mathrm{d}x \right) = \int_{[a,b]} S = \int_{[a,b]} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \right) \mathrm{d}x.$

TD

Les formules de quadrature de Gauss (formules d'intégration approchée)

Cette méthode a été publiée en 1816.

Notations (les résultats énoncés ici seront admis)

• On désigne par $E = \mathcal{C}^0\big([-1,1],\mathbb{R}\big)$ l'espace vectoriel des applications continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ que l'on munit de la norme $\| \|_\infty$. Pour $g \in E$:

$$\|g\|_\infty = \sup\{|g(t)|, t \in [-1,1]\}.$$

• Pour $m \in \mathbb{N}, P_m$ désigne l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à m.

• Dans le problème, w désigne un élément de E vérifiant : $\forall x \in [-1,1],\ \ w(x) > 0$.

• Pour f et g dans $E, ((f,g))$ désigne le réel :

$$\big((f,g)\big) = \int_{-1}^{1} f(x)\,g(x)w(x)\,\mathrm{d}x \qquad \textbf{(1)}$$

ce qui définit une application bilinéaire symétrique de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

Première partie

1) Montrer que ((.,.)) est un produit scalaire sur E.

On se propose de construire une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E qui vérifie :

a) p_n est un polynôme par rapport à la variable x, de degré n et dont le coefficient de x^n est 1 ;

b) pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout $q \in P_{n-1}$, on a $((p_n, q)) = 0$ (c'est-à-dire que p_n est orthogonal à P_{n-1}).

2) Montrer qu'il existe au plus une telle suite.

3) Montrer que $p_0 = 1$ et $p_1(x) = x - \dfrac{((p_0, x))}{\big((p_0, p_0)\big)}$.

4) On suppose que $n \geqslant 2$ et que p_{n-1} et p_{n-2} sont connus. Soit alors α_n et β_n les nombres réels :

$$\beta_n = \frac{\big((p_{n-1}, p_{n-1})\big)}{\big((p_{n-2}, p_{n-2})\big)},\ \ \alpha_n = \frac{\big((xp_{n-1}, p_{n-1})\big)}{\big((p_{n-1}, p_{n-1})\big)}$$

Montrer que :

$$p_n = (x - \alpha_n)p_{n-1} - \beta_n p_{n-2} \qquad \textbf{(2)}$$

vérifie **(a)** et **(b)** si les p_m, pour $m \in \{0,\ldots,n-1\}$, vérifient **(a)** et **(b)**. Conclure à l'existence des (p_n).

5) *Application*

On suppose que $w(x) = 1$.

Calculer $p_0, p_1, p_2, p_3,$ et p_4.

On revient au cas général où w est quelconque.

On désire montrer que p_n possède n racines simples et réelles. Prenons donc $n \geqslant 1$.

6) Montrer que p_n possède dans $]-1,1[$ au moins une racine réelle de multiplicité impaire (on pourra remarquer que $\displaystyle\int_{-1}^{1} p_n(x)w(x)\,\mathrm{d}x = 0$).

7) Soit alors $(x_1, \ldots, x_m)$ pour $m \geqslant 1$ les racines de p_n qui appartiennent à $]-1, 1[$ et qui sont de multiplicité impaire. En considérant le polynôme π tel que $\pi(x) = (x - x_1) \ldots (x - x_m)$ et l'intégrale $\big((p_n, \pi)\big)$, montrer que $m = n$ et conclure que p_n possède n racines distinctes qui appartiennent à $]-1, 1[$.

Deuxième partie

Une formule d'intégration approchée sur $[-1, 1]$ est la donnée de $k+1$ éléments distincts de $[-1, 1]$ notés $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant k}$ et de $k+1$ nombres réels $\lambda_i : (\lambda_i)_{0 \leqslant i \leqslant k}$. On écrit alors :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, w(x)\, \mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{k} \lambda_i\, f(x_i) \tag{3}$$

Dans cette définition, k est un entier naturel arbitraire, on dira que **(3)** est une formule à $k+1$ points. On associe alors à **(3)** une application Δ de E dans $\mathbb{R}$ définie ainsi. Pour $f \in E$,

$$\Delta(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\, w(x)\, \mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{k} \lambda_i\, f(x_i) \tag{4}$$

On dira que **(3)** est d'ordre $m \in \mathbb{N}$ si :

$$\forall\, p \in P_m, \quad \Delta(p) = 0 \tag{5}$$

1) Montrer que $\Delta : E \mapsto \mathbb{R}$ est une application linéaire de l'espace vectoriel normé E dans $\mathbb{R}$.

2) Montrer qu' une formule d'intégration approchée à $k+1$ points d'ordre m est telle que $m \leqslant 2k+1$.

On se propose de montrer qu'il existe une formule d'intégration approchée à $k+1$ points qui soit d'ordre $2k+1$.

On désigne par $x_0, \ldots x_k$ les $k+1$ racines de p_{k+1} (voir la *question* I.7). On note l_i, pour $i \in \{0, \ldots, k\}$, le polynôme de Lagrange :

$$l_i(x) = \prod_{\substack{0 \leqslant j \leqslant k \\ j \neq i}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

et on introduit les réels :

$$\lambda_i = \big((l_i, 1)\big) = \int_{-1}^{1} l_i(x)\, w(x)\, \mathrm{d}x \tag{6}$$

Soit alors, pour $f \in E$, $p(f)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points $x_0, \ldots x_k$.

3) Montrer que $p(f) = \sum\limits_{i=0}^{k} f(x_i) l_i$.

4) Montrer que :

$$\sum_{i=0}^{k} \lambda_i\, f(x_i) = \int_{-1}^{1} p(f)(x)\, w(x)\, \mathrm{d}x \tag{7}$$

5) En déduire que, pour ce choix de x_i et λ_i , la formule d'intégration approchée **(3)** est au moins d'ordre k.

6) Soit $p \in P_{2k+1}$. Montrer qu'il existe $q \in P_k$ et $r \in P_k$ tel que $p = ql + r$, où l est le polynôme $\prod\limits_{i=0}^{k} (x - x_i)$.

7) Montrer que (avec les notations de la *question* précédente) :

$$\int_{-1}^{1} p(x)\, w(x)\, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} r(x)\, w(x)\, \mathrm{d}x$$

8) Conclure que si les (x_i) sont les racines de p_{k+1} et les (λ_i) sont donnés par **(6)**, alors **(3)** est une formule d'intégration approchée à $k+1$ points qui est d'ordre $2k+1$.

Troisième partie

Dans cette partie, on suppose que $w(x) = 1$ pour tout x de $[-1, 1]$ et on choisit pour (x_i) et (λ_i) ceux obtenus à la *question* de la deuxième partie de sorte que **(3)**, qui s'écrit ici :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{k} \lambda_i\, f(x_i) \qquad \textbf{(8)}$$

soit d'ordre $2k+1$ (k est un entier arbitraire).
On admet alors l'estimation d'erreur suivante. Pour $f \in \mathcal{C}^{2k+2}([-1,1];\mathbb{R})$, on a :

$$|\Delta(f)| \leqslant \frac{2^{2k+3}\big((k+1)!\big)^4}{(2k+3)\big((2k+2)!\big)^3} \| f^{(2k+2)}\|_\infty \qquad \textbf{(9)}$$

1) En utilisant que $p_3(x) = x^3 - \dfrac{3}{5}x$, montrer que **(8)** s'écrit pour $k = 2$:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{9}\left[5\, f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + 8\, f(0) + 5\, f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right] \qquad \textbf{(10)}$$

2) Écrire **(9)** dans ce cas.

3) Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{2+x}\,\mathrm{d}x$.

4) Montrer que **(9)** s'écrit pour $f(x) = \sqrt{2+x}$:

$$|\Delta(f)| \leqslant \frac{3}{2^7 \cdot 5^2} = 9{,}375\ 10^{-4}$$

5) Avec combien de chiffres significatifs faut-il évaluer le second membre de **(10)** ?

6) Évaluer le second membre de **(10)** et $\Delta(f)$. Conclusion ?

7) On rappelle la formule d'intégration approchée de Simpson (formule à 3 points) :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{3}[f(-1) + 4f(0) + f(1)] \qquad \textbf{(11)}$$

Comparer, sur l'exemple précédent $f(x) = \sqrt{2+x}$, les valeurs approchées obtenues par **(10)** et **(11)**.
En étudiant l'ordre de **(11)**, expliquez ce que vous avez constaté.

Exercices

1 **1)** Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle I et à valeurs réelles. Écrire l'équation de la tangente et de la normale au graphe de f au point d'abscisse x_0.

2) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et Γ une application de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{R}^2$: $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$.

Écrire l'équation de la tangente et de la normale à la courbe paramétrée par Γ en $\Gamma(t_0)$, lorsque le vecteur vitesse en ce point n'est pas nul.

3) Écrire l'équation de la tangente au point (x_0, y_0) du cercle de centre O et de rayon R.

2 **1)** Montrer que la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$ est prolongeable par continuité à $]-\pi, \pi[$.

2) Le prolongement obtenu est-il de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi, \pi[$?

3 Calculer les dérivées n-ième de g et h définies par :

$$g(x) = \frac{x-4}{x^2 - 5x + 6} \;;\quad h(x) = \frac{8x}{(x-1)^2\,(x^2-1)}.$$

4 Calculer la valeur de $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\dfrac{x^{314\,16}}{x^2-1}$ en 0 pour tout n.

5 Soit $f(x) = \operatorname{Arctan}(x)$. Utiliser la relation $(1+x^2)\,f'(x) = 1$ et la formule de Leibniz pour calculer $f^{(n)}(0)$.

6 Déterminer les limites des suites définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2} \quad ; \quad v_n = \frac{1}{n}\left[\prod_{k=1}^{n}(k+n)\right]^{1/n}$$

7 On note α et β les racines du polynôme $X^2 - X + \dfrac{1}{10}$.

Prouver que, pour tout P de $\mathbb{R}_5[X]$:

$$\int_{[0,1]} P = \frac{1}{18}\left(5\,P(\alpha) + 8P\left(\frac{1}{2}\right) + 5\,P\big(\beta\big)\right).$$

8 **1)** Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{[0,1]}\frac{\mathrm{e}^{-nt}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

2) Calculer $\displaystyle\lim_{a\to 0}\int_{[0,\pi/2]}\cos\big(a\sin(t)\big)\,\mathrm{d}t$.

9 Soit f une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_{[0,1]} f = \frac{1}{2}$.

Prouver l'existence d'un x de $]0,1[$ tel que $f(x) = x$.

10 Dans cet exercice, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et f une application continue par morceaux de $[a,b]$ dans E. Pour tout entier $n > 0$, on pose :

$$R_n = \int_{[a,b]} f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{b-a}{n}\,f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

1) $E = \mathbb{R}$ et f est croissante. Prouver que :

$$0 \leqslant R_n \leqslant \frac{b-a}{n}\,(f(b) - f(a)).$$

2) $\|\ \|$ désigne une norme sur E et c un réel > 0. On suppose que f est c-lipschitzienne par rapport à cette norme.

Prouver que : $\|R_n\| \leqslant \dfrac{c(b-a)^2}{2n}$.

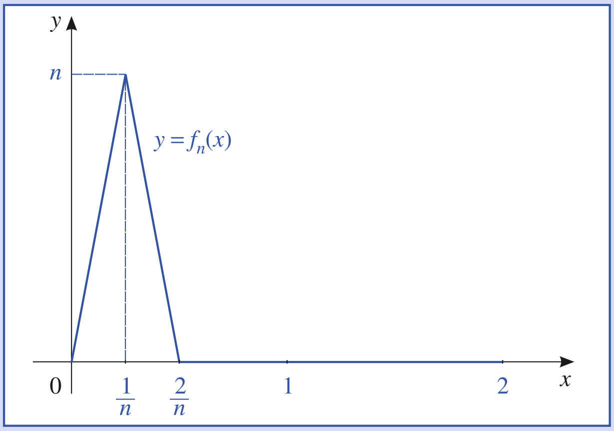
11 Dans cet exercice, t est un réel $\geqslant 0$ fixé. Pour tout x de $[0,1]$ et tout entier $n \geqslant 0$, on pose :

$$u_n(x) = (-1)^n x^{n+t},\quad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x),\quad f(x) = \frac{x^t}{x+1}.$$

1) Prouver que la série de fonctions $\sum u_n$ converge en moyenne vers f sur $[0,1]$.

2) Cette série converge-t-elle simplement sur $[0,1]$?

12 Pour tout entier $n > 0$, on définit la fonction f_n sur le segment $[0,2]$ à l'aide du *schéma* suivant.



1) Prouver que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 2]$.

2) Montrer que cette suite ne converge pas en moyenne.

3) Que dire de la convergence en moyenne quadratique ?

13 Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ contenant plus de deux points et f une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, continue et positive.

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $I_n = \int_a^b f^n(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n I_{n+2} \geqslant (I_{n+1})^2$$

Que dire si f n'est pas à valeurs positives ?

14 Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

1) Pour tout entier $n > 0$, on pose $f_n(x) = x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)$.

Montrer que :

$$f_n^{(n)}(x) = \left[\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}\right] f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \textbf{(1)}$$

2) En déduire que :

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[x^{n-1}\mathrm{e}^{1/x}] = \frac{(-1)^n \mathrm{e}^{1/x}}{(x^{n+1})}.$$

3) Prouver de même que :

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[x^{n-1}\ln(x)] = \frac{(n-1)!}{x}.$$

15* **Théorème de Darboux**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$, dérivable sur I. Prouver que $f'(I)$ est un intervalle.

N. B. : Ici, on ne suppose pas f' continue.

16* Soit (P, Q) un couple de polynômes réels, non constants, scindés dans $\mathbb{R}[X]$ et n'admettant que des racines simples. On suppose, de plus, qu'entre deux racines de l'un, il y a toujours une racine de l'autre et qu'ils n'ont pas de racine commune.

1) Montrer que le polynôme $\alpha P + \beta Q$ reste scindé et à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$ lorsque (α, β) décrit $\mathbb{R}^2$.

2) Montrer que, pour tout réel α, le polynôme $P + \alpha P'$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et n'admet que des racines simples.

3) Soit $R = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_{n-1} X + a_n$ un polynôme scindé de $\mathbb{R}[X]$, de degré n.

Prouver que le polynôme :

$$S = a_0 P + a_1 P' + \cdots + a_{n-1} P^{(n-1)} + a_n P^{(n)}$$

est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et n'admet que des racines simples.

17* Déterminer la limite de $T_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \left(\mathrm{ch}\,\frac{1}{\sqrt{k}}\right) - n$.

18 Calculer, à l'aide de sommes de Riemann, l'intégrale :

$$\int_0^\pi \cos^{2k} t\,\mathrm{d}t.$$

19** Soit $(E, \langle\,|\,\rangle)$ un espace vectoriel euclidien et $\|\ \|$ la norme associée à $\langle\,|\,\rangle$. On considère une fonction f continue de $[a, b]$ dans E telle que :

$$\left\|\int_a^b f\right\| = \int_a^b \|f\|$$

1) Montrer que f prend ses valeurs dans une demi-droite vectorielle de E.

2) En est-il de même si la norme de E ne provient pas d'un produit scalaire ?

20* Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et f une application continue de $[0, 1]$ dans E. Calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} n \int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t.$$

21 **1)** Prouver que, pour tout entier $n > 0$, il existe un unique polynôme P_n de $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$(1 - X)^{4n} = P_n(X)(1 + X^2) + (-1)^n 4^n.$$

2) Déterminer une suite (u_n) telle que :

$$\int_0^1 P_n(t)\,\mathrm{d}t = u_n + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

22** Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}^+$. Pour tout entier $p > 0$, on note :

$$u_p = \left(\int_a^b \left(f(t)\right)^p \mathrm{d}t\right)^{1/p}$$

Montrer que $\lim_{p\to+\infty} u_p = \sup_{t\in[a,b]} f(t)$.

Lien entre dérivation et intégration

6

Introduction

Dans ce chapitre, nous définissons les primitives d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle, à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie et mettons ainsi en évidence le lien entre dérivation et intégration dans le cadre des fonctions continues par morceaux sur un segment.

Nous exploitons alors le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral pour l'étude globale des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux.

Nous sommes ensuite en mesure d'effectuer une étude globale d'une fonction définie comme limite d'une série (ou d'une suite en PSI*) de fonctions.*

OBJECTIFS

- Propriétés de l'application :

$$\left(x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

- Définition des primitives d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle.
- Intégration par parties et changement de variable.
- Inégalité des accroissements finis.
- Les trois formules de Taylor.
- Dérivabilité d'une fonction limite d'une suite de fonctions (*PSI*).
- Dérivabilité d'une fonction limite d'une série de fonctions.

Dans ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1 Primitives d'une fonction continue par morceaux

1.1. La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

Théorème 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, f une application continue de I dans E et a un point de I. L'application F définie comme suit :

$$F : \begin{cases} I \to E \\ x \mapsto F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans E et vérifie :

$$\forall x \in I \quad F'(x) = f(x).$$

Ce *théorème* a été établi en Première année pour des fonctions à valeurs numériques. Le passage à des fonctions vectorielles se fait en raisonnant sur les applications coordonnées.

Généralisation

Considérons le cas où f est continue par morceaux sur l'intervalle I. Nous allons d'abord introduire quelques notations.

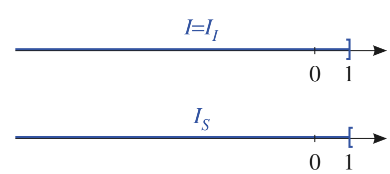
Notations (*doc.* 1) :

Lorsque I est un intervalle majoré, nous désignerons par I_S l'intervalle $I \setminus \{\sup I\}$. Lorsque I n'est pas majoré, $I_S = I$.

Pour tout x de I_S, la fonction f a une limite à droite en x ; on la note $f_d(x) = \lim\limits_{t \to x^+} f(t)$.

Lorsque I est un intervalle minoré, nous désignerons par I_I l'intervalle $I \setminus \{\inf I\}$. Lorsque I n'est pas minoré, $I_I = I$.

Pour tout x de I_I, la fonction f a une limite à gauche en x : on la note $f_g(x) = \lim\limits_{t \to x^-} f(t)$.



Doc. 1. *Dans cet exemple,* $I = I_I =]-\infty, 1]$ *et* $I_S =]-\infty, 1[$.

Théorème 2

Soit f une application continue par morceaux de I dans E et a un point de I.

L'application $F : \begin{cases} I \to E \\ x \mapsto F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$ est dérivable à droite (respectivement à gauche) en tout point de I_S (respectivement I_I) et, de plus :

$$F_d'(x) = f_d(x) \quad \text{et} \quad F_g'(x) = f_g(x).$$

Cette généralisation nous sera nécessaire lors de l'étude des *séries de Fourier* .

Démonstration

Notons $\| \ \|$ une norme sur E.

Soit x un point de I_S, il existe $\alpha > 0$ tel que $]x, x+\alpha[$ soit contenu dans I et :

$$\forall h \in]0, \alpha[\qquad \frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f_d(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f_d(x)\,\mathrm{d}t$$

Donc :

$$0 \leqslant \left\| \frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f_d(x) \right\| \leqslant \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \| f(t) - f_d(x) \|\,\mathrm{d}t \qquad \textbf{(1)}$$

Fixons alors $\varepsilon > 0$.

$$\exists\, \delta \in]0, \alpha[\qquad \forall t \in I \qquad (x < t \leqslant x+\delta) \Rightarrow (\| f(t) - f_d(x) \| \leqslant \varepsilon)\,.$$

Par conséquent, pour tout h tel que $0 < h \leqslant \delta$, et tout t dans $]0, h]$, d'après (**1**), on a :

$$0 \leqslant \left\| \frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f_d(x) \right\| \leqslant \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \varepsilon\,\mathrm{d}t = \varepsilon\,.$$

Ceci permet de conclure que :

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f_d(x) = 0_E\,.$$

Rapport Mines-Ponts, 2001

« Les primitives usuelles ne font pas toujours partie du bagage de certains candidats admissibles, ainsi que certaines propriétés élémentaires des fonctions hyperboliques. De manière générale, le calcul pratique des intégrales est un écueil, même pour les meilleurs. »

Corollaire 2.1

Soit f dans $\mathcal{CM}(I, E)$ et a un point de l'intervalle I.

On définit F sur I en posant $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Alors :

- F est continue sur I ;
- en tout point x de continuité de f, F est dérivable et $F'(x) = f(x)$;
- F est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I.

Rapport Mines-Ponts, 2000

« Dérivation fausse pour f continue, de l'intégrale sur $[a, x]$ de $f(x) - f(a)$. »

1.2. Les primitives

Soit f une application continue sur l'intervalle I, à valeurs dans E, on appelle **primitive** de f toute application F dérivable sur I telle que :

$$\forall x \in I \qquad F'(x) = f(x).$$

Soit f une application continue par morceaux de I dans E. On appelle **primitive** de f toute application F continue sur I, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I et telle qu'en tout point x de I en lequel f est continue, F est dérivable et $F'(x) = f(x)$.

Le *corollaire* 2.1 peut s'énoncer ainsi :

Pour toute application f de $\mathcal{CM}(I, E)$, l'application F définie sur I par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur I.

■ Si la fonction f est continue sur I alors, toute primitive F de la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I puisque $F' = f$.

■ Le *théorème* 1 prouve qu'une fonction continue sur un intervalle admet toujours une primitive sur cet intervalle.

Rapport Mines-Ponts, 2001

« Primitives classiques non connues. »

On en déduit le **théorème fondamental du calcul différentiel et intégral** :

Théorème 3

Soit f une application continue par morceaux de I dans E et a un point de I.

- Si F_1 et F_2 sont deux primitives de f sur l'intervalle I, alors F_1 et F_2 diffèrent d'une constante :

$$\exists V \in E \quad \forall x \in I \quad F_1(x) = F_2(x) + V.$$

- La fonction F définie en posant $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

- Si G est une primitive de f sur l'intervalle I, alors :

$$\forall (u,v) \in I^2 \quad G(v) - G(u) = \int_u^v f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Une application très classique de ce qui précède (et très utile dans les problèmes de concours !) est le corollaire suivant :

Corollaire 3.1

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans E. Alors :

$$\forall (a,x) \in I^2 \quad f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Rapport Centrale, 2001

« Dans des exercices utilisant une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle, les candidats ne pensent jamais à écrire f au moyen d'une intégrale portant sur f'. »

Rapport E3A, 2002

« Notons les difficultés de calcul de nombreux candidats en calcul intégral. »

Rapport E3A, 2002

« On a ainsi vu des candidats trouver la valeur 0 pour l'intégrale d'une fonction strictement positive, donner comme primitive de $\cos^k(x)$, $\dfrac{\cos^{k+1}(x)}{(k+1)\sin x}$. »

On retrouve le *théorème* suivant :
Si f est continue et positive sur $[a,b]$ et si $\int_a^b f = 0$, alors $f = 0$.
En effet, pour une telle fonction f, on pose $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
F est de classe $\mathcal{C}^1$ et croissante sur $[a,b]$ ($F' = f \geqslant 0$).
De plus, $F(b) = F(a) = 0$.
Donc $F = 0$ et $F' = f = 0$.

Application 1

Interprétation cinématique de la formule de la moyenne

Soit M un point mobile du plan dont la trajectoire est paramétrée par (I, f), où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{R}^2$ telle que $\forall t \in I \quad \overrightarrow{OM}(t) = f(t)$.

Montrer que la vitesse moyenne du point mobile entre les instants t_0 et t_1 $(t_0 \leqslant t_1)$ est égale à la valeur moyenne de la vitesse entre ces deux instants.

On note $\|\ \|$ la norme euclidienne usuelle de $\mathbb{R}^2$.

L'énoncé ne précise pas s'il s'agit de vitesse vectorielle $\left(f'(t) = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}(t)\right)$ ou de vitesse numérique $(\|f'(t)\|)$. Traitons les deux cas.

- La valeur moyenne de la vitesse vectorielle entre les instants t_0 et t_1 est :

$$\frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1} f'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}.$$

Or $f(t_1) - f(t_0) = \overrightarrow{M(t_0)\,M(t_1)}$ et $\dfrac{\overrightarrow{M(t_0)\,M(t_1)}}{t_1 - t_0}$ est la vitesse moyenne vectorielle entre t_0 et t_1. D'où le résultat.

- Rappelons que, puisque le paramètrage est de classe $\mathcal{C}^1$, la vitesse numérique du point mobile est la dérivée de l'abscisse curviligne :

$$\left(\|f'(t)\| = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t)\right).$$

La valeur moyenne de la vitesse numérique entre les instants t_0 et t_1 est :

$$\frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1} \| f'(t)\| \,\mathrm{d}t = \frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1} \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}.$$

Or $s(t_1) - s(t_0)$ est la distance parcourue par le point mobile entre les instants t_0 et t_1, donc :

$$\frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$$

est la vitesse moyenne du point mobile entre les instants t_0 et t_1.

Corollaire 3.2 : Extension au cas où f est continue sur I et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I

Soit f une application continue de I dans E et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I. Alors :

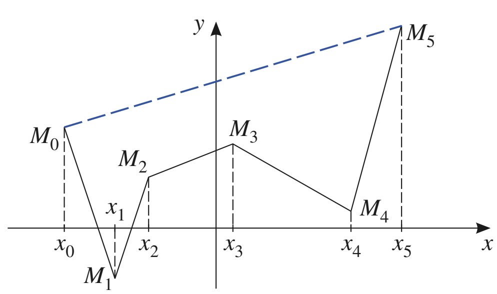
$$\forall (a, x) \in I^2 \quad f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

► ***Pour s'entraîner : ex. 1 et 2.***

Application 2

La pente moyenne d'une ligne brisée

On considère une ligne brisée du plan $(M_0, \ldots, M_n)$ telle que les abscisses $(x_0, \ldots, x_n)$ des points $(M_0, \ldots, M_n)$ forment une suite strictement croissante.



Doc. 2. *Comment calculer la pente du segment de droite $[M_0, M_5]$ en fonction de celles des segments $[M_0, M_1], [M_1, M_2], \ldots, [M_4, M_5]$?*

On note p_i la pente du segment de droite $[M_{i-1}, M_i]$.

Prouver que la pente m du segment de droite $[M_0, M_n]$ est le barycentre de la famille de points pondérés $(p_i, x_i - x_{i-1})_{i \in [\![1,n]\!]}$. C'est-à-dire que la pente moyenne est la moyenne pondérée des pentes, les coefficients de pondérations étant les $(x_i - x_{i-1})_{i \in [\![1,n]\!]}$.

(L'idée de cette application est extraite de la revue « Chantier » de l'A.P.M.E.P. de janvier 1998, article de Sylviane Gasquet.)

On veut prouver que :

$$m = \frac{1}{x_n - x_0}\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - x_{i-1}).$$

Notons f la fonction affine par morceaux dont le graphe est la ligne brisée $(M_0, \ldots, M_n)$. Cette fonction est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[x_0, x_n]$. Donc :

$$\int_{x_0}^{x_n} f'(t)\,\mathrm{d}t = f(x_n) - f(x_0).$$

Par ailleurs, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, f' est constante sur l'intervalle $]x_{i-1}, x_i[$ et vaut p_i, donc :

$$\int_{x_0}^{x_n} f'(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - x_{i-1}).$$

En divisant par $x_n - x_0$, on trouve la formule demandée :

$$\frac{1}{x_n - x_0}\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{x_n - x_0}\int_{x_0}^{x_n} f'(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = m.$$

1.3. Intégration par parties

Vous avez rencontré en Première année un outil fondamental, l'**intégration par parties**. Cet outil se généralise de la manière suivante :

Théorème 4
Soit f une application de I dans $\mathbb{K}$ et V une application de I dans E. On suppose que f et V sont continues et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I. Alors :

$$\forall (a,b) \in I^2 \quad \int_a^b f'(x)V(x)\,\mathrm{d}x = [\,f(x)V(x)]_a^b - \int_a^b f(x)V'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Rapport Mines-Ponts, 2000

« Recherche d'équivalent d'une fonction définie par une intégrale, les candidats ne pensent pas à l'utilisation d'une intégration par parties ou d'un changement de variables. »

Démonstration

D'après les hypothèses sur f et V, la fonction produit fV est une application continue de I dans E et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I. En tout point x en lequel f et V sont dérivables, on peut écrire :

$$(fV)'(x) = f'(x)V(x) + f(x)V'(x).$$

On applique le *théorème* 3 pour terminer.

Rapport Centrale, 2000

« Il est inadmissible de ne pas savoir intégrer une fraction rationnelle ; en revanche, il est illusoire de rechercher les primitives de certaines fonctions. »

Application 3

Intégration par parties généralisée

1) *Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{K})$. Montrer que :*

$\forall (a,b) \in I^2$

$$\int_a^b f^{(n)}g = \left[f^{(n-1)}g - f^{(n-2)}g' + \cdots + (-1)^{(n-1)}fg^{(n-1)}\right]_a^b + (-1)^n \int_a^b fg^{(n)}$$

2) *Calculer :* $\displaystyle\int_0^{\ln 2} e^{-3x}(x^2+x+1)\,\mathrm{d}x.$

1) La formule se démontre par récurrence.

2) $$\int_0^{\ln 2} \mathrm{e}^{-3x}(x^2+x+1)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\mathrm{e}^{-3x}}{-3}(x^2+x+1) - \frac{\mathrm{e}^{-3x}}{9}(2x+1) + \frac{\mathrm{e}^{-3x}}{-27}2\right]_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} 0$$

Et donc :

$$\int_0^{\ln 2} \mathrm{e}^{-3x}(x^2+x+1)\,\mathrm{d}x = -\frac{(\ln 2)^2}{24} - \frac{5\ln 2}{72} + \frac{49}{108}$$

▶ *Pour s'entraîner : ex. 3.*

1.4. Changement de variables

Théorème 5
Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$, φ une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\varphi([a,b]) \subset I$ et f une application continue de I

Rapport TPE, 2002

« Le calcul intégral est mal maîtrisé, les changements de variables classiques sont méconnus. »

dans E. Alors :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

Rapport Mines-Ponts, 2000

« Impossibilité de calculer des primitives simples comme celle de $\dfrac{1}{1+\cos^2(t)}$ *et grande difficulté à mettre en oeuvre un changement de variable en* $\tan t$ *par exemple. »*

Il ne faut pas remplacer l'hypothèse « $\varphi([a,b])$ contenu dans I » par « $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ appartiennent à I ». Penser à : $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 u\,\mathrm{d}u$ et à $t = \tan u$.

Démonstration

Soit F une primitive de f sur I, alors $F\circ\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et $(F\circ\varphi)' = (f\circ\varphi)\varphi'$. Donc :

$$\int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \big[F\circ\varphi(u)\big]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

En pratique, lorsque les hypothèses sont vérifiées, on pose $t = \varphi(u)$ et $\mathrm{d}t = \varphi'(u)\,\mathrm{d}u$, et on modifie les bornes.

Corollaire 5.1

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, φ une application strictement monotone et de classe $\mathcal{C}^1$ de J dans I, et f une application continue par morceaux de I dans E. Alors :

$$\forall (a,b)\in J^2 \qquad \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$$

Rapport CCP, 1997

L'extrait du rapport suivant montre l'importance de la remarque précédente :

« Certains n'hésitent pas à faire des changements de variable discontinus ou du genre logarithme complexe et s'étonnent d'aboutir parfois à des intégrales dont les deux bornes (réelles ou complexes) sont égales. »

Démonstration

Introduisez une subdivision du segment d'extrémités $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ adaptée à f. La relation de Chasles et le *théorème* 5 vous permettront de conclure.

Exemples

■ Soit T un réel >0 et f une application continue par morceaux, T-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Prouvons que :

$$\forall (a,x)\in\mathbb{R}^2,\quad \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a+T}^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

$$\forall a\in\mathbb{R},\quad \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Avec : $t = u+T$:

$$\int_{a+T}^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x f(u+T)\,\mathrm{d}u = \int_a^x f(u)\,\mathrm{d}u.$$

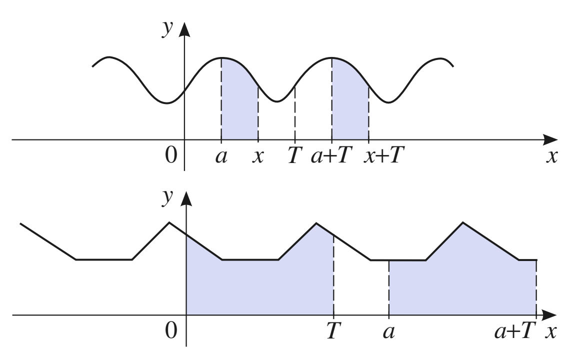
Pour la seconde relation, utilisons la *relation de Chasles* :

$$\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{a+T}^T f(t)\,\mathrm{d}t.$$

D'après ce qui précède :

$$\int_{a+T}^T f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^0 f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t.$$

D'où l'égalité demandée.



Doc. 3. *Deux propriétés de l'intégrale d'une fonction périodique.*

■ Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et f une application continue par morceaux de $[a,b]$ dans E.

Exprimer $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ en fonction d'une intégrale sur $[0,1]$ ou sur $[-1,1]$.

Avec : $t=(b-a)u+a,\quad \mathrm{d}t=(b-a)\,\mathrm{d}u$:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=(b-a)\int_0^1 f((b-a)u+a)\,\mathrm{d}u.$$

En utilisant : $t=\dfrac{b-a}{2}u+\dfrac{a+b}{2},\quad \mathrm{d}t=\dfrac{b-a}{2}\,\mathrm{d}u$:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{b-a}{2}\int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}u+\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}u.$$

■ Les primitives d'une fonction f, continue et périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, sont périodiques si, et seulement si, l'intégrale de f sur une période est nulle.

En effet, notons T la période de f et F une primitive de f :

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad F(x+T)-F(x)=\int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Rapport Mines-Ponts, 2000

« Peu de candidats semblent savoir que, si f est dérivable et 2π-périodique, sa dérivée est elle-même 2π-périodique. D'autres candidats écrivent que les primitives d'une fonction continue 2π-périodique sont 2π-périodiques. »

▶ ***Pour s'entraîner : ex. 4. et 5.***

2 Inégalité des accroissements finis

Théorème 6 : Inégalité des accroissements finis

Soit f une application de I dans E, $[a,b]$ un segment contenu dans I et $\|\ \|$ une norme sur E.

Si les trois hypothèses suivantes sont vérifiées :

- f est continue sur $[a,b]$;
- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b[$;
- $\exists\lambda\in\mathbb{R}\quad\forall t\in\,]a,b[\quad \|f'(t)\|\leqslant\lambda.$

Alors :

$$\|f(b)-f(a)\|\leqslant\lambda(b-a).$$

Démonstration

f est continue sur $[a,b]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b[$. Pour tout $\varepsilon>0$ tel que $\varepsilon<\dfrac{b-a}{2}$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$:

$$f(b-\varepsilon)-f(a+\varepsilon)=\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Soit :

$$\|f(b-\varepsilon)-f(a+\varepsilon)\|=\left\|\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f'(t)\,\mathrm{d}t\right\|\leqslant\lambda(b-a-2\varepsilon)\leqslant\lambda(b-a).$$

Or, f est continue sur $[a,b]$ et l'application norme est continue de E dans $\mathbb{R}$; donc, en faisant tendre ε vers 0, $\|f(b)-f(a)\|\leqslant\lambda(b-a)$.

Interprétation cinématique

Lorsque E est de dimension 2 ou 3, l'application $f : (t \mapsto f(t))$ représente la trajectoire d'un point mobile en fonction du temps et le théorème précédent se lit ainsi :

Si, entre les instants a et b, la norme du vecteur vitesse est toujours majorée par λ, alors la distance parcourue par le mobile entre ces deux instants est inférieure à $\lambda(b-a)$.

Théorème 7

Soit $[a, b]$ un segment inclus dans I et f une application continue de I dans E, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $]a, b[$.

On suppose qu'il existe un réel λ tel qu'en tout point t de $]a, b[$ en lequel f est dérivable, on ait $\|f'(t)\| \leqslant \lambda$.

Alors :

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant \lambda(b-a).$$

Démonstration

Il existe une subdivision $(a_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ du segment $[a, b]$ telle que f soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle $]a_i, a_{i+1}[$. Le théorème précédent s'applique sur le segment $[a_i, a_{i+1}]$ et :

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!] \quad \|f(a_{i+1}) - f(a_i)\| \leqslant \lambda(a_{i+1} - a_i).$$

Sommons ces inégalités. On obtient :

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant \sum_{0}^{n-1} \|f(a_{i+1}) - f(a_i)\| \leqslant \lambda(b-a).$$

Théorème 8

Soit f une application de $[a, b]$ dans E telle que :

- f est continue sur $[a, b]$.
- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b[$.
- f' a une limite $l\ (l \in E)$ en b.

Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et $f'(b) = l$.

Ce *théorème* est parfois appelé « théorème de prolongement ». Cette appellation est dangereuse. Il ne s'agit pas de prolonger la fonction f' en b. En réalité, on démontre que f est dérivable (à gauche) en b.

Démonstration

Définissons l'application g ainsi :

$$g : \left\{ \begin{array}{rcl} [a,b] & \to & E \\ x & \mapsto & g(x) = \left\{ \begin{array}{ll} f'(x) & \text{si} \quad x \in [a,b[\\ \lim\limits_{\substack{t \to b \\ t<b}} f'(t) & \text{si} \quad x = b \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Par construction, g est continue sur $[a, b]$, donc si l'on définit G en posant $G(x) = \displaystyle\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$, on peut dire que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.

Par ailleurs, pour tout x de $[a, b[$, on a :

$$G(x) = f(x) - f(a) \qquad \textbf{(1)}$$

Une démonstration utilisant les fonctions coordonnées de f est aussi possible .

Rapport Centrale, 2001

« On comprend très bien ce que signifie « prolonger une fonction par continuité au point a, » mais que peut bien vouloir dire « on prolonge la dérivée par continuité en a, » après avoir établi l'existence de $\lim\limits_{x \to a} f'(x)$. »

et la continuité de G et de f sur $[a,b]$ permet d'affirmer que (**1**) est aussi vraie pour $x = b$.

Donc :

$$\forall x \in [a,b] \quad f(x) = f(a) + G(x) \quad \text{et} \quad f \in \mathcal{C}^1([a,b], E)$$

Corollaire 8.1

Soit f une application de $[a,b]$ dans E et k un entier > 0 tels que :

- f est continue sur $[a,b]$;
- f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a,b[$;
- pour tout r de $[\![1,k]\!]$, $f^{(r)}$ a une limite $l_r (l_r \in E)$ en b.

Alors f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a,b]$ et, pour tout r de $[\![1,k]\!]$, $f^{(r)}(b) = l_r$.

Application 4

La fonction $x \mapsto \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$

Considérons la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) & si \quad x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) *Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}$.*

2) *Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et que, pour tout entier n, il existe un polynôme P_n tel que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

3) *En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que, de plus :*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f^{(n)}(0) = 0.$$

1) La continuité de f sur $\mathbb{R}^*$ est immédiate. De plus :

$$\lim_{x \to 0} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0.$$

Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) La formule est vraie pour $n = 0$ en posant $P_n(x) = 1$.

Supposons que, pour un entier $n \geqslant 0$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

où P_n est un polynôme.

Alors :

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} \frac{2}{x^3} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$+ \frac{P_n'(x)}{x^{3n}} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) + P_n(x) \frac{-3n}{x^{3n+1}} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{2P_n(x) + x^3 P_n'(x) - 3nx^2 P_n(x)}{x^{3(n+1)}} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

On pose alors :

$$P_{n+1}(x) = 2P_n(x) + x^3 P_n'(x) - 3nx^2 P_n(x).$$

Puisque P_n est un polynôme, P_{n+1} en est un aussi et la formule annoncée est démontrée par récurrence.

3) On sait que :

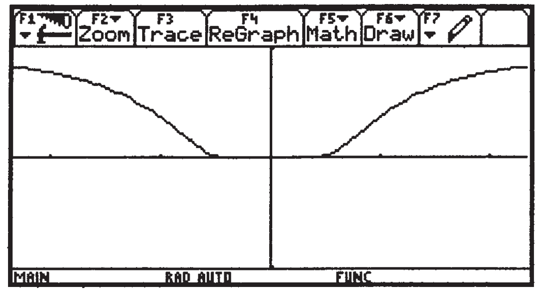
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{3n}} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0.$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = 0.$$

Le *corollaire* 8.1 permet d'en déduire que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que, de plus :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f^{(n)}(0) = 0 = \lim_{x\to 0} f^{(n)}(x)$$



Doc. 4. *Le graphe de* $x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ *dans un repère orthonormé avec* $-2{,}33 \leqslant x \leqslant 2{,}33$.

▶ ***Pour s'entraîner : ex. 6. et 7.***

3 Les formules de Taylor

Une des idées menant à l'étude des **formules de Taylor** est la généralisation de la relation caractérisant la dérivabilité d'une fonction f en un point a :

$$f(a+h) = f(a) + h\, f'(a) + o(h).$$

Le but de ce paragraphe est de généraliser aux fonctions à valeurs vectorielles ces formules vues en Première année pour les fonctions numériques.

3.1. Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 9

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ de I dans E, de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ par morceaux sur I. Alors :

$$\forall (a,b) \in I^2 \quad f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

***Brook Taylor**, Mathématicien anglais* (1685 - 1731). *Il invente l'intégration par parties. En* 1715, *il publie* Methodolus incrementorum directa et inversa, *qui contient sa formule :*

$$f(a+h) = f(a) + h\, f'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + \frac{h^3}{6} f'''(a) + \dots$$

sans précision sur le reste. L'intérêt de cette formule n'apparaît qu'en 1772 *lorsque Lagrange y voit une des bases du calcul différentiel. Il donne en particulier le premier encadrement du reste. La formule de Taylor avec reste intégral est due à Cauchy. Il la démontre dans sa* 35^e^ *leçon à l'École polytechnique* (1823). *Il donne, dans la* 38^e^ *leçon, l'exemple* $(x \mapsto \mathrm{e}^{-1/x^2})$ *étudié à l'application précédente.*

Démonstration

La démonstration s'effectue par récurrence.

• *Le cas* $n = 0$.

Soit f une fonction continue de I dans E, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I et a, b deux points de I. On sait que $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x$.

• *Le passage de* n *à* $n+1$.

Soit n un entier $\geqslant 0$. Supposons que, pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^n$ de I dans E et de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ par morceaux sur I, on ait :

$$\forall (a,b) \in I^2 \quad f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Considérons une fonction g de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ de I dans E et de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ par morceaux sur I. L'hypothèse de récurrence permet d'écrire :

$$\forall (a,b) \in I^2 \quad g(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} g^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} g^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

L'application $g^{(n+1)}$ est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I. Intégrons par parties le reste intégral, nous obtenons la formule à l'ordre $n+1$.

Rapport Mines-Ponts, 2000

« Les hypothèses des théorèmes conduisant aux différentes formules de Taylor sont tout aussi difficiles à obtenir. Le reste intégral est le plus populaire, mais son écriture exacte laisse bien souvent à désirer. »

Remarque

Cette égalité s'écrit également $f(b) = T_n(b) + R_n(b)$, avec :

$$T_n(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \quad \text{et} \quad R_n(b) = \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

$T_n(b)$ est appelé la **partie régulière** de la formule de Taylor et $R_n(b)$ le **reste intégral**.

3.2. Inégalité de Taylor - Lagrange

La formule de Taylor avec reste intégral est une égalité. Pour majorer la distance entre $f(b)$ et $\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$, une inégalité suffit.

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ par morceaux de I dans E et J un segment inclus dans I.

On sait qu'il existe une subdivision $(a_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ de J telle que f est $n+1$ fois dérivable en tout point de $J \setminus \{a_i | i \in [\![0,n]\!]\}$ et que la restriction de f à chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur les segments $[a_i, a_{i+1}]$.

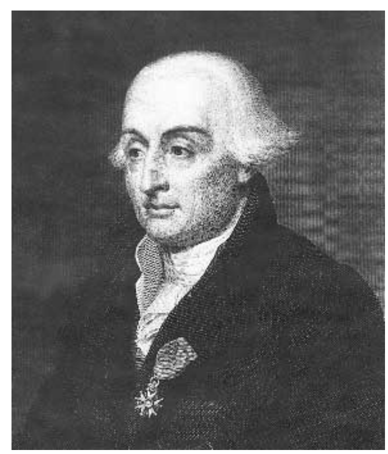
On en déduit que $f^{(n+1)}$ est bornée sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ et sur $J \setminus \{a_i \mid i \in [\![0,n]\!]\}$. Si $\|\ \|$ désigne une norme sur E, on note :

$$\sup_J \left\| f^{(n+1)} \right\| = \sup \left\{ \left\| f^{(n+1)}(x) \right\| \mid x \in J \setminus \{a_i \mid i \in [\![0,n]\!]\} \right\}$$

Enfin, si a et b sont deux éléments de l'intervalle I, on note :

$$J_{a,b} = [\min(a,b), \max(a,b)].$$

C'est le segment d'extrémités a et b.



Joseph Lagrange, mathématicien et physicien français (1736-1813).
Mathématicien, il développe la théorie des fonctions. Cherchant à approximer une fonction par un polynôme, il reprend la formule de Taylor et précise le reste. Dans le domaine des équations différentielles, nous lui devons la technique de variations des constantes.
Physicien, ses travaux portent sur la propagation du son, la théorie des cordes vibrantes et la mécanique céleste. Il participe à la création de l'École polytechnique et y enseigne.

Théorème 10

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ de I dans E, de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ par morceaux sur I et $\| \ \|$ une norme sur E. Alors :

$$\forall (a,b) \in I^2 \quad \left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{J_{a,b}} \| f^{(n+1)} \| .$$

Démonstration

Fixons a et b dans I. D'après la formule de Taylor avec reste intégral, on a :

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leqslant \int_{J_{a,b}} \left\| \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) \right\| \mathrm{d}x .$$

Donc :

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leqslant \left(\int_{J_{a,b}} \frac{|b-x|^n}{n!} \mathrm{d}x \right) \sup_{J_{a,b}} \| f^{(n+1)} \| .$$

En distinguant les cas $a \leqslant b$ et $a \geqslant b$, vous prouverez que :

$$\int_{J_{a,b}} \frac{|b-x|^n}{n!} \mathrm{d}x = \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} .$$

Rapport CCP, 2000

« Le théorème des accroissements finis est souvent invoqué (pas toujours correctement d'ailleurs...) mais on rencontre parfois des horreurs. »

Rapport Mines-Ponts, 2000

« L'inégalité de Taylor-Lagrange semble peu connue. »

Application 5

Développement en série de $x \mapsto (1+x)^\alpha$

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Pour tout réel $x > -1$, posons :

$$f(x) = (1+x)^\alpha$$

et pour tout entier $n > 0$:

$$M_n(x) = \sup \left\{ \left| f^{(n)}(t) \right| \ ; \ t \in [\min(0,x), \max(0,x)] \right\}$$

1) *Montrer que, pour tout réel $x > 0$ et tout entier $n > \alpha$,* $\quad M_n(x) \leqslant \prod_{i=0}^{n-1} |i - \alpha|$.

En déduire que :

$$\forall x \in [0,1[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!} .$$

2) *Montrer que, pour tout réel x de $]-1,0]$ et tout entier $n > \alpha$:*

$$M_n(x) \leqslant (1-|x|)^{\alpha-n} \prod_{i=0}^{n-1} |i - \alpha| .$$

En déduire que :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{2}, 0\right] \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!} .$$

Remarque : Le résultat obtenu est asymétrique (convergence sur $\left]-\frac{1}{2}, 1\right[$).

Nous verrons ultérieurement, en utilisant une méthode différente, que la formule :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!}$$

est valable sur $]-1,1[$.

1) Fixons un entier $n > \alpha$. Pour tout réel $t \geqslant 0$, on a $(1+t)^{\alpha-n} \leqslant 1$.

Or : $\qquad f^{(n)}(t) = \left[\prod_{i=0}^{n-1} (\alpha - i) \right] (1+t)^{\alpha-n}$.

Donc : $\quad \forall x > 0 \qquad M_n(x) \leqslant \prod_{i=0}^{n-1} |i - \alpha|$.

De l'*inégalité de Taylor-Lagrange* nous déduisons, pour $n > \alpha$:

$$\forall x > 0 \quad \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \frac{x^n}{n!}\prod_{i=0}^{n-1}|i-\alpha| \qquad (\mathbf{1})$$

Posons $\varepsilon_n = \dfrac{x^n}{n!}\prod_{i=0}^{n-1}|i-\alpha|$; vous vérifierez aisément que $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = x$. Si x est dans $]0,1[$, la *règle de d'Alembert* permet de conclure que $\lim_{n\to+\infty}\varepsilon_n = 0$ et, d'après (**1**) :

$$\forall x \in [0,1[\qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}.$$

2) Fixons un entier $n > \alpha$. Pour tout x de $]-1,0[$ et tout t de $[x,0]$, on a :

$$(1+t)^{\alpha-n} \leqslant (1+x)^{\alpha-n}.$$

Donc :

$\forall x \in]-1,0[$

$$\begin{aligned} M_n(x) &\leqslant (1+x)^{\alpha-n}\prod_{i=0}^{n-1}|i-\alpha| \\ &= (1-|x|)^{\alpha-n}\prod_{i=0}^{n-1}|i-\alpha|. \end{aligned}$$

De l'inégalité de Taylor-Lagrange nous déduisons, pour $n > \alpha$:

$$\forall x \in]-1,0[\quad \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} \right|$$
$$\leqslant (1-|x|)^{\alpha}\frac{|x|^n}{n!(1-|x|)^n}\prod_{i=0}^{n-1}|i-\alpha| \qquad (\mathbf{2})$$

Posons :

$$\delta_n = (1-|x|)^{\alpha}\frac{|x|^n}{n!(1-|x|)^n}\prod_{i=0}^{n-1}|i-\alpha|;$$

vous vérifierez aisément que :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\delta_{n+1}}{\delta_n} = \frac{|x|}{1-|x|}.$$

De plus :

$$-\frac{1}{2} < x < 0 \Rightarrow 0 < \frac{|x|}{1-|x|} < 1.$$

La règle de d'Alembert permet de conclure que $\lim_{n\to+\infty}\delta_n = 0$ si x est dans $\left]-\frac{1}{2},0\right[$ et, d'après (**2**) :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{2},0\right] \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}.$$

3.3. Développement limité d'une primitive d'une fonction continue

Théorème 11

Soit f une application continue de I dans E et a un point de I. Si f admet en a le développement limité d'ordre n :

$$f(x) = \sum_{0}^{n}(x-a)^i V_i + o((x-a)^n)$$

alors toute primitive F de f admet en a le développement limité d'ordre $n+1$:

$$F(x) = F(a) + \sum_{0}^{n}\frac{(x-a)^{i+1}}{(i+1)}V_i + o((x-a)^{n+1})$$

Démonstration

Notons, pour tout x de $I \setminus \{a\}$:

$$r(x) = \frac{1}{(x-a)^n}\left(f(x) - \sum_{0}^{n}(x-a)^i V_i\right) \quad \text{et} \quad r(a) = 0_E$$

Rapport Mines-Ponts, 2001
« Développements limités usuels non connus. »

Rapport Centrale, 2001
« L'unicité du développement limité est rarement citée. »

Rapport CCP, 2001
« ...s'entraîner aux méthodes classiques et savoir les maîtriser définitivement (DL, calcul intégrale...) »

Rapport CCP, 2000
« Il y a une grande méconnaissance des développements limités (même des plus simples comme $\ln(1+x)$. »

r est continue sur I, $\lim\limits_{x \to a} r(x) = 0_E$ et, pour tout x de I :

$$f(x) = \sum_0^n (x-a)^i V_i + (x-a)^n r(x)$$

Si F est une primitive de f sur I, on a :

$$F(x) = F(a) + \sum_0^n \int_a^x (t-a)^i V_i \,\mathrm{d}t + \int_a^x (t-a)^n r(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= F(a) + \sum_0^n \frac{(x-a)^{i+1}}{(i+1)} V_i + R_{n+1}(x),$$

avec $R_{n+1}(x) = \displaystyle\int_a^x (t-a)^n r(t)\,\mathrm{d}t$.

Pour conclure, il suffit de prouver que $R_{n+1}(x) = o((x-a)^{n+1})$.

Notons $\| \ \|$ une norme sur E et fixons $\varepsilon > 0$, on sait qu'il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall t \in I \quad |t-a| \leqslant \delta \Rightarrow \|r(t)\| \leqslant \varepsilon$$

On en déduit :

$$\forall x \in I \quad |x-a| \leqslant \delta \Rightarrow \|R_{n+1}(x)\| \leqslant \int_{\min(a,x)}^{\max(a,x)} |t-a|^n \|r(t)\|\,\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \varepsilon \int_{\min(a,x)}^{\max(a,x)} |t-a|^n \,\mathrm{d}t = \varepsilon \frac{|x-a|^{n+1}}{n+1}$$

Donc $R_{n+1}(x) = o((x-a)^{n+1})$.

Rapport CCP, 2000

« Les développements limités sont peu connus et les interprétations géométriques élémentaires posent de gros problèmes. »

Rapport E3A, 2002

« Les correcteurs espéraient un peu plus qu'une simple évocation de la formule de Taylor-Young. »

Corollaire 11.1 : Développement limité de la dérivée d'une application de classe $\mathcal{C}^1$

Soit f dans $\mathcal{C}^1(I,E)$ et a un point de I. Si f' admet en a un développement limité d'ordre n, alors f admet en a un développement limité d'ordre $n+1$.

Si celui-ci est :

$$f(x) = \sum_0^{n+1} (x-a)^i V_i + o((x-a)^{n+1})$$

alors le développement limité de f' en a est :

$$f'(x) = \sum_1^{n+1} i(x-a)^{i-1} V_i + o((x-a)^n)$$

L'hypothèse « f' admet en a un développement limité d'ordre n » est fondamentale comme le prouve l'*exemple* suivant :

On pose :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Vous montrerez que :

- $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.
- f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.
- f' n'a pas de développement limité à l'ordre 1 en 0.

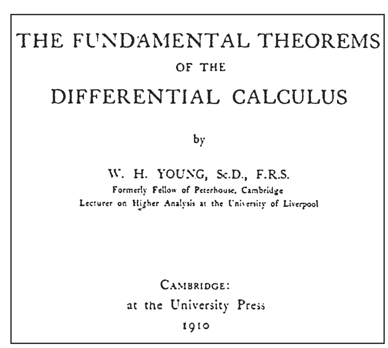
▶ ***Pour s'entraîner : Revoyez les développements limités faits en Première année.***

3.4. La formule de Taylor-Young

Théorème 12 : Formule de Taylor-Young

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^n$ de I dans E. Alors, f admet en tout point a de I un développement limité à l'ordre n donné par :

$$f(x) = \sum_0^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n)$$


THE FUNDAMENTAL THEOREMS
OF THE
DIFFERENTIAL CALCULUS
by
W. H. YOUNG, Sc.D., F.R.S.
Formerly Fellow of Peterhouse, Cambridge
Lecturer on Higher Analysis at the University of Liverpool
CAMBRIDGE:
at the University Press
1910

***William Young**, mathématicien anglais (1863-1942). Il généralise la formule de Taylor aux fonctions de plusieurs variables et détermine le reste qui porte son nom.*

Démonstration

Puisque f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, $f^{(n)}$ est continue en tout point a de I, ce qui peut s'écrire :

$$(H_0)\ f^{(n)}(x) = f^{(n)}(a) + o(1)$$

Et ceci représente un développement limité à l'ordre 0 de $f^{(n)}$ au point a.

Soit alors $k \in [\![0, n-1]\!]$. Supposons que :

$$(H_k)\ f^{(n-k)}(x) = \sum_0^k \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(n-k+i)}(a) + o((x-a)^k)$$

L'application $f^{(n-k)}$ est continue sur I et $f^{(n-k-1)}$ est une primitive de $f^{(n-k)}$ sur I. On termine en appliquant le théorème précédent.

Nous venons de prouver qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle admet un développement limité à l'ordre n en tout point de l'intervalle.
La réciproque est fausse : une fonction admettant un développement limité à l'ordre n en tout point d'un intervalle n'est pas nécessairement de classe $\mathcal{C}^n$.
L'exemple suivant le prouve.
On fixe n dans $\mathbb{N}^*$ et on définit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^{n+1} \sin\left(\dfrac{1}{x^n}\right) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

On prouve aisément que :

- f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x)| \leqslant |x|^{n+1}$.

Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

- $f(x) =_0 o(x^n)$.

Donc f admet un développement limité à l'ordre n en 0.

- $f'(x)$ n'a pas de limite en 0 et f n'a pas de dérivée seconde en 0.

4 Suites et séries de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Les fonctions considérées dans ce paragraphe sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

4.1. Suites de fonctions (*PSI*)

4.1.1 Convergence uniforme et intégration

Nous avons établi dans le *chapitre* précédent que la convergence uniforme entraîne la convergence en moyenne. En voici une conséquence.

Théorème 13

Soit a un point de l'intervalle I, (f_n) une suite de fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ et, pour tout n, h_n la primitive de f_n sur I telle que $h_n(a) = 0$.

Si la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur tout segment de I vers f, alors la suite de fonctions (h_n) converge uniformément sur tout segment de I vers la primitive h de f telle que $h(a) = 0$.

Et, pour tout x de I, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right) \mathrm{d}t.$$

Ce *théorème* découle des inégalités rencontrées dans le **2.4.2** du *chapitre* précédent.

4.1.2 Dérivation d'une suite de fonctions

Théorème 14

Soit (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ telle que :

- pour tout n, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
- la suite (f_n) converge simplement sur I vers f.
- la suite (f_n') converge uniformément sur tout segment de I vers g.

Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = g$.

Démonstration

Soit a un point de I, on a :
$$\forall x \in I \quad f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}\,t.$$
Posons $h_n = f_n - f_n(a)$.

h_n est la primitive sur I de f_n' qui s'annule en a. Il suffit d'appliquer le théorème précédent à la suite de fonctions (f_n') pour conclure.

On déduit du *théorème* précédent une extension au cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, dont nous vous laissons le soin de rédiger la démonstration par récurrence.

C'est la suite (f_n') qui doit converger uniformément, comme le prouve l'exemple suivant :
$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}.$$

Corollaire 14.1 : Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Soit $k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ et (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ telle que :

- pour tout $n, (f_n)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I;
- la suite (f_n) converge simplement sur I vers f;
- pour tout entier non nul $p \leqslant k$, la suite $(f_n^{(p)})$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g_p.

Alors f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et, pour tout entier p non nul et inférieur ou égal à k :
$$f^{(p)} = g_p.$$

Rapport Mines-Ponts, 1997

« Beaucoup plus grave est de voir omniprésente l'affirmation que la convergence uniforme de la série entraîne la convergence de la série dérivée, et justifie de dériver terme à terme. »

Exemple

Considérons, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $]0,+\infty[$ par $f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction exponentielle.

Les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,+\infty[$ et, pour tout $p \geqslant 1$ et tout $n \geqslant p$, on a : $0 \leqslant \mathrm{e}^x - (f_n)^{(p)}(x) = h(x)$.

La fonction h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,+\infty[$ et :
$$h'(x) = \mathrm{e}^x - (f_n)^{(p+1)}(x) = \mathrm{e}^x - \frac{n(n-1)\dots(n-p)}{n^{p+1}}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-p-1}.$$

Or :
$$\frac{n(n-1)\dots(n-p)}{n^{p+1}}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-p-1} \leqslant \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-p-1} \leqslant \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} \leqslant \mathrm{e}^x.$$

La fonction h est croissante sur $[0,+\infty[$. Pour tout $b > 0$ et tout x de $[0,b]$, on a : $0 \leqslant h(x) \leqslant h(b)$.

Sur tout segment de $]0,+\infty[$, la suite de fonctions $((f_n)^{(p)})$ converge uniformément vers la fonction exponentielle. Nous retrouvons le fait que la fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que sa dérivée est elle-même.

5 Séries de fonctions

5.1. Convergence normale et intégration

Rappelons ce théorème établi dans le *chapitre* précédent.

Théorème 15

Soit a un point de l'intervalle $I, (u_n)$ une suite d'applications continues sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur tout segment de I alors, pour tout x de I :

$$\int_a^x \left(\sum_0^\infty u_n(t)\right) \mathrm{d}\,t = \sum_0^\infty \left(\int_a^x u_n(t)\,\mathrm{d}\,t\right)$$

Rapport Mines-Ponts, 2000

« Le théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions n'étant pas souvent pas appliqué correctement, de nombreux candidats n'ont pu démontrer que la fonction ψ était de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. »

Exemples

■ $\forall t \in]-1, 1[\quad \dfrac{1}{1-t} = \displaystyle\sum_0^\infty t^n$. Les hypothèses du théorème ci-dessus sont vérifiées, donc :

$$\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}\,t}{1-t} = \ln 2 = \sum_0^\infty \frac{1}{2^{n+1}(n+1)}$$

Les élèves de *PSI* savent que ce théorème s'applique dès que la série de fonctions converge uniformément sur tout segment de *I*.

■ $\forall t \in \mathbb{R} \quad \mathrm{e}^t = \displaystyle\sum_0^\infty \frac{t^k}{k!}$. De la même façon, nous obtenons, pour tout x :

$$\int_0^x \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}\,t = \int_0^x \left(\sum_0^\infty \frac{t^k}{k!}\right) \mathrm{d}\,t = \sum_0^\infty \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \mathrm{e}^x - 1$$

Rapport E4A, 2002

« les théorèmes d'interversion série-intégrale ne sont pas toujours bien maîtrisés. »

► ***Pour s'entraîner : ex. 8 et 9.***

5.2. Dérivation des séries de fonctions

Théorème 16

Soit (u_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ telle que :

- pour tout n, u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I;
- la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I;
- la série de fonctions $\sum u_n'$ converge normalement sur tout segment de I.

Alors, la fonction somme S de la série de fonctions $\sum u_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et :

$$\forall x \in I \quad S'(x) = \sum_0^\infty u_n'(x).$$

Sous ces hypothèses, en notant $DS = S'$, on peut également écrire :

$$D\left(\sum_0^{\infty} u_n\right) = \sum_0^{\infty} Du_n.$$

Pour les élèves de *PSI*, ce résultat est une conséquence du *théorème* 14. Le théorème s'applique dès que la série de fonctions converge uniformément sur tout segment de I.

Démonstration

On applique le *théorème* 15 à la série de fonctions normalement convergente :

$$\sum u_n'.$$

Corollaire 16.1

Soit $k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ et (u_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ telle que :

- pour tout n, u_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I;
- la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I;
- pour tout entier non nul $p \leqslant k$, la série de fonctions $\sum u_n^{(p)}$ converge normalement sur tout segment de I.

Alors la fonction somme S de la série de fonctions $\sum u_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et, pour tout entier non nul $p \leqslant k$:

$$\forall x \in I \quad S^{(p)}(x) = \sum_0^{\infty} u_n^{(p)}(x).$$

Application 6

Les fonctions $\zeta(x) = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^x}$ et $\mu(x) = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$

1) *Montrer que la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ et calculer ses dérivées successives.*

2) *Étudier cette fonction et tracer son graphe.*

3) *(PSI) Montrer que la fonction μ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et calculer ses dérivées successives.*

4) *(PC) Montrer que la fonction μ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ et calculer ses dérivées successives.*

1) La fonction ζ est définie sur $]1, +\infty[$. Cherchons si elle vérifie les hypothèses du *corollaire* 16.1. Posons $u_n(x) = n^{-x}$ pour $x \in]1, +\infty[$. Nous remarquons que :

- pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ et, si $p \geqslant 1$:

$$u_n^{(p)}(x) = (-\ln n)^p n^{-x};$$

- la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$;
- si $p \geqslant 1$ et $1 < a < b$, pour tout x de $[a, b]$, on a :

$$|(-\ln n)^p n^{-x}| = (\ln n)^p n^{-x} \leqslant (\ln n)^p n^{-a};$$

et la série $\sum (\ln n)^p n^{-a}$ converge.

Donc, la série de fonctions $\sum u_n^{(p)}$ converge normalement sur tout segment de $]1, +\infty[$.

La fonction ζ est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ et, pour tout x de $]1, +\infty[$ et tout $p \geqslant 1$, on a :

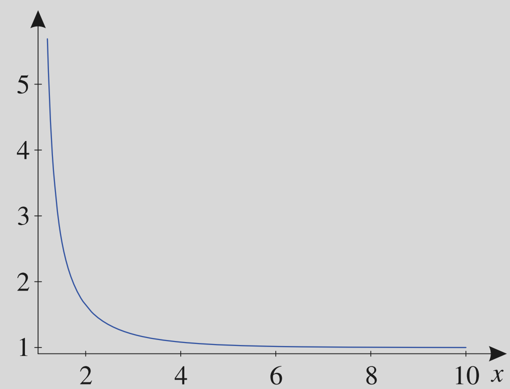
$$\zeta^{(p)}(x) = \sum_1^{\infty} (-\ln n)^p n^{-x}$$

2) En particulier, $\zeta'(x) = \sum_1^{\infty}(-\ln n)n^{-x}$ et $\zeta^{(2)}(x) = \sum_1^{\infty}(-\ln n)^2 n^{-x}$. La fonction ζ est donc décroissante et convexe. Nous savons que

$$\lim_{x\to 1^+} \zeta(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1$$

Avec Maple :

```
> plot(Zeta(x),x=1..10);
```



Doc. 5. La fonction ζ .

3) (*PSI*) Posons $v_n(x) = (-1)^{n+1} n^{-x}$ pour $x \in]0, +\infty[$.

Nous remarquons que :

- pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction v_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et, si $p \geqslant 1$;

$$v_n^{(p)}(x) = (-1)^{n+1}(-\ln n)^p\, n^{-x} \,;$$

- la série de fonctions $\sum v_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ car elle vérifie, pour tout x de $]0, +\infty[$, le critère spécial des séries alternées.

Soit $p \geqslant 1$ fixé, pour tout x de $]0, +\infty[$ et tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$v_n^{(p)}(x) = (-1)^{n+1}(-\ln n)^p n^{-x}.$$

Montrons que la série numérique :

$$\sum (-1)^{n+1+p}(\ln n)^p\, n^{-x}$$

est, lorsque x est fixé, une série alternée vérifiant le critère spécial. Dans ce but, notons v la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $v(t) = (\ln t)^p t^{-x}$. Cette fonction est dérivable et :

$$v'(t) = (\ln t)^{p-1} t^{-x-1}(p - x\ln t)$$

Lorsque n est supérieur à $\exp\left(\dfrac{p}{x}\right)$, la fonction est décroissante. La série numérique $\sum(-1)^{n+1+p}(\ln n)^p n^{-x}$ vérifie donc le critère spécial. La série de fonctions associée converge simplement sur $]0, +\infty[$.

- Considérons ensuite $0 < a < b$, $p \geqslant 1$ fixé et x dans $[a, b]$. Si $n \geqslant \exp\left(\dfrac{p}{a}\right)$, alors la série $\sum(-1)^{n+1+p}(\ln n)^p n^{-x}$ vérifie le critère spécial et :

$$|R_n(x)| \leqslant \left|(-\ln(n+1))^p (n+1)^{-x}\right|$$
$$\leqslant (\ln(n+1))^p (n+1)^{-a}$$

Donc, la série de fonctions $\sum v_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment de $]0, +\infty[$.

La fonction μ est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et, pour tout x de $]0, +\infty[$ et tout $p \geqslant 1$, on a :

$$\mu^{(p)}(x) = \sum_1^{\infty}(-1)^{n+1}(-\ln n)^p n^{-x}$$

4) Procéder comme dans la question **1)**.

5.3. Un exemple important : la fonction exponentielle

On fixe z dans $\mathbb{C}$ et on définit l'application u_n :

$$u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$
$$t \mapsto u_n(t) = \frac{t^n z^n}{n!}$$

1) *Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.*

2) *Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$.*

3) *Montrer que la fonction somme de cette série de fonctions que l'on notera* e_z *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$ *et est la solution de l'équation différentielle linéaire* $y'(t) = z\,y(t)$, *vérifiant la condition initiale* $y(0) = 1$.

Lorsque $z = 0, u_0 = 1$ et $u_n = 0$ pour $n \geqslant 1$. Les questions **1**, **2** et **3** sont immédiatement résolues.

Supposons donc $z \neq 0$.

1) Pour $t = 0$, la série $\sum u_n(0)$ converge.

Pour $t \neq 0$, on peut appliquer la *règle de d'Alembert*.

$$\left|\frac{u_{n+1}(t)}{u_n(t)}\right| = \frac{|tz|}{n+1} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(t)}{u_n(t)}\right| = 0 < 1$$

Donc la série numérique $\sum u_n(t)$ est absolument convergente.

2) Soit $[c, d]$ un segment de $\mathbb{R}$.

Notons $R = \max(|c|, |d|)$. Alors $[c, d] \subset [-R, R]$.

$$\forall t \in [c, d] \quad |u_n(t)| = \frac{|t|^n |z|^n}{n!} \leqslant \frac{R^n |z|^n}{n!}$$

La série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[c, d]$.

3) Pour tout n, la fonction u_n est une fonction polynôme de la variable t, elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Pour $n = 0$, $\dfrac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t} = 0$, et pour $n > 0$, $\dfrac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t}(t) = \dfrac{nt^{n-1}z^n}{n!} = z\,u_{n-1}(t)$.

Or, la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$, donc la série de fonctions $\sum z\,u_{n-1}$ aussi. Ainsi, la série de fonctions $\sum \dfrac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t}$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Nous pouvons donc appliquer le *théorème* et conclure que la fonction e_z, somme de la série de fonctions $\sum u_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et est telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \frac{\mathrm{d}e_z}{\mathrm{d}t}(t) = \sum_0^\infty \frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t}(t) = \sum_1^\infty z\,u_{n-1}(t) = z\,e_z(t)$$

De plus, $e_z(0) = 1$.

Donc e_z est bien la solution de l'équation $y' = z\,y$ vérifiant la condition initiale $y(0) = 1$.

Pour conclure que e_z est de classe $\mathcal{C}^\infty$, il suffit de rédiger une récurrence en partant de e_z est de classe $\mathcal{C}^1$ et $e_z' = z\,e_z$.

► ***Pour s'entraîner : ex. 10.***

FICHE MÉTHODE

- Soit f **une application continue** de I dans E et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I.

Pour montrer **une propriété ou une inégalité sur** f, penser à écrire :

$$\forall (a,x) \in I^2 \quad f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

- Pour montrer qu'**une application** f de $[a,b]$ dans E, **de classe** $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b[$, **est de classe** $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, on peut montrer que :

$$f \text{ est continue sur } [a,b] \text{ et } f' \text{ a une limite } l \quad (l \in E) \text{ en } b.$$

- Pour montrer qu'**une application** f de $[a,b]$ dans E, **de classe** $\mathcal{C}^k$ sur $[a,b[$, **est de classe** $\mathcal{C}^k$ sur $[a,b]$, on peut montrer que :

$$f \text{ est continue sur } [a,b] \text{ et, pour tout } r \text{ de } [\![1,k]\!], \quad f^{(r)} \text{ a une limite } l_r \quad (l_r \in E) \text{ en } b.$$

- Pour **calculer un développement limité**, on peut :

utiliser les opérations sur les fonctions admettant un développement limité ;

utiliser la formule de Taylor-Young, si la fonction est facile à dériver ;

intégrer le développement limité de f'.

- **Suites de fonctions** (*PSI*)

Soit (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ convergeant simplement vers f sur I.
Pour montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, il suffit d'établir les deux propriétés suivantes :

pour tout n, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ;

la suite (f_n') converge uniformément sur tout compact de I vers g.
Lorsque ceci est réalisé, on a : $g = f'$.

- **Séries de fonctions**

Soit (u_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ telle que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I vers S.
Pour montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, il suffit d'établir les deux propriétés suivantes :

pour tout n, u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ;

la série de fonctions $\sum u_n'$ converge normalement (*PSI* uniformément) sur tout segment de I.

Lorsque ceci est réalisé, on a $S' = \sum_0^{\infty} u_n'$.

TD

1. Suites récurrentes et point fixe

A. Le théorème du point fixe

$(E, \| \ \|)$ est un espace vectoriel normé de dimension finie, F est un *fermé* de E, f une application de F dans F qui est contractante (k-lipschitzienne avec $k < 1$).

1) Justifier que, pour tout élément u_0 de F, on peut définir une suite (u_n) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n) \qquad \textbf{(1)}$$

Dans la suite de cette partie, u_0 est fixé dans F et la suite (u_n) est définie par (**1**).

2) *Démonstration de la convergence de* (u_n) *(PSI)*

Montrer que la suite (u_n) est une suite de Cauchy de $(E, \| \ \|)$; en déduire qu'elle converge vers un élément l de F. Les étudiants *PC* admettront ce résultat.

3) Montrer que le point l est l'unique point fixe de f.

4) Prouver que, pour tout entier n :

$$\|u_n - l\| \leqslant \frac{k^n}{1-k}\|u_0 - u_1\|$$

Cette question complète le résultat de convergence par une indication sur la vitesse de convergence.

B. Points fixes attractifs, points fixes répulsifs

Dans cette partie et dans la suivante, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et f une application de I dans I. On suppose que f admet un point fixe, noté ℓ.

1) Soit u_0 un point de I et (u_n) la suite récurrente définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.

Montrer que, si pour un entier $N, u_N = \ell$, alors la suite (u_n) est constante à partir du rang N.

On dit qu'un point fixe ℓ de f est *attractif* s'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que, pour tout u_0 de $[l - \alpha, \ell + \alpha] \cap I$, la suite récurrente définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ℓ.

On dit qu'un point fixe ℓ de f est *répulsif* si toute suite récurrente $(u_{n+1} = f(u_n))$ qui converge vers ℓ est nécessairement stationnaire.

Dans la suite, on suppose f de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

2) Montrer que, si $|f'(l)| < 1$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que la restriction de f à $J = I \cap [\ell - \alpha, \ell + \alpha]$ soit une application contractante de J.

En déduire que ℓ est un point fixe attractif de f.

3) Montrer que, si $|f'(\ell)| > 1$, alors ℓ est un point fixe répulsif de f.

4) Les exemples suivants montrent que, lorsque $|f'(\ell)| = 1$, tout est possible.

Étudier, pour chaque exemple, si le point fixe ℓ est attractif ou répulsif :

a) $f(x) = -x^2 + 3x - 1$ et $\ell = 1$;

b) $f(x) = \mathrm{e}^{(x-1)}$ et $\ell = 1$;

c) $f(x) = \mathrm{Arctan}\,(x)$ et $\ell = 0$;

d) $f(x) = x^3 + x$ et $\ell = 0$;

e) $f(x) = \dfrac{1}{x} + 0,5(x-1)^2$ et $\ell = 1$;

f) $f(x) = \dfrac{1}{x} - 0,5(x-1)^2$ et $\ell = 1$;

C. Vitesse de convergence pour un point fixe attractif

Dans cette partie, on suppose que $|f'(\ell)| = \gamma < 1$.

On sait, d'après la deuxième partie, que ℓ est un point fixe attractif de f. On suppose connu un réel $\alpha > 0$ tel que f soit une application contractante de $J = I \cap [\ell - \alpha, \ell + \alpha]$.

Dans la suite, u_0 est choisi dans J et la suite (u_n) est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) Dans cette question, $\gamma \neq 0$.

Soit ε un réel > 0 tel que $\gamma - \varepsilon > 0$ et $\gamma + \varepsilon < 1$.

Prouver l'existence d'un entier n tel que :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad (\gamma - \varepsilon)^p |u_n - \ell| \leqslant |u_{n+p} - \ell| \leqslant (\gamma + \varepsilon)^p |u_n - \ell|$$

La minoration $(\gamma - \varepsilon)^p |u_n - l| \leqslant |u_{n+p} - l|$ prouve que l'on ne peut guère faire mieux.

2) Dans cette question, $\gamma = 0$ et f est de classe $\mathcal{C}^2$.

On note $M = \sup\limits_{t \in J} |f''(t)|$.

a) Étudier brièvement le cas où $M = 0$.

b) Prouver l'existence d'un entier n tel que :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad |u_{n+p} - \ell| \leqslant \frac{2}{M} \left(\frac{1}{10}\right)^{2^p}$$

Pour simplifier, on peut dire qu'à partir du rang n, à chaque itération du calcul de u_k on double le nombre de décimales connues dans l'approximation de ℓ par u_k. Attention, toutefois, aux cas particuliers.

La vitesse de convergence est beaucoup plus rapide que dans le cas précédent.

TD

2. Calculs approchés d'intégrale, majorations de l'erreur

Les sommes de Riemann permettent de réaliser le calcul approché d'intégrales. Cette méthode élémentaire est appelée *méthode des rectangles*. Son efficacité numérique est assez limitée car l'incertitude est un $O\left(\dfrac{1}{n}\right)$, ainsi que nous le montrons dans l'*exercice* 10 du *chapitre* 5 .

Dans ce TD, nous exposons trois autres méthodes simples de calcul approché d'intégrales. Pour deux d'entre elles (méthodes des trapèzes et des tangentes), l'incertitude est un $O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$; pour la troisième (méthode de Simpson) c'est un $O\left(\dfrac{1}{n^4}\right)$.

A. La méthode des trapèzes et la méthode des tangentes

Dans cette partie, f est une application de classe $\mathcal{C}^2$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$ et $M_2 = \sup\limits_{t\in[a,b]} |f''(t)|$.

La méthode des trapèzes

1.a) Interpréter $\dfrac{(b-a)(f(a)+f(b))}{2}$ en terme d'aire de trapèze.

b) Montrer que : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{(b-a)(f(a)+f(b))}{2} = \int_a^b \frac{(t-a)(t-b)}{2} f''(t)\,\mathrm{d}t$

c) En déduire que :

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{(b-a)(f(a)+f(b))}{2}\right| \leqslant \frac{M_2(b-a)^3}{12}.$$

2) Prouver que, pour tout entier $n > 0$, on a :

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) + \frac{f(b)}{2}\right]\right| \leqslant \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}.$$

La méthode des tangentes

3) En vous aidant d'un schéma, prouver que :

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - (b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leqslant \frac{M_2(b-a)^3}{24}.$$

4) Prouver que, pour tout entier $n > 0$, on a :

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + \left[k - \frac{1}{2}\right]\frac{b-a}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M_2(b-a)^3}{24n^2}.$$

5) Prouver que, si f est convexe (ou concave) sur $[a,b]$, alors les deux approximations précédentes de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ en fournissent un encadrement.

B. la méthode de Simpson

Dans les deux méthodes qui viennent d'être exposées, on approxime d'abord l'intégrale de f sur $[a,b]$ par une formule utilisant la valeur de f en un (ou deux) point(s).

La méthode de Simpson donne une approximation de l'intégrale de f en utilisant, au départ, trois points d'interpolation.

Dans la suite, pour toute application f continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$, on note :

$$\Delta(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right].$$

1) On pose $P_k(t) = \left(t - \dfrac{a+b}{2}\right)^k$.

Calculer $\Delta(P_k)$ pour k dans $\{0,1,2,3\}$.

En déduire que $\Delta(P) = 0$ pour toute fonction polynôme P de degré $\leqslant 3$.

***Thomas Simpson**, mathématicien anglais* (1710-1761).

Il exerce le métier de tisserand, apprend seul les mathématiques, écrit et publie plusieurs ouvrages de mathématiques à partir de 1737. *Sa formule paraît en* 1743 *dans le cas des arcs de parabole. Elle était toutefois déjà connue de Cavalieri en* 1639. *Le grand mérite de Simpson est d'avoir pensé à découper* $[a,b]$ *en* n *morceaux pour améliorer l'approximation.*

2) Dans cette question et dans la suivante, f est une application de classe $\mathcal{C}^4$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$.
On note $M_4 = \sup_{t\in[a,b]} |f^{(4)}(t)|$ et :

$$R_4(x) = \int_{\frac{a+b}{2}}^{x} \frac{(x-t)^3}{3!} f^{(4)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

a) Prouver que $\Delta(f) = \Delta(R_4)$.
b) Montrer que :

$$\forall x \in [a,b] \quad |R_4(x)| \leqslant \frac{M_4}{4!}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^4.$$

En déduire que $|\Delta(f)| \leqslant \dfrac{M_4(b-a)^5}{720}$.

<u>Remarque :</u> Un travail plus fin permet de majorer $|\Delta(f)|$ par $\dfrac{M_4(b-a)^5}{2880}$ au lieu de $\dfrac{M_4(b-a)^5}{720}$.
La recherche de ce meilleur majorant n'est pas dans l'esprit des sections PC et PSI. Aussi, nous contentons-nous de signaler ce résultat.

Les amateurs de calculs vérifieront aisément que, si $f = P_4$, alors $|\Delta(f)| = \dfrac{M_4(b-a)^5}{2880}$.

On ne peut donc pas améliorer cette majoration valable pour l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^4$.

3) Pour tout entier $n > 0$, on pose :

$$S_n(f) = \frac{b-a}{6n}\left[f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) + f(b) + 4\sum_{k=1}^{n} f\left(a + \left[k - \frac{1}{2}\right]\frac{b-a}{n}\right)\right]$$

Prouver que :

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - S_n(f)\right| \leqslant \frac{M_4(b-a)^5}{720\,n^4}.$$

4) Comparez avec votre calculatrice les valeurs approchées obtenues par ces trois méthodes pour :

$$\int_0^{\pi} \sin(t)\,\mathrm{d}t$$

Algorithmique, TD 1

La méthode de Newton, résolution d'équations numériques.

■ Partie mathématique. Algorithme de Newton-Raphson.

Si f est une fonction numérique continue sur $]a,b[$, telle que $f(a)f(b) < 0$, alors nous savons qu'il existe c dans $[a,b]$ tel que : $f(c) = 0$. Quelques dichotomies permettent d'approcher c par un réel x_0, mais cette méthode converge lentement.

On cherche alors une fonction g, définie telle que :

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow g(x) = x$$

sur un intervalle contenant x_0 et c, k-contractante (*cf* TD1), La suite définie par u_0 et, pour tout n entier, $u_{n+1} = g(u_n)$, converge vers c. La convergence est d'autant plus rapide que k est proche de 0.

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, la fonction g est alors choisie de la forme : $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{\alpha}$, avec α proche de $f'(c)$.

Toutefois $f'(c)$ n'est pas connu, mais, lorsque f' ne s'annule pas au voisinage de c, le choix de $\alpha = f'(x)$ y remédie.

c est alors un point fixe attractif pour la fonction h définie par :

$$h(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

La suite définie par x_0 et, pour tout n : $x_{n+1} = h(x_n)$ converge vers c et la convergence est quadratique. Le nombre de décimales correctes est approximativement doublé à chaque itération.

L'expression de la suite correspond à une linéarisation de la fonction f au voisinage de x_n.

En effet, si x_n est calculé, on cherche x_{n+1} tel que :

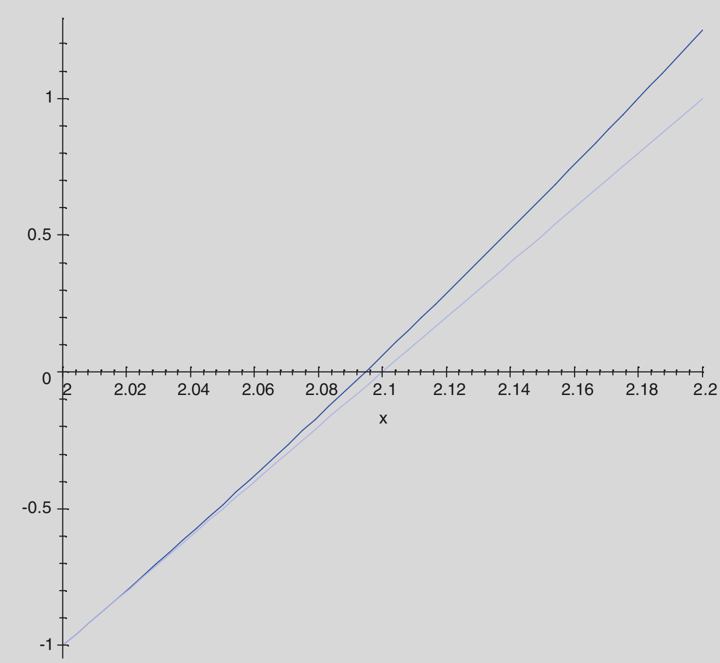
$$f(x_{n+1}) = 0 = f(x_n + h) = f(x_n) + f'(x_n)h + h\varepsilon(h).$$

En négligeant le terme $h\varepsilon(h)$, on obtient $h = x_{n+1} - x_n$, puis x_{n+1}.

Cette méthode a été exposée en 1669 par Newton pour la résolution de l'équation $x^3 - 2x - 5 = 0$, avec $x_0 = 2$.

La formule de linéarisation est due à Raphson en 1690. L'interprétation géométrique est simple. La fonction est approximée par sa tangente.

```
> plot({x^3-2*x-5,10*x-21},x=2..2.2);
```



Partie informatique.

En calcul formel, les nombres flottants (décimaux) sont représentés par des couples (m, e) d'entiers, respectivement la mantisse et l'exposant.

Tous les calculs flottants en grande précision (précision de la machine) sont basés sur les calculs entre grands entiers. Les algorithmes entre grands entiers réalisent les calculs élémentaires comme la somme, la différence et le produit.

Le premier qui ait mis au point une méthode de multiplication rapide semble être A. Karatsuba. Il remarque en 1962 qu'un entier de taille $2k$ peut s'écrire $a+b10^k$ La multiplication de deux tels entiers :

$$(a+b10^k)(c+d10^k) = ac + [(a-b)(c-d) - ac - bd]10^k + bd10^{2k}$$

nécessite donc trois multiplications d'entiers de k chiffres, plus des décalages et des additions.

1) En utilisant la méthode de Newton-Raphson, indiquer un algorithme de calcul de l'inverse d'un entier n'utilisant que des additions et des produits.

```
> restart:b:=11234567890: x:=10^(-10): to 3 do x:=2*x-b*x^2; od;
```

$$x := \frac{876543211}{10000000000000000000}$$

$$x := \frac{889903113378401366139102931}{100000000000000000000000000000000000000}$$

$$x := \frac{890109842964375156914321919557643785687481429337130104118073571}{10000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000}$$

```
> b:=11234567890:Digits:=20: x:=10^(-10): to 6 do x:=2.*x-b*x^2;
  od;
>
```

$$x := .87654321100000000010^{-10}$$

$$x := .88990311337840136614 10^{-10}$$

$$x := .89010984296437515693 10^{-10}$$

$$x := .89010989099999740864 10^{-10}$$

$$x := .89010989100000000091 10^{-10}$$

$$x := .89010989100000000087 10^{-10}$$

```
> 1./b;
```

$$.89010989100000000089 10^{-10}$$

2) Indiquer un algorithme de calcul de $\sqrt{2}$.

Modifier cet algorithme pour prendre en compte le nombre de décimales calculées. Comparer avec la version précédente.

```
> f(x)=x^2-2; x(n+1)=x(n)/2+1/x(n)
> restart:x:=7/5:st:=time(): to 5 do x:=x/2+1/x; od;time()-st;
```

$$x := \frac{99}{70}$$

$$x := \frac{19601}{13860}$$

$$x := \frac{768398401}{543339720}$$

$$x := \frac{1180872205318713601}{835002744095575440}$$

$$x := \frac{2788918330588564181308597538924774401}{1972063063734639263984455073299118880}$$

$$0$$

L'instruction *Maple* suivante donne 1000 décimales exactes de racine 2. Nous vous laissons la joie de les découvrir.

```
> restart:Digits:=1000:x:=1.4:st:=time(): to 9 do x:=x/2.+1/x:
  od:R:=x;evalf(sqrt(2));time()-st;
```

3) Indiquer un algorithme de calcul de la racine k-ième d'un entier $m > 0$.

```
> f(x)=x^k-m et x(n+1)=(k-1)x(n)/k+mx(n)^(1-k)/k.
> restart: x:=3/2: k:=3: m:=5: to 4 do x:=(1-1/k)*x+m/k*x^(1-k);
  od;
```

$$x := \frac{47}{27}$$

$$x := \frac{306061}{178929}$$

$$x := \frac{85982094476505407}{50282628861668427}$$

$$x := \frac{19069761944098427989205077765456086421564637261607 01}{111520644376079833707762661827706727727958080946236 9}$$

```
> restart: Digits:=1: x:=1.5: k:=3: m:=5: to 6 do
  Digits:=2*Digits: x:=(1-1/k)*x+m/k*x^(1-k); od; evalf(5^(1/3));
```

$$Digits := 2$$

$$x := 1.8$$

$$Digits := 4$$

$$x := 1.715$$

$$Digits := 8$$

$$x := 1.7099906$$

$$Digits := 16$$

$$x := 1.709975946802264$$

$$Digits := 32$$

$$x := 1.7099759466766969893623295134493$$

$$Digits := 64$$

$$x := 1.709975946676696989353108872543860109868104830668576167181479842$$

$$1.709975946676696989353108872543860109868055110543054924382861707$$

Exercice résolu

Une série de fonctions

ÉNONCÉ

On considère la série de fonctions de terme général $u_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{1+n^2}$ sur $\mathbb{R}^+$.

1) Montrer que la série converge normalement sur $\mathbb{R}^+$. Qu'en déduisez-vous ?

2) Montrer que la fonction $S = \displaystyle\sum_0^{\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

3) Montrer que S vérifie une équation différentielle simple du second ordre sur $\mathbb{R}^{+*}$.

4) Montrer que la fonction S n'est pas dérivable en 0.

5) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S(x)$.

CONSEILS

On montre, pour tout $k \geqslant 1$, la convergence normale de la série des dérivées k-ièmes sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

SOLUTION

1) Pour tout n de $\mathbb{N}$, et tout $x \geqslant 0$: $|u_n(x)| = \dfrac{e^{-nx}}{n^2+1} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

Les fonctions u_n sont continues sur $\mathbb{R}^+$ et $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$. Sa fonction somme, S, est continue sur $\mathbb{R}^+$.

2) Les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$ et, pour tout $p \geqslant 1$:

$$u_n^{(p)}(x) = (-n)^p \frac{e^{-nx}}{n^2+1}.$$

Soit $a > 0$. $\quad \forall x \in [a, +\infty[\quad |u_n^{(p)}(x)| \leqslant e^{-na} n^{p-2}$.

La série $\sum e^{-na} n^{p-2}$ converge, la série de fonctions $\sum u_n^{(p)}$ converge normalement sur $[a, +\infty[$. La fonction S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

3) Pour tout $x > 0$, on a :

$$S''(x) + S(x) = \sum_0^{\infty} u_n''(x) + \sum_0^{\infty} u_n(x) = \sum_0^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1-e^{-x}}.$$

4) Pour $x > 0$, $\quad S'(x) = \displaystyle\sum_0^{\infty} \left(-n \frac{e^{-nx}}{1+n^2} \right)$.

Donc pour tout N de $\mathbb{N}^*$: $|S'(x)| = \displaystyle\sum_0^{\infty} \left(n \frac{e^{-nx}}{1+n^2} \right) > \sum_0^{N} n \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$.

Soit $A > 0$, il existe un entier N tel que $\displaystyle\sum_0^{N} \frac{n}{1+n^2} > A$ et il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout x de $[0, \alpha[$ et tout $n \leqslant N$, on a $e^{-nx} > \dfrac{1}{2}$.

Finalement, on obtient :

$$\forall A > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in [0, \alpha[\qquad |S'(x)| > \frac{A}{2}.$$

En d'autres termes : $\displaystyle\lim_{x\to 0} S'(x) = -\infty$.

Le graphe de S admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.

5) La convergence normale sur $\mathbb{R}^+$ de la série de fonctions $\sum u_n$ permet d'écrire : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S(x) = \sum_0^{\infty} \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2} \right) = 1.$

Exercices

1 Soit F la fonction définie par $F(x) = \int_0^x \ln(1+xt)\,\mathrm{d}t$.

Étudier la dérivabilité de F.

Indication : Poser $u = xt$.

2 Soit f une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \neq 0.$$

On fixe un entier $n > 0$.

Prouver l'existence d'une famille $(x_{n,i})_{i\in[\![0,n]\!]}$ de réels telle que :

- $a = x_{n,0} < x_{n,1} < \ldots < x_{n,n} = b$;
- $\forall i \in [\![1, n]\!] \quad \int_{x_{n,i-1}}^{x_{n,i}} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

3 Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant le domaine de définition.

1) $f(x) = [\sin(2x) - 2\cos(3x)]\mathrm{e}^x$.

2) $g(x) = x\mathrm{Arccos}^2(x)$.

4 Calculer $I = \int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}t}{\cos(t)^3 + \cos(t)}$.

5 Calculer une primitive de $\frac{1}{(2t+1)^{2/3} - (2t+1)^{1/2}}$ sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

Indication : $(2t+1)^{2/3}$ et $(2t+1)^{1/2}$ sont des puissances entières de $(2t+1)^{1/6}$.

6 Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, dérivable en 0.

Montrer que la fonction F définie sur $]0, 1]$ par $F(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t$ peut être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.

7 Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ et a un élément de $]-\infty, 0[\cup\{-\infty\}$.

On suppose que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = a$.

Déterminer la nature de la série $\sum f(n)$.

8 *(PSI)* Étudier la convergence de la suite (f_n) sur $[0, 1]$ vers f.

Peut-on en déduire que :

$$\int_0^1 f = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n ?$$

1) $f_n(x) = nx\exp(-nx^2)$;

2) $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^4}$;

3) $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

9 *(PSI)* Déterminer les domaines de convergence simple et uniforme de la série de fonctions $\sum (-1)^n \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}$.

Calculer la somme S de cette série.

10 On pose, pour x réel, $u_n(x) = nx^n$. Calculer la somme $\sum_0^\infty u_n(x)$ lorsqu'elle existe.

11 Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, telle que :

$$\exists k > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f(x) \leqslant k\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que $f = 0$.

12* On considère l'arc défini par :

$$\begin{cases} x(t) = a\cos^3(t) \\ y(t) = a\sin^3(t) \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \ (a > 0, \text{ fixé})$$

1) Tracer cet arc.

2) On le découpe en n arcs de même longueur délimités par les points $M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}, M_n$.

Déterminer la limite de $\sum_{i=0}^n \frac{OM_i}{n+1}$.

13* **1)** Soit g une application de classe $\mathcal{C}^2$ de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$. On note $M = \sup_{t\in[a,b]} |g''(t)|$.

Montrer que :

$$\left|g(b) + g(a) - 2g\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leqslant \frac{M(b-a)^2}{4}.$$

Indication : utiliser l'égalité de Taylor avec reste intégral.

2) Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$.

On pose :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left[f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)\right];$$

$$v_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left[f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right]$$

Montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite que l'on déterminera.

Indication : Étudier $u_n + v_n$ et $u_n - v_n$.

3) En déduire

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n+1)(2n+3)\ldots(4n-1)}{(2n)(2n+2)\ldots(4n-2)}.$$

14 * Trouver toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)+\int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t = 1 \qquad (\mathbf{1})$$

15 * Dans cet exercice, $E = \mathbb{R}_3[X]$ et, pour tout réel x et tout élément P de E, on pose $f_x(P) = P(x)$ ainsi que

$$\Phi(P) = \int_a^b P(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans la suite, a, b et c sont trois réels distincts.

N.B. : L'utilisation du calcul formel est intéressante.

1) Montrer que les quatre formes linéaires f_a, f_b, f_c et Φ forment une famille libre de E^* si, et seulement si,

$$\int_a^b (t-a)(t-b)(t-c)\,\mathrm{d}t \neq 0.$$

2) Trouver une condition simple liant a, b et c pour que

$$\int_a^b (t-a)(t-b)(t-c)\,\mathrm{d}t = 0.$$

3) On suppose que $\displaystyle\int_a^b (t-a)(t-b)(t-c)\,\mathrm{d}t = 0.$

Déterminer α, β et γ tels que :

$$\Phi = \alpha\, f_a + \beta\, f_b + \gamma\, f_c.$$

En déduire une expression simple de $\displaystyle\int_a^b P(t)\,\mathrm{d}t$ valable pour tout polynôme de degré $\leqslant 3$.

16 Dans cet exercice, $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ et, pour tout élément f de E, on définit l'application $\Phi(f)$ en posant :

$$\Phi(f)(x) = \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1) Prouver que Φ est un endomorphisme de E.

2) Étudier l'injectivité et la surjectivité de Φ.

3) Déterminer les éléments propres de Φ.

17 * **1)** Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 3$, l'équation $x^n = \mathrm{e}^x$ admet une unique solution sur $[0,n]$, notée u_n.

2) Démontrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite L.

3) Déterminer un développement limité de u_n à la précision $o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

18 * **1)** Montrer que, pour tout réel $x > 0$, on peut poser $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t$, et déterminer le signe de $f(x)$.

2) Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

3) Calculer f' et prouver que f' s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}^{+*}$ en un point α de $]1,2[$.

4) En utilisant la décroissance de la fonction $(t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2})$, déterminer un encadrement simple de $f(x)$ et déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.

5) Dresser le tableau des variations de f et donner l'allure de son graphe.

19 * Étude et graphe de la fonction définie par :

$$F(x) = \int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}.$$

20 ** On note $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et on définit l'endomorphisme T de E par :

$$T(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par récurrence, on définit $T^0 = \mathrm{Id}_E$ et, pour $n \geqslant 0$:

$$T^{n+1} = T\circ T^n.$$

1) Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad \forall x\in\mathbb{R}\quad T^n(f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f(t)\,\mathrm{d}t$$

2) Déterminer $\mathrm{Ker}(T^n)$ et $\mathrm{Im}(T^n)$ pour tout entier $n > 0$.

En déduire que (T^n) induit un isomorphisme de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ dans $\mathrm{Im}(T^n)$.

3) Déterminer les spectres de T et T^2.

4) Montrer que, pour tout élément f de E, la série de fonctions $\sum T^n(f)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et donner une expression intégrale de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} T^n(f)(x)$.

21 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{x^2 + n^2}$$

1) Donner le domaine de définition de f. Calculer $f(0)$.

2) Donner une expression de $f(x) - \ln 2$ sous la forme de la somme d'une série de fonctions.

En déduire la limite de f en $+\infty$.

3) Montrer que f est continue, puis de classe $\mathcal{C}^{\infty}$.

22** Soit g une application continue de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que :

$\forall t \in [0, T]$

$$\int_0^t g(u)\,\mathrm{d}u = \lim_{x \to +\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^T \mathrm{e}^{kx(t-u)} g(u)\,\mathrm{d}u$$

23 Pour x réel, on pose $f(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ quand la série converge.

1) Déterminer l'ensemble E de définition de la fonction f.

2) Donner pour la dérivée $f'(x)$ une expression simple valable sur $]-1, 1[$. En déduire le tableau de variations de f.

3) On donne :

$$f(1) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Calculer $f(-1)$.

4) Préciser les tangentes en $x = -1$ et $x = 1$ à la courbe d'équation $y = f(x)$.

5) Trouver l'ensemble D de définition de la fonction φ telle que :

$$\varphi(x) = f(x) + f\left(-\frac{x}{1-x}\right).$$

Calculer $\varphi'(x)$. En déduire la valeur de $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

7 Fonctions intégrables

Introduction

L'histoire de la théorie de l'intégration est typique du cheminement des idées mathématiques.
Les mathématiciens du XVIII*e siècle ont utilisé le calcul différentiel et intégral sur des bases intuitives.*
En 1832*, les travaux de Cauchy sur la notion de limite lui permettent de définir rigoureusement l'intégrale d'une fonction* f *continue sur un segment* $[a, b]$.
En 1854*, Bernhard Riemann, dans son mémoire sur les séries trigonométriques, élargit le problème en cherchant à préciser les fonctions auxquelles cette définition s'applique. Il introduit les fonctions intégrables au sens de Riemann, un ensemble complexe, difficile à manipuler.*
Au début du XX *e siècle, Émile Borel définit les ensembles de réels de mesure nulle.*
Henri Lebesgue, dans sa thèse de 1902*, reprend certaines idées de Borel et fournit un cadre plus simple à l'intégration.*
Des théorèmes puissants vont s'appliquer aux suites et séries de fonctions, ainsi qu'aux fonctions définies par des intégrales.
Nous présenterons certains d'entre eux en nous limitant à des fonctions continues par morceaux.

Nous avons déjà défini la notion d'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment. Nous allons maintenant généraliser cette définition à des fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque.

OBJECTIFS

- Convergence d'une intégrale généralisée.
- Intégrale absolument convergente.
- Fonction continue par morceaux sur un intervalle I, intégrable sur I.
- Critères d'intégrabilité d'une fonction continue par morceaux sur I.
- Espaces vectoriels normés de fonctions intégrables.
- Théorème de convergence dominée.
- Intégration terme à terme d'une série de fonctions.
- Continuité d'une fonction définie par une intégrale.
- Dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale.

I désigne un intervalle d'intérieur non vide et $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les fonctions considérées dans ce chapitre seront des *fonctions continues par morceaux sur* I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1 Convergence des intégrales généralisées

1.1. Intégrales convergentes

L'étude des séries nous a conduit à définir les séries numériques convergentes et les séries absolument convergentes. Nous allons, en procédant de même, étendre la notion d'intégrale.

- Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b[,\mathbb{K})\left(b \in \overline{\mathbb{R}}\right)$. Pour tout x de $[a,b[$, on pose :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Si F a une limite à gauche en b, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ (ou $\int_{[a,b[} f(t)\,\mathrm{d}t$) converge et on note :

$$\int_{[a,b[} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Nous travaillerons toujours avec des fonctions continues par morceaux sur un intervalle I. Lorsque l'intervalle I considéré n'est pas un segment de $\mathbb{R}$, les intégrales sont qualifiées d'impropres ou de généralisées.

- On définit, de manière analogue, si f est une fonction de $\mathcal{CM}(]a,b],\mathbb{K})$, $(a \in \overline{\mathbb{R}})$, lorsqu'elle converge, l'intégrale $\int_a^b f = \int_{]a,b]} f$.

Lorsque $I = [a,b]$, et f est dans $\mathcal{CM}([a,b])$, l'intégrale $\int_a^b f$ définie dans le *chapitre* 5, est la limite en b de $(x \mapsto \int_a^x f)$. Il est cohérent d'utiliser la même notation.

- Soit f une fonction de $\mathcal{CM}(]a,b[,\mathbb{K})\left((a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2\right)$, et c un point de $]a,b[$.

Si les fonctions $\left(x \mapsto \int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t\right)$ et $\left(x \mapsto \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)$ admettent une limite, réelle ou complexe, respectivement en a et en b, la somme de ces limites est notée, de manière impropre, $\int_a^b f = \int_{]a,b[} f$. On dit alors que l'intégrale $\int_a^b f$ (ou $\int_{]a,b[} f$) est convergente.

Une intégrale généralisée qui ne converge pas est dite divergente.

Exemple

La fonction $[\pi,+\infty[\to \mathbb{C}, x \mapsto \left(2\mathrm{i} - \dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}$ est continue sur $[\pi,+\infty[$.

$$\int_\pi^x \left(2\mathrm{i} - \frac{1}{t^2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}}{t}\right]_\pi^x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}}{x} - \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi^2}}{\pi}.$$

Donc :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_\pi^x \left(2i - \frac{1}{t^2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi^2}}{\pi}.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty}\left(2\mathrm{i}-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente et :

$$\int_{\pi}^{+\infty}\left(2\mathrm{i}-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t=-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi^2}}{\pi}.$$

En définitive, si I est un intervalle, et f une fonction de $\mathcal{CM}(I,\mathbb{K})$, la notation $\displaystyle\int_I f$ désigne :

- si I est un segment, l'intégrale définie dans le *chapitre* 5 ;
- sinon, lorsque l'intégrale $\displaystyle\int_I f$ converge, la valeur de cette intégrale impropre.

1.2. Les exemples à connaître

Les intégrales généralisées $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^a}$ et $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t^a}$ sont appelées **intégrales de Riemann**.

Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^a}$, où a est réel.

Les fonctions f_a définies sur $[1,+\infty[$ par $f_a(x)=\dfrac{1}{x^a}$ sont continues sur $[1,+\infty[$.

- Si $a=1$, alors l'intégrale diverge.
- Si $a\neq 1$ alors, pour tout $x>1$:

$$\int_1^x\frac{\mathrm{d}t}{t^a}=\left[-\frac{t^{-a+1}}{a-1}\right]_1^x=\frac{1}{a-1}\left(1-x^{-a+1}\right).$$

L'intervalle $[1,+\infty[$ n'est pas borné.

Finalement :

L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^a}$ converge si, et seulement si, $a>1$.
Dans ce cas :

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^a}=\frac{1}{a-1}.$$

Rapport TPE, 2002
« On a ainsi vu des candidats affirmer (et même tenter de démontrer) l'intégrabilité de $\left(x\mapsto\dfrac{1}{x}\right)$ *sur* $]0,1[$. *»*

Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t^a}$, où a est réel.

Les fonctions f_a définies sur $]0,1]$ par $f_a(x)=\dfrac{1}{x^a}$ sont continues sur $]0,1]$.

- Si $a=1$, alors l'intégrale diverge.
- Si $a\neq 1$ alors, pour tout $x>0$:

$$\int_x^1\frac{\mathrm{d}t}{t^a}=\left[-\frac{t^{-a+1}}{a-1}\right]_x^1=\frac{1}{1-a}\left(1-x^{1-a}\right).$$

L'intervalle $]0,1]$ est borné, mais les fonctions f_a ne sont pas bornées sur cet intervalle si $a>0$.

L'intégrale $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^a}$ converge si, et seulement si, $a < 1$. Dans ce cas :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^a} = \frac{1}{1-a}.$$

L'intégrale généralisée :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^a}$$

est toujours divergente.

- Nature de l'intégrale $\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$.

La fonction définie sur $]0,1]$ par $f(x) = \ln(x)$ est continue sur $]0,1]$.

Pour tout $x > 0$:

$$\int_x^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = [t\ln(t) - t]_x^1.$$

L'intégrale converge et $\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = -1$.

L'intervalle $]0,1]$ est borné, mais la fonction $\ln$ n'est pas bornée sur cet intervalle.

- Nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \exp(-at)\,\mathrm{d}t$, où a est réel.

Les fonctions f_a, définies sur $[0,+\infty[$ par $f_a(x) = \exp(-at)$, sont continues sur $[0,+\infty[$.

Si $a = 0$, l'intégrale diverge.

Si $a \neq 0$, pour tout $x > 0$:

$$\int_0^x \exp(-at)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\exp(-at)}{a}\right]_0^x.$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \exp(-at)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si $a > 0$.

L'intervalle $[0,+\infty[$ n'est pas borné.

1.3. Intégrales absolument convergentes.

Soit I un intervalle qui n'est pas un segment de $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction f de $\mathcal{CM}(I,\mathbb{K})$ a une **intégrale absolument convergente** sur I, ou est **intégrable** sur I si l'intégrale $\int_I |f|$ converge.

L'ensemble **des fonctions continues par morceaux et intégrables de I** dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{I}(I,\mathbb{K})$.

La notation $\mathcal{I}(I,\mathbb{K})$ n'est pas universelle. Vous rencontrerez parfois $\mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$.
Attention ! Dans les ouvrages de mathématiques plus avancées, cette notation désigne un ensemble plus vaste que $\mathcal{I}(I,\mathbb{K})$, dans le cadre d'une théorie plus complexe.

Théorème 1
Une intégrale absolument convergente est convergente.

Ce résultat est admis en section *PC*

Démonstration

Rédigeons la démonstration dans le cas où $I = [a,b[$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soit f dans $\mathcal{I}(I,\mathbb{R})$. Nous savons que : $0 \leqslant f + |f| \leqslant 2|f|$.

La fonction $\left(x \mapsto \int_a^x (f + |f|)(t)\,\mathrm{d}t\right)$ est croissante sur $[a,b[$, majorée par $2\int_a^b |f|(t)\,\mathrm{d}t$. Elle admet une limite réelle en b. L'intégrale généralisée $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Lorsque la fonction f est à valeurs complexes, on utilise :

$$f = \mathrm{Re}(f) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(f).$$

Théorème 2

Une fonction f de $\mathcal{CM}(I,\mathbb{K})$ est intégrable sur I si, et seulement s'il existe un réel positif M tel que, pour tout segment J contenu dans I, on ait : $\displaystyle\int_J |f| \leqslant M$.

Démonstration

Soit f une fonction de $\mathcal{CM}(I,\mathbb{K})$.

Si f est intégrable sur I, le réel $M = \displaystyle\int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t$ convient.

Réciproquement, rédigeons dans le cas où $I = [a,b[$. Pour tout $a < x < b$, $\displaystyle\int_a^x |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant M$. La fonction croissante $\left(x \mapsto \displaystyle\int_a^x |f(t)|\,\mathrm{d}t\right)$ a donc une limite réelle en b. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^x |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

Exemples

- La fonction $f : (x \mapsto \mathrm{e}^{-x})$ est continue et positive sur $\mathbb{R}^+$. Si $[a,b] \subset \mathbb{R}^+$, alors :

$$\int_a^b \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = [-\mathrm{e}^{-b} + \mathrm{e}^{-a}] \leqslant 1.$$

Donc f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. De plus : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$.

- La fonction $f : (x \mapsto |x|\sin(x)\mathrm{e}^{-x^2})$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Sur $\mathbb{R}^+$, la fonction f est intégrable car, pour tout $[a,b] \subset \mathbb{R}^+$:

$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-a^2} - \mathrm{e}^{-b^2}\right) \leqslant \frac{1}{2}$$

Elle est également intégrable sur $\mathbb{R}^-$, car, pour tout $[a,b] \subset \mathbb{R}^-$:

$$\int_a^b |f| \leqslant \int_a^b |x|\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}.$$

Elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}$.

► ***Pour s'entraîner : ex. 1.***

En pratique, pour montrer que l'intégrale converge, nous essaierons d'abord de prouver que la fonction f est intégrable sur I. Lorsque $I =]a,b[$, l'intégrabilité sur I de f équivaut à l'intégrabilité sur $]a,c]$ et sur $[c,b[$, de f avec $a < c < b$.

Toutefois, il existe des fonctions non intégrables sur I dont l'intégrale converge.

Rapport CCP, 2001

« L'intégrabilité de β et γ est rarement convaincante. »

Rapport Centrale, 2000

« ...Ce que l'on doit vérifier dans le cadre strict du programme est la continuité, ou la continuité par morceaux de l'intégrande. »

Rapport Mines-Ponts, 2001

« De plus, on peut attendre de candidats au concours commun qu'ils justifient dans un premier temps l'existence des intégrales qu'ils manipulent. »

Rapport Centrale, 2001

« Les théorèmes généraux sur l'intégrabilité sont en général connus, les définitions le sont beaucoup moins ! »

Rapport ENSAM, 2002

« La notion d'intégrabilité de fonctions à valeurs complexes est maîtrisée par trop peu d'étudiants. »

Application 1

L' intégrale $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ *par* $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ *si* $t \neq 0$, $f(0) = 1$.

1) *Montrer que la fonction* f *n'est pas intégrable sur* $\mathbb{R}^+$.

2) *Montrer que l'intégrale* $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$ *est convergente.*

3) *En déduire que l'intégrale* $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\mathrm{e}^t)\, \mathrm{d}t$ *est convergente, mais non absolument convergente.*

1) f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Considérons les intégrales $\int_0^{n\pi} |f|$.

$$\int_0^{n\pi} |f| = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin u|}{u}\, \mathrm{d}u$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t + k\pi}\, \mathrm{d}t$$
$$\geqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^{\pi} \sin t\, \mathrm{d}t.$$

Donc, $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{n\pi} |f| = +\infty$ et f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

2) Intégrons par parties. Pour tout $x > 0$:

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t = \left[\frac{1 - \cos t}{t}\right]_0^x + \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t^2}\, \mathrm{d}t.$$

La fonction $g : \left(t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^2}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et prolongeable par continuité en 0. g est bornée et donc intégrable sur $]0, 1]$. Pour tout $t \geqslant 1$:

$$\left|\frac{1 - \cos t}{t^2}\right| \leqslant \frac{2}{t^2}.$$

Donc g est intégrable sur $[1, +\infty[$ car son intégrale sur tout segment contenu dans $[1, +\infty[$ est majorée par $\int_{[1,+\infty[} \frac{2}{t^2}\, \mathrm{d}t$.

L'intégrale $\int_0^x \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$ admet donc une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$ et :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2}\, \mathrm{d}t.$$

3) La fonction $h : (t \mapsto \sin(\mathrm{e}^t))$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Soit a et b deux réels, $b > 0$.

Nous avons :

$$\int_0^b |\sin(\mathrm{e}^t)|\, \mathrm{d}t = \int_1^{\mathrm{e}^b} \left|\frac{\sin u}{u}\right| \mathrm{d}u.$$

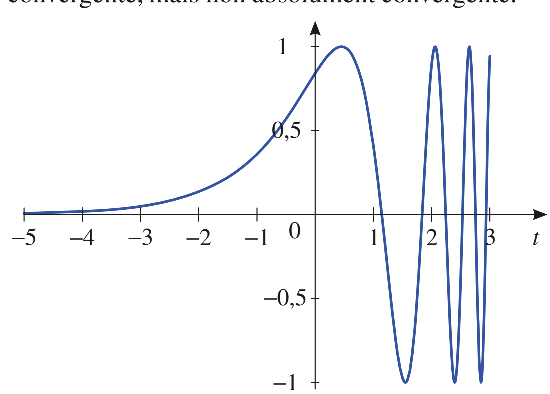
La fonction h n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Mais :

$$\int_a^b \sin\left(\mathrm{e}^t\right) \mathrm{d}t = \int_{\mathrm{e}^a}^{\mathrm{e}^b} \frac{\sin u}{u}\, \mathrm{d}u$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\mathrm{e}^t)\, \mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u}\, \mathrm{d}u.$$

On en déduit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\mathrm{e}^t)\, \mathrm{d}t$ est convergente, mais non absolument convergente.



Doc. 1. $(t \mapsto \sin(\mathrm{e}^t))$.

2 Critères d'intégrabilité de fonctions positives

2.1. Intégrabilité et primitives

Lorsqu'une primitive F de la fonction f est connue, son utilisation est très efficace.

Théorème 3

Soit f une fonction continue par morceaux de I dans $\mathbb{R}^+$ et F une primitive de f sur I. Alors :

- f est intégrable sur I si, et seulement si, la fonction F est bornée sur I ;
- si f est intégrable sur I, on a :

$$\int_I f = \lim_{y \to \sup I} F(y) - \lim_{x \to \inf I} F(x).$$

Exemple

Posons $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$. f est continue, positive sur $\mathbb{R}$. Sa primitive $F : (t \mapsto \text{Arctan } t)$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Elle est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \pi$.

▶ ***Pour s'entraîner : ex. 2 et 3.***

Application 2

Convergence et limite de la suite $u_n = \displaystyle\sum_1^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$

Étudier la suite définie par :

$$u_n = \sum_1^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}.$$

Posons $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$ sur $]0, 1[$.

La fonction f est continue et positive sur $]0, 1[$.

Son graphe admet la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$ pour axe de symétrie. Une primitive de f sur $]0, 1[$ est la fonction $(t \mapsto \text{Arcsin}\,(2t-1))$ (*doc.* 2).

Avec Maple :

```
> int(1/sqrt(t*(1-t)),t);
```

$$\text{Arcsin}\,(2t-1)$$

Doc. 2. *Une primitive de* f.

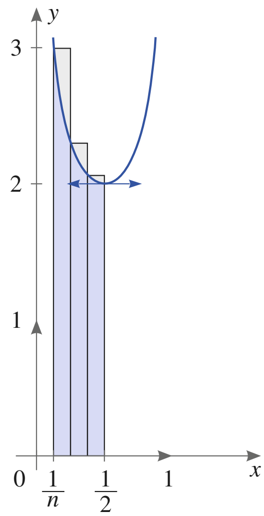
Cette primitive est bornée sur $]0, 1[$, donc f est intégrable sur $]0, 1[$.

$$u_n = \sum_1^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} = \frac{1}{n} \sum_1^{n-1} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}\left(1 - \frac{k}{n}\right)}}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_1^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Posons $v_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_1^{\mathrm{E}(n/2)} f\left(\frac{k}{n}\right)$. Lorsque n est pair, $2v_n = u_n + \dfrac{2}{n}$ et lorsque n est impair, $2v_n = u_n$.

De plus, la fonction f est décroissante sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right]$.



Doc. 3. *Comparaison intégrale et suite*

Pour tout k de $\left[\!\left[1, \mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right)-1\right]\!\right]$:

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{(k+1)}{n}} f \leqslant \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{(k-1)}{n}}^{\frac{k}{n}} f.$$

Et pour tout $k = \mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right)$: $\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{(k-1)}{n}}^{\frac{k}{n}} f.$

Nous en déduisons : $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right)}{n}} f \leqslant v_n \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} f.$

Puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right)}{n}} f = \int_0^{\frac{1}{2}} f.$ D'où :

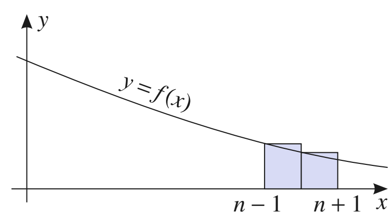
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} 2v_n = \int_{]0,1[} f = \pi.$$

2.2. Comparaison à une série numérique (*PSI*)

Théorème 4

Soit f dans $\mathcal{CM}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, décroissante, alors la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ si, et seulement si, la série $\sum f(n)$ converge :

$$f \in \mathfrak{I}\left(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+\right) \Leftrightarrow \sum f(n) \quad \text{converge.}$$



Doc. 4. *Comparaison d'une intégrale à une série numérique.*

Démonstration

Reportez-vous au *chapitre* 1 sur les séries numériques.

Exemples : Les intégrales de Riemann

- Les fonctions f_a définies sur $[1, +\infty[$ par $f_a(x) = \dfrac{1}{x^a}$ sont continues et positives sur $[1, +\infty[$.

Lorsque $a > 0$, la fonction f_a est positive, continue et décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Le *théorème* précédent nous indique qu'elle est intégrable si, et seulement si, la série $\sum \frac{1}{n^a}$ converge, donc si, et seulement si, $a > 1$.

Lorsque $a \leqslant 0$, la fonction f_a n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car ses primitives ne sont pas bornées.

- Si b est un réel fixé, les fonctions g_a, définies sur $]b, +\infty[$ par :

$$g_a(x) = \frac{1}{(x-b)^a},$$

sont continues et positives sur cet intervalle. Pour quelles valeurs de a sont-elles intégrables sur $[b+1, +\infty[$?

Rapport Centrale, 2000

« Les erreurs les plus fréquentes sont de croire que $\frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. »

La fonction g_a n'est pas intégrable sur $]b, +\infty[$. Elle est intégrable sur $]b, b+1]$ lorsque $a < 1$.

Soit en reprenant le calcul précédent, soit en effectuant le changement de variable défini par $u = x - b$, vous montrerez aisément que :

La fonction $\left(x \mapsto \dfrac{1}{(x-b)^a}\right)$ est intégrable sur $[b+1, +\infty[$ si, et seulement si, $a > 1$.

► ***Pour s'entraîner : ex. 4.***

2.3. Critères d'intégrabilité de fonctions à valeurs positives par comparaison

2.3.1 Croissance de l'intégrale

Théorème 5 : Croissance de l'intégrale

Soit f, g dans $\mathcal{CM}\left(I, \mathbb{R}^+\right)$ telles que $0 \leqslant f \leqslant g$.

• Si g est intégrable sur I, alors f est intégrable sur I et :

$$0 \leqslant \int_I f \leqslant \int_I g.$$

• Si f n'est pas intégrable sur I, alors g ne l'est pas.

Les critères énoncés dans ce paragraphe sont des conditions suffisantes d'intégration.

Démonstration

• Si g est intégrable sur I, alors, pour tout segment $[a, b]$ contenu dans I, on a :

$$0 \leqslant \int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g \leqslant \int_I g = M.$$

Donc f est intégrable sur I, et $0 \leqslant \displaystyle\int_I f \leqslant \int_I g$.

• Par contraposée, si f n'est pas intégrable sur I, g ne l'est pas.

► ***Pour s'entraîner : ex. 5.***

Application 3

Deux calculs d'intégrale

1) *Montrer que la fonction* $\left(t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}(1+t^2)}\right)$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}^{+*}$ *et calculer* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{+*}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(1+t^2)}$.

2) *Soit* $\alpha > 0$. *Préciser pour quelles valeurs de* α, *la fonction* $\left(t \mapsto \dfrac{\operatorname{Arctan} t}{t^\alpha}\right)$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}^{+*}$.

3) *Calculer* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{+*}} \frac{\operatorname{Arctan} t}{t^{3/2}} \mathrm{d}t$.

1) La fonction $\left(t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}(1+t^2)}\right)$ est continue et positive sur $\mathbb{R}^{+*}$.

De plus, $\dfrac{1}{\sqrt{t}(1+t^2)} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et la fonction $\left(t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ est intégrable sur $]0, 1]$.

Pour tout $t \geqslant 1$, on a $\dfrac{1}{\sqrt{t}(1+t^2)} \leqslant \dfrac{1}{(1+t^2)}$

et la fonction $\left(t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)}\right)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Donc la fonction $\left(t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}(1+t^2)}\right)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(1+t^2)} = \lim_{x\to+\infty} 2\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{1}{(1+t^2)}\frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}}.$$

Effectuons le changement de variable $u=\sqrt{t}$.

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(1+t^2)} = 2\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^4)} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

Avec Maple

```
> int(2/(1+u^4)),u=0..infinity);
```

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

Doc. 5.

2) La fonction $\left(t \mapsto \dfrac{\text{Arctan}\, t}{t^\alpha}\right)$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$.

Or, sur $]0,1]$, on a :

$$\frac{t^{1-\alpha}}{2} \leqslant \frac{\text{Arctan}\, t}{t^\alpha} \leqslant t^{1-\alpha}.$$

La fonction $(t \mapsto t^{1-\alpha})$ est intégrable sur $]0,1]$ si, et seulement si, $\alpha < 2$.

Et, sur $[1,+\infty[$,

$$\frac{\pi}{4}\frac{1}{t^\alpha} \leqslant \frac{\text{Arctan}\, t}{t^\alpha} \leqslant \frac{\pi}{2}\frac{1}{t^\alpha}.$$

La fonction $\left(t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}\right)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Donc la fonction $\left(t \mapsto \dfrac{\text{Arctan}\, t}{t^\alpha}\right)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ si, et seulement si, $1 < \alpha < 2$.

3) Fixons $0 < \varepsilon < A$ et intégrons par parties :

$$\int_\varepsilon^A \frac{\text{Arctan}\, t}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t = \left[-2\frac{\text{Arctan}\, t}{\sqrt{t}}\right]_\varepsilon^A + \int_\varepsilon^A 2\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(1+t^2)}.$$

Puis :

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{Arctan}\, t}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(1+t^2)} = \pi\sqrt{2}.$$

2.3.2 Intégrabilité et comparaison de fonctions au voisinage d'un point

Théorème 6

Soit b dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ et f, g deux fonctions de $\mathcal{CM}\left([a,b[,\mathbb{R}^+\right)$.

Si $f =_b O(g)$ et g est intégrable sur $[a,b[$, alors f est intégrable sur $[a,b[$.

On obtiendrait un théorème analogue avec des fonctions continues par morceaux sur $]a,b]$, $a \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ et $f =_a O(g)$

Démonstration

Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{CM}\left([a,b[,\mathbb{R}^+\right)$.

Si $f =_b O(g)$, alors :

$$\exists K > 0 \quad \exists c \in]a,b[\quad \forall x \in [c,b[\qquad 0 \leqslant f(x) \leqslant Kg(x).$$

f est donc intégrable sur $[c,b[$. Elle l'est sur $[a,b[$.

Rapport Centrale, 2001

« Pour l'étude de l'intégrabilité, on affirme (plus qu'on ne montre) qu'on a affaire à un $o(\frac{1}{t^2})$*. Le désarroi est grand lorsqu'on ne peut pas conclure ainsi. Étudier l'intégrabilité de* $x \to \dfrac{\sin x}{(x+\sin x)}$ *est un exercice insurmontable. »*

Corollaire 6.1

Soit b dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, et f et g deux fonctions de $\mathcal{CM}\left([a,b[,\mathbb{R}^+\right)$.

Si $f \sim_b g$, alors f est intégrable sur $[a,b[$ si, et seulement si, g l'est.

2.3.3 Quelques exemples

Approfondissez l'étude de ces exemples, ils vous resserviront.

- Considérons la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$f(x) = x^n e^{-ax} \quad (n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}^{+*}).$$

f est continue sur $\mathbb{R}^+$, positive. Au voisinage de $+\infty$, $f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et la fonction g, définie sur $[1,+\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x^2}$, est intégrable sur $[1,+\infty[$; donc f est intégrable sur $[0,+\infty[$.

De plus :

$$\int_0^x t^n e^{-at}\,dt = \left[-\frac{t^n e^{-at}}{a}\right]_0^x + \frac{n}{a}\int_0^x t^{n-1}e^{-at}\,dt.$$

Donc :

$$\int_0^\infty t^n e^{-at}\,dt = \frac{n}{a}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-at}\,dt.$$

Une récurrence simple vous permettra de prouver que :

$$\int_0^\infty t^n e^{-at}\,dt = \frac{n!}{a^{n+1}}.$$

- Soit la fonction f définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x) = \frac{e^{1/x}}{1+x^2}$.

f est continue sur $[1,+\infty[$, positive.

Au voisinage de $+\infty$, $f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$, qui est intégrable sur $[1,+\infty[$. f est donc intégrable sur $[1,+\infty[$.

- Soit a et b deux réels $(a < b)$ et f une fonction continue par morceaux, positive et bornée sur $[a,b[$. Alors la fonction F définie sur $[a,b[$ par $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est majorée. En effet :

$$\forall x \in [a,b[\quad F(x) \leqslant (b-a) \sup_{t\in[a,b[} f(t).$$

f est donc intégrable sur $[a,b[$.

Ainsi, la fonction définie sur $]0,1]$ par $f(x) = 1 - \sin\frac{1}{x}$ est intégrable sur $]0,1]$.

▶ **Pour s'entraîner : ex. 6 à 8.**

Application 4

Intégrales de Bertrand

Considérons les fonctions définies sur $\mathbb{R}^{+*}\setminus\{1\}$ par :

$$f_{a,b}(x) = \frac{1}{x^a|\ln x|^b},$$

où a et b sont deux réels fixés. Ces fonctions sont continues et positives sur $\mathbb{R}^{+*}\setminus\{1\}$.

1) *Pour quelles valeurs de a et b, ces fonctions sont-elles intégrables sur $\left]0,\frac{1}{2}\right]$?*

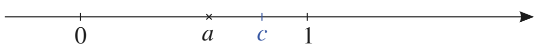
2) *Pour quelles valeurs de a et b, ces fonctions sont-elles intégrables sur $[2,+\infty[$?*

Attention ! Contrairement à l'étude des intégrales de Riemann, dont les résultats sont exploitables dans une copie ou pour résoudre un exercice, cet exemple n'est traité que pour vous montrer des méthodes très importantes d'étude d'intégrabilité. Dans un problème ou un exercice de concours, les résultats suivants devront être redémontrés.

1) Étudions l'intégrabilité de $f_{a,b}$ sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$.

Si $a \neq 1$, nous allons comparer $f_{a,b}$ aux fonctions g_c, définies par $g_c(x) = \frac{1}{x^c}$.

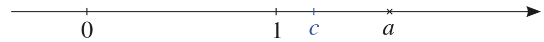
Pour $a < 1$, en choisissant c dans $]a, 1[$, on a, au voisinage de 0 : $\frac{1}{x^a |\ln x|^b} = o\left(\frac{1}{x^c}\right)$.



Doc. 6. *Choix de* c.

Or, g_c est intégrable sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$, $f_{a,b}$ l'est donc aussi.

Pour $a > 1$, en choisissant c dans $]1, a[$, on a, au voisinage de 0 : $\frac{1}{x^c} = o\left(\frac{1}{x^a |\ln x|^b}\right)$.



Doc. 7. *Choix de* c.

Or, g_c n'est pas intégrable sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$, $f_{a,b}$ ne l'est donc pas non plus.

Si $a = 1$, soit x dans $\left]0, \frac{1}{2}\right]$. Alors :

$$\int_{[x,1/2]} \frac{\mathrm{d}t}{t|\ln t|^b} = \int_{[\ln 2, |\ln x|]} \frac{\mathrm{d}u}{u^b}$$

(en posant $u = -\ln t$).

Lorsque x tend vers 0, $|\ln x|$ tend vers $+\infty$ et nous sommes ramenés à une intégrale de Riemann sur $[\ln 2, +\infty[$. La fonction est intégrable si, et seulement si, $b > 1$.

2) Étudions l'intégrabilité de $f_{a,b}$ sur $[2, +\infty[$.

En procédant de manière analogue, vous montrerez que, lorsque $a \neq 1$, $f_{a,b}$ est intégrable sur $[2, +\infty[$ si, et seulement si, $a > 1$, et lorsque $a = 1$, si, et seulement si, $b > 1$.

3 Propriétés de l'intégrale

3.1. Linéarité de l'intégrale

Théorème 7

- $\mathfrak{I}(I, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- L'application $\left(f \mapsto \int_I f\right)$ est une forme linéaire sur $\mathfrak{I}(I, \mathbb{K})$.

3.2. Relation de Chasles

Théorème 8

Soit f une fonction continue par morceaux et intégrable sur deux intervalles I et J. Si $I \cup J$ est un intervalle et si $I \cap J$ est vide ou réduit à un point, alors f est intégrable sur $I \cup J$ et :

$$\int_{I \cup J} f = \int_I f + \int_J f.$$

Démonstration

Ces résultats se démontrent en utilisant des primitives de $|f|$ et f sur $I \cup J$.

Application 5

Des équivalents

1) *Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$ $(b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\})$, à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^+$ et dans $\mathbb{C}$, telles que $g =_b O(f)$.*

a) *Montrer que, si f est intégrable sur $[a, b[$, alors $\displaystyle\int_x^b g =_b O\left(\int_x^b f\right)$.*

b) *Montrer que, si f n'est pas intégrable sur $[a, b[$, alors $\displaystyle\int_a^x g =_b O\left(\int_a^x f\right)$.*

2. a) *En déduire que, si $f \sim_b g$ et si f n'est pas intégrable sur $[a, b[$, alors $\displaystyle\int_a^x g \sim_b \int_a^x f$.*

b) *Donner un équivalent de $\displaystyle\int_0^x \frac{\text{Arctan}\, t}{t} \text{d}t$ lorsque x tend vers $+\infty$.*

1) a) Il existe $K > 0$ et c dans $[a, b[$ tels que, pour tout x de $[c, b[$:

$$|g(x)| \leqslant K f(x).$$

Alors, pour tout $x \geqslant c$, on a :

$$\left|\int_x^b g\right| \leqslant \int_x^b |g| \leqslant K \int_x^b f.$$

D'où : $$\int_x^b g =_b O\left(\int_x^b f\right).$$

b) Utilisons les mêmes notations que dans la question précédente.

$$\left|\int_a^x g\right| \leqslant \int_a^x |g| = \int_a^c |g| + \int_c^x |g|$$
$$\leqslant \int_a^c |g| + K \int_c^x f.$$

La fonction $\left(x \mapsto \displaystyle\int_c^x f\right)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers b et $\displaystyle\int_a^c |g|$ est un réel fixé. Donc :

$$\int_a^x g =_b O\left(\int_a^x f\right).$$

2) a) Si $f \sim_b g$, alors $f - g =_b o(f)$.

Démontrer, de même que dans la question **1) b)**, qu'alors :

$$\int_a^x (f - g) =_b o\left(\int_a^x f\right).$$

Donc $\displaystyle\int_a^x f \sim_b \int_a^x g$.

b) La fonction $\left(t \mapsto \dfrac{\text{Arctan}\, t}{t}\right)$ est continue sur $]0, +\infty[$ et se prolonge en 0 par continuité.

De plus $\dfrac{\text{Arctan}\, t}{t} \sim_{+\infty} \dfrac{\pi}{2t}$. Donc elle n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$ et :

$$\int_0^x \frac{\text{Arctan}\, t}{t} \text{d}t \sim_{+\infty} \int_1^x \frac{\text{Arctan}\, t}{t} \text{d}t.$$

Or :

$$\int_1^x \frac{\text{Arctan}\, t}{t} \text{d}t \sim_{+\infty} \int_1^x \frac{\pi}{2t} \text{d}t.$$

Soit :

$$\int_0^x \frac{\text{Arctan}\, t}{t} \text{d}t \sim_{+\infty} \frac{\pi}{2} \ln x.$$

3.3. Intégrale et continuité

Théorème 9

Soit f une fonction continue, positive et intégrable sur I. L'intégrale de f sur I est nulle si, et seulement si, f est nulle.

Rapport Mines-Ponts, 2001

« Il convenait de préciser que la fonction à intégrer était continue et strictement positive. »

Démonstration

f est une fonction continue, positive et intégrable sur I.

Supposons que $\int_I f = 0$ et rédigeons la démonstration dans le cas où $I = [a, b[$.

Pour tout x de $[a, b[$: $\quad 0 \leqslant \int_{[a,x]} f \leqslant \int_I f = 0$.

f est continue et positive sur $[a, x]$, elle est donc nulle sur $[a, x]$. Donc f est nulle sur I.

Rapport Mines-Ponts, 2001

« Un tracé rapide, direct ou à l'aide de la calculatrice, de la fonction à intégrer peut permettre d'orienter son étude. »

Application 6

La fonction Gamma : $\Gamma(x) = \int_{\mathbb{R}^{+*}} e^{-t} t^{x-1} \, dt$

Le réel x étant fixé, on définit la fonction f sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(t) = e^{-t} t^{x-1}$.

1) *Étudier son intégrabilité sur $\mathbb{R}^{+*}$.*

2) *On définit sur $\mathbb{R}^{+*}$ la fonction Γ par*

$$\Gamma(x) = \int_{\mathbb{R}^{+*}} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

3) *Expliquer pourquoi la fonction Γ peut être considérée comme un prolongement de la factorielle.*

1) f est continue et positive sur $\mathbb{R}^{+*}$, que nous allons scinder en $]0, 1]$ et $[1, +\infty[$.
Au voisinage de 0, $f(t) \sim t^{x-1}$. Donc :

$$f \in \mathfrak{I}(]0, 1], \mathbb{R}) \Leftrightarrow x > 0.$$

Au voisinage de $+\infty$, $f(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Donc :

$$f \in \mathfrak{I}([1, +\infty[, \mathbb{R}).$$

f est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ si, et seulement si, $x > 0$.

2) Soit $x > 0$, $A > 0$ et $\varepsilon > 0$, fixés. Intégrons par parties sur $[\varepsilon, A]$:

$$\int_\varepsilon^A e^{-t} t^x \, dt = [-e^{-t} t^x]_\varepsilon^A + \int_\varepsilon^A x e^{-t} t^{x-1} \, dt$$
$$= -e^{-A} A^x + e^{-\varepsilon} \varepsilon^x + \int_\varepsilon^A x e^{-t} t^{x-1} \, dt.$$

Lorsque A tend vers $+\infty$ et ε vers 0, on obtient :

$$\lim_{A \to +\infty} e^{-A} A^x = 0 \,; \quad \lim_{\varepsilon \to 0} e^{-\varepsilon} \varepsilon^x = 0.$$

Donc :

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x).$$

3) En particulier :

$$\Gamma(1) = \int_{\mathbb{R}^{+*}} e^{-t} \, dt = 1,$$

puis par récurrence :

$$\Gamma(n+1) = \int_{\mathbb{R}^{+*}} t^n e^{-t} \, dt = n!$$

Cette égalité nous permet de comprendre que la fonction Γ, introduite par Euler, peut être considérée comme un prolongement de la factorielle.

3.4. Inégalité de la moyenne

Théorème 10

Soit f une fonction intégrable de I dans $\mathbb{K}$. Alors :

$$\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|.$$

3.5. Changement de variables

Théorème 11

Soit f une fonction intégrable sur un intervalle I et φ une bijection d'un intervalle J sur I, de classe $\mathcal{C}^1$ sur J. Alors :

$$\int_I f = \int_J f \circ \varphi\, |\varphi'|\,.$$

En notant a, b les extrémités de J et a_1, b_1 les limites en a, b respectivement de φ :

$$\int_{a_1}^{b_1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u\,.$$

Démonstration

Nous allons effectuer la démonstration dans le cas où $J = [a, b[$.

Le $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme φ est une application strictement monotone, on pourra supposer que φ est strictement croissant. Dans ce cas, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et φ' est strictement positive sur J, de plus :

$$I = \left[\varphi(a), \lim_{x\to b^-} \varphi(x)\right[= [\varphi(a), \beta[\ .$$

Nous pouvons procéder par équivalence :

$|f|$ est intégrable sur I si, et seulement si, $\displaystyle\lim_{x\to\beta} \int_{\varphi(a)}^x |f(t)|\,\mathrm{d}t$ existe.

$$\text{Or } \lim_{x\to\beta} \int_{\varphi(a)}^x |f(t)|\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to\beta} \int_a^{\varphi^{-1}(x)} |f\circ\varphi(u)|\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$$

$$= \lim_{x\to\beta} \int_a^{\varphi^{-1}(x)} |f\circ\varphi(u)|\,|\varphi'(u)|\,\mathrm{d}u$$

car φ' est strictement positive sur J.

De plus, φ^{-1} est continue sur I, aussi :

$$\lim_{x\to\beta} \int_a^{\varphi^{-1}(x)} |f\circ\varphi(u)|\,|\varphi'(u)|\,\mathrm{d}u = \lim_{y\to b} \int_a^y |f\circ\varphi(u)|\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

Or la limite $\displaystyle\lim_{y\to b} \int_a^y |f\circ\varphi(u)|\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ existe si, et seulement si, $(f\circ\varphi)\varphi'$ est intégrable sur J.

Nous obtenons finalement $|f|$ est intégrable sur I si, et seulement si, $(f\circ\varphi)\varphi'$ est intégrable sur J.

Dans ces conditions :

$$\int_I f = \lim_{x \to \beta} \int_{\varphi(a)}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to \beta} \int_{a}^{\varphi^{-1}(x)} f \circ \varphi(u)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$$

$$= \lim_{y \to b} \int_a^y f \circ \varphi(u)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \int_J (f \circ \varphi)\varphi'.$$

Dans le cas où φ est strictement décroissante, $I = \left]\lim_{x \to b^-} \varphi(x)\,;\,\varphi(a)\right] =]\beta\,;\,\varphi(a)]$ et φ' est strictement négative.

$$\int_I f = \lim_{x \to \beta} \int_x^{\varphi(a)} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to \beta} \int_{\varphi^{-1}(x)}^{a} f \circ \varphi(u)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$$

$$= -\lim_{y \to b} \int_a^y f \circ \varphi(u)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \lim_{y \to b} \int_a^y f \circ \varphi(u)|\varphi'(u)|\,\mathrm{d}u = \int_J (f \circ \varphi)|\varphi'|.$$

Rapport CCP, 2001

« les intégrales simples deviennent par leur convergence, et trop souvent leur calcul, un cauchemar partagé par les candidats et les examinateurs. »

Exemple : Calcul de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t$

- La fonction $f : \left(t \mapsto \dfrac{\ln t}{a^2+t^2}\right)$ est continue sur $]0,+\infty[$.

De plus :

$$\frac{\ln t}{a^2+t^2} \sim_0 \frac{1}{a^2}\ln t \quad \text{et} \quad \frac{\ln t}{a^2+t^2} =_\infty o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right).$$

Cette fonction est donc intégrable sur $]0,+\infty[$.

- La fonction $(u \mapsto t = au)$ est bijective et de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$. Posons $t = au$, alors :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \frac{\ln(au)}{a^2(1+u^2)} a\,\mathrm{d}u = \frac{\ln a}{a}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u.$$

- La fonction $\left(t \mapsto u = \dfrac{1}{t}\right)$ est bijective et de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0,1]$ dans $[1,+\infty[$. Posons $u = \dfrac{1}{t}$, alors :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{\ln u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u.$$

Nous en déduisons : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 0$, puis :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\ln a}{a}\frac{\pi}{2}.$$

▶ ***Pour s'entraîner : ex. 9. et 10.***

4 Espaces vectoriels normés de fonctions intégrables

4.1. La norme N_1

Les fonctions continues et intégrables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ constituent un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ des fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$.

Cet espace vectoriel est muni de la norme N_1, dite **norme de la convergence en moyenne** , définie par :

$$N_1(f) = \int_I |f|$$

4.2. Fonctions de carré intégrable

Une fonction continue, à valeurs dans $\mathbb{K}$, f, est dite de **carré intégrable** sur I lorsque $|f|^2$ est intégrable sur I. Notons E l'ensemble de ces fonctions. C'est une partie non vide de $\mathcal{C}(I, \mathbb{K})$.

Théorème 12
Le produit de deux fonctions de carré intégrable sur I est intégrable sur I.

Démonstration
Soit f et g deux fonctions de E.
Alors, fg est continue sur I, et de plus , $|fg| \leqslant \frac{1}{2}\left(|f|^2 + |g|^2\right)$.
La fonction $|fg|$ est majorée par une fonction intégrable sur I, donc est intégrable sur I.

Théorème 13
L'ensemble E des fonctions continues, à valeurs dans $\mathbb{K}$, de carré intégrable sur I, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I, \mathbb{K})$.

4.3. Un produit scalaire sur E

Théorème 14
• Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, l'application : $\left((f, g) \mapsto (f \mid g) = \int_I fg\right)$ définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel des applications continues de carré intégrable sur I, à valeurs réelles.
• Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, l'application : $\left((f, g) \mapsto (f \mid g) = \int_I \overline{f} g\right)$ définit un produit scalaire complexe sur l'espace vectoriel des applications continues de carré intégrable sur I, à valeurs complexes.

4.4. La norme N_2

La norme définie par ce produit scalaire est appelée **norme de la convergence en moyenne quadratique**, et notée N_2.

$$\forall f \in E \quad N_2(f) = \left(\int_I |f|^2\right)^{1/2}.$$

Le produit de deux fonctions intégrables sur I n'est pas nécessairement intégrable sur I. Il suffit de considérer la fonction :

$$f : \begin{cases}]0, 1] \to \mathbb{R}, \\ x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}} \end{cases}$$

et de prendre $f = g$.

La fonction f, définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(t) = \dfrac{1}{1+t}$, est continue et de carré intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et non intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

la fonction g définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{t}} - 1 & \text{si } t \in]0, 1] \\ 0 & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$$

est continue, intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$, mais n'est pas de carré intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Théorème 15 Inégalité de Cauchy-Schwarz
Soit f et g deux fonctions continues et de carré intégrable sur I, alors :

$$\big|\big(f \mid g\big)\big| \leqslant N_2(f)N_2(g).$$

L'égalité a lieu si, et seulement si, f et g sont liées.

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), mathématicien français.

Corollaire 15.1
Soit f et g deux fonctions continues et de carré intégrable sur I, alors :

$$|(f \mid g)| \leqslant N_1(fg) \leqslant N_2(f)N_2(g).$$

Démonstration
En effet :

$$|(f \mid g)| \leqslant \int_I |fg| = N_1(fg) = \big(|f| \mid |g|\big) \leqslant N_2\big(|f|\big)\, N_2\big(|g|\big) = N_2(f)N_2(g)$$

Corollaire 15.2
Si (f_n) et (g_n) sont deux suites de fonctions continues de carré intégrable sur I convergeant en moyenne quadratique vers f et g, alors $\big(f_n \mid g_n\big)$ tend vers $\big(f \mid g\big)$.
On dit aussi que le produit scalaire est continu pour la norme N_2.

Démonstration

$$(f \mid g) - (f_n \mid g_n) = (f - f_n \mid g) + (f_n \mid g - g_n).$$

Donc :

$$\begin{aligned} |(f \mid g) - (f_n \mid g_n)| &\leqslant |(f - f_n \mid g)| + |(f_n \mid g - g_n)| \\ &\leqslant N_2(f - f_n)N_2(g) + N_2(f_n)N_2(g - g_n). \end{aligned}$$

Or $\lim_{n\to+\infty} N_2(f - f_n) = 0$, $\lim_{n\to+\infty} N_2(g - g_n) = 0$ et :

$$N_2(f_n) = N_2(f_n - f + f) \leqslant N_2(f - f_n) + N_2(f)$$

est bornée. D'où le résultat.

► ***Pour s'entraîner : ex. 11.***

Application 7

Familles de polynômes orthogonaux

Soit I un intervalle ouvert et non vide de $\mathbb{R}$ et k une fonction continue de I dans $\mathbb{R}^{+*}$ tels que, pour tout entier $n \geqslant 0$, la fonction $\big(x \mapsto x^n k(x)\big)$ est intégrable sur I.

On désigne par E l'ensemble des applications f de I dans $\mathbb{R}$, continues sur I et telles que la fonction $\big(x \mapsto f^2(x)k(x)\big)$ est intégrable sur I.

Vérifier les assertions suivantes :

- *si f et g sont deux éléments de E, alors la fonction $(x \mapsto f(x)g(x)k(x))$ est intégrable sur I. E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$;*
- *l'application :*

$$\langle\ |\ \rangle : \begin{cases} E \times E \to \mathbb{R}, \\ (f,g) \mapsto \langle f \mid g \rangle = \displaystyle\int_I f(x)g(x)k(x)\,\mathrm{d}x \end{cases}$$

définit un produit scalaire sur E.

1) a) *Prouver que toute fonction polynôme est dans E.*

b) *Montrer l'existence d'une unique famille de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :*

- *pour tout n, P_n est unitaire de degré n ;*
- *si n et k sont deux entiers distincts, alors $\langle P_n|P_k\rangle = 0$.*

c) *Démontrer que, pour tout entier n, le polynôme P_n admet n racines distinctes dans I.*

d) *En constatant que :*

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2 \quad \langle XP \mid Q\rangle = \langle P \mid XQ\rangle$$

prouver l'existence de deux suites réelles (u_n) et (v_n) telles que :

$$\forall n \geqslant 2 \quad XP_{n-1} = P_n + u_n P_{n-1} + v_n P_{n-2}$$

2) *Quelques familles classiques*

a) *Les polynômes de Legendre :*

$$I =]a,b[, \quad k(x) = 1.$$

Prouver que $P_n(x) = \alpha_n \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x-a)^n(x-b)^n]$, où α_n est un réel que vous calculerez.

Expliciter $P_0,\dots,P_4$.

b) *Les polynômes de Tchebychev :*

$$I =]-1,1[, \quad k(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Prouver que $P_n(x) = \alpha_n\sqrt{1-x^2}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(1-x^2)^{n-1/2}]$ où α_n est un réel que vous calculerez.

Expliciter $P_0,\dots,P_4$.

c) *Les polynômes de Laguerre :*

$$I =]0,+\infty[, \quad k(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

Prouver que $P_n(x) = \alpha_n \mathrm{e}^x \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[\mathrm{e}^{-x}x^n]$ où α_n est un réel que vous calculerez.

Expliciter $P_0,\dots,P_4$.

d) *Les polynômes de Hermite :*

$$I =]-\infty,+\infty[, \ k(x) = \mathrm{e}^{-x^2}.$$

Prouver que $P_n(x) = \alpha_n \mathrm{e}^{x^2}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[\mathrm{e}^{-x^2}]$ où α_n est un réel que vous calculerez.

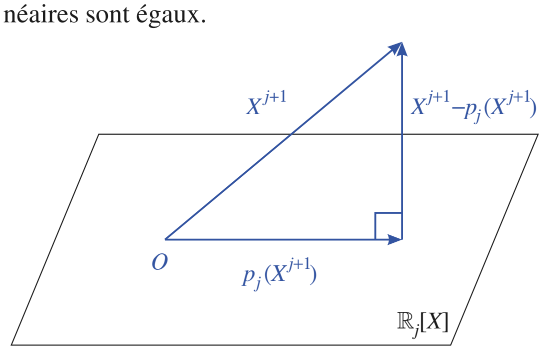
Expliciter $P_0,\dots,P_4$.

1) a) Toute fonction polynôme est continue sur I. La condition d'intégrabilité est vérifiée par toute fonction monôme, donc, par linéarité de l'intégrale, par toute fonction polynôme.

b) Fixons $N > 0$ et travaillons dans $\mathbb{R}_N[X]$ muni du produit scalaire $\langle\ |\ \rangle$ et de la base $(1, X, X^2, \dots, X^N)$. Orthogonalisons cette base par le procédé de Schmidt.

Nous posons $P_0 = 1$ et supposons la famille $(P_0,\dots,P_j)$ construite jusqu'à l'ordre j fixé de $[\![1, N-1]\!]$. Appelons p_j la projection orthogonale de $\mathbb{R}_N[X]$ sur le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_j[X]$. Le polynôme $X^{j+1} - p_j(X^{j+1})$ est orthogonal à $\mathbb{R}_j[X]$ et appartient à $\mathbb{R}_{j+1}[X]$.

Posons $P_{j+1} = X^{j+1} - p_j(X^{j+1})$. Il vérifie les conditions imposées. Tout polynôme les vérifiant lui est colinéaire. Deux polynômes unitaires colinéaires sont égaux.



Doc. 8. $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$

De plus, les polynômes ainsi définis ne dépendent pas de N. Il existe donc une unique famille de polynômes (P_n) vérifiant les conditions requises.

c) La propriété est vraie pour $n = 0$. Fixons $n > 0$. Nous savons que $\langle P_n|P_0\rangle = 0$, donc que $\displaystyle\int_I P_n(x)k(x)dx = 0$. Si P_n ne s'annule pas dans I, la fonction continue P_nk est de signe constant dans I. Son intégrale sur I ne peut s'annuler.

Supposons alors que P_n admette p racines de multiplicité impaire sur I, avec $p < n$. Appelons $x_1, \dots, x_p$ ces racines et Q le polynôme $Q(X) = (X - x_1)\dots(X - x_p)$. Ce polynôme appartient à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc $\langle P_n | Q\rangle = 0$. Le polynôme QP_n n'a que des racines de multiplicité paire sur I, il est donc de signe constant sur cet intervalle et ceci nous montre alors que l'hypothèse $p < n$ est impossible.

d) Il est immédiat que :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2 \quad \langle XP \mid Q\rangle = \langle P \mid XQ\rangle .$$

Montrons l'existence des suites (u_n) et (v_n).

Pour tout entier n, le polynôme $XP_n - P_{n+1}$ appartient à $\mathbb{R}_n[X]$, donc peut s'écrire sous la forme :

$$XP_n - P_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i P_i .$$

De plus, si $i \leqslant n$:

$$\begin{aligned}\langle XP_n - P_{n+1} | P_i\rangle = \alpha_i \langle P_i \mid P_i\rangle &= \langle XP_n \mid P_i\rangle \\ &= \langle P_n \mid XP_i\rangle = 0 \\ &\qquad \text{si} \quad i \leqslant n-2 .\end{aligned}$$

On en déduit $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{n-2} = 0$.

Donc : $\qquad \exists (u_{n+1}, v_{n+1}) \in \mathbb{R}^2$

$$XP_n - P_{n+1} = u_{n+1}P_n + v_{n+1}P_{n-1}$$

2) a) Nous contrôlons d'abord que, pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction $(x \mapsto x^n)$ est intégrable sur $]a, b[$.

Vérifions que, pour tout p et pour un certain α_p que nous préciserons, le polynôme P_p est unitaire et que les polynômes (P_n) sont orthogonaux.

Pour tout p de $\mathbb{N}^*$, P_p unitaire entraîne :

$$\alpha_p = \frac{1}{(2p)(2p-1)\dots(p+1)}.$$

Soit $n < m$. Calculons $\langle P_n \mid P_m\rangle$.

$$\langle P_n \mid P_m\rangle = \alpha_n \alpha_m \int_a^b \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x-a)^n(x-b)^n] \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}[(x-a)^m(x-b)^m]\,\mathrm{d}x .$$

Vous effectuerez $n+1$ intégrations par parties successives. En tenant compte du fait que a et b sont racines d'ordre m de $[(x-a)^m(x-b)^m]$, donc racines de ses dérivées jusqu'à l'ordre $m-1$, vous obtiendrez :

$$\begin{aligned}&\langle P_n \mid P_m\rangle \\ &= (-1)^{n+1}\alpha_n\alpha_m \int_a^b \frac{\mathrm{d}^{2n+1}}{\mathrm{d}x^{2n+1}}[(x-a)^n(x-b)^n] \\ &\qquad \frac{\mathrm{d}^{m-n-1}}{\mathrm{d}x^{m-n-1}}[(x-a)^m(x-b)^m]\,\mathrm{d}x \\ &= 0.\end{aligned}$$

Les polynômes de Legendre sont fournis par une petite procédure *Maple* (*doc.* 9).

Avec Maple

```
> Legendre:=proc(n)
diff(((x-a)^n)*((x-b)^n),x$n)/(product(n+i,i=1..n));
end;
```

$$Legendre := \textbf{proc}(n)\ \mathrm{diff}((x-a)^n \times (x-b)^n,\ x\,\$\,n)/\mathrm{product}(n+i,\ i = 1..n)\ \textbf{end}$$

```
> Legendre(1);Legendre(2);Legendre(3);Legendre(4);
> for j from 1 to 4 do collect(Legendre(j),x) od;
```

$$x - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$$

$$\frac{1}{6}(x-b)^2 + \frac{2}{3}(x-a)(x-b) + \frac{1}{6}(x-a)^2$$

$$\frac{1}{20}(x-b)^3 + \frac{9}{20}(x-a)(x-b)^2 + \frac{9}{20}(x-a)^2(x-b) + \frac{1}{20}(x-a)^3$$

$$\frac{1}{70}(x-b)^4 + \frac{8}{35}(x-a)(x-b)^3 + \frac{18}{35}(x-a)^2(x-b)^2 + \frac{8}{35}(x-a)^3(x-b) + \frac{1}{70}(x-a)^4$$

$$x - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$$

$$x^2 + (-a-b)x + \frac{1}{6}b^2 + \frac{1}{6}a^2 + \frac{2}{3}ab$$

$$x^3 + \left(-\frac{3}{2}b - \frac{3}{2}a\right)x^2 + \left(\frac{3}{5}b^2 + \frac{9}{5}ab + \frac{3}{5}a^2\right)x - \frac{1}{20}b^3 - \frac{9}{20}ab^2 - \frac{9}{20}a^2b^2 - \frac{1}{20}a^3$$

$$x^4 + (-2a-2b)x^3 + \left(\frac{9}{7}a^2 + \frac{24}{7}ab + \frac{9}{7}b^2\right)x^2 + \left(-\frac{2}{7}a^3 - \frac{2}{7}b^3 - \frac{12}{7}a^2b - \frac{12}{7}ab^2\right)x + \frac{1}{70}b^4 + \frac{8}{35}ab^3 + \frac{8}{35}a^3b + \frac{1}{70}a^4 + \frac{18}{35}a^2b^2$$

Doc. 9. *Polynômes de Legendre.*

b) c) d) On procède de même (*doc.* 10).

Maple dispose d'un package de polynômes orthogonaux et connaît les polynômes de Laguerre et Hermite.

Attention ! les polynômes fournis par *Maple* ne sont pas unitaires.

Avec Maple :

```
> with(orthopoly);
```

$$[G,\ H,\ L,\ P,\ T,\ U]$$

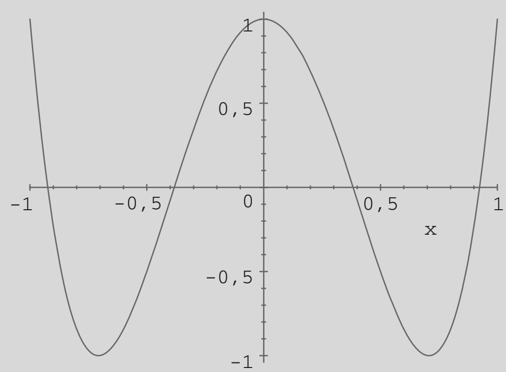
```
> T(1,x);T(2,x);T(3,x);T(4,x);
> plot(T(4,x),x=-1..1);
```

$$x$$

$$2x^2 - 1$$

$$4x^3 - 3x$$

$$8x^4 - 8x^2 + 1$$



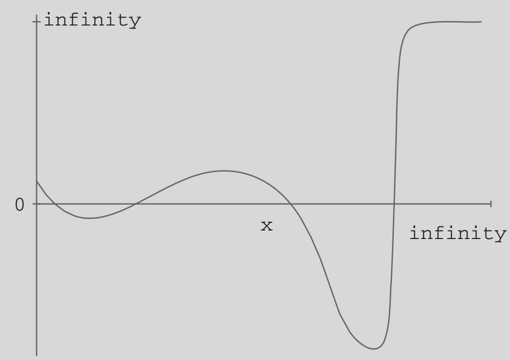

```
> L(1,x);L(2,x);L(3,x);L(4,x);
> plot (L(4,x),x=0..infinity);
```

$$1 - x$$

$$1 - 2x + \frac{1}{2}x^2$$

$$1 - 3x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3$$

$$1 - 4x + 3x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{24}x^4$$



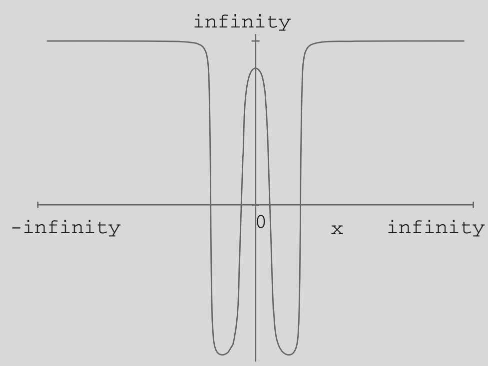

```
> H(1,x);H(2,x);H(3,x);H(4,x);
> plot (H(4,x),x=-infinity..infinity);
```

$$2x$$

$$4x^2 - 2$$

$$8x^3 - 12x$$

$$16x^4 - 48x^2 + 12$$



Doc. 10. *Polynômes de Tchebychev, Laguerre et Hermite.*

5 Suites et séries de fonctions intégrables

5.1. Théorème de convergence dominée

Théorème 16 : Théorème de convergence dominée de Lebesgue

Soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$ telles que :

• la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I ;

La démonstration de ce *théorème* est hors programme

- il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur I telle que, pour tout entier n, $|f_n| \leqslant \varphi$ (**hypothèse dite de domination**).

Alors :

- les applications f_n et f sont intégrables sur I ;
- la suite numérique $\left(\int_I f_n\right)$ converge vers $\int_I f$:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n = \int_I f .$$

▶ ***Pour s'entraîner : ex. 12 et 13.***

Rapport X-ESPCI, 2001

« ...difficultés rencontrées pour utiliser la convergence dominée. »

Rapport X-ESPCI, 2001

« Il semble que, devant une question de ce type, le candidat choisisse un peu au hasard entre convergence uniforme, dominée... »

Henri Lebesgue *(1875-1941), mathématicien français. D'origine très modeste, il entre à l'École normale supérieure après des études brillantes. Élève de Borel, il construit en 1902 la théorie de l'intégration qui porte son nom. Le théorème de convergence dominée date de cette période.*

Application 8

Calcul de $\int_0^{\infty} e^{-t^2}\, dt$

D'après École nationale du Génie de l'Eau et de l'Environnement de Strasbourg, 1996.

On pose, pour $n \geqslant 1$ $B_n = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n}$ *et*

$C_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx$.

1) *Soit* $n \geqslant 1$. *Calculer* $I_{n-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}\varphi\, d\varphi$.

2) *Montrer que, pour* n *fixé* $\geqslant 1$, *la fonction* $g_n : \left(x \mapsto \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}\right)$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}^+$.

3) *Montrer que :*

$$\forall n \geqslant 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad x^2 \leqslant n \Rightarrow \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-x^2}$$

$$\forall n \geqslant 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad e^{-x^2} \leqslant \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} \leqslant \frac{1}{1+x^2}$$

4) *Calculer* B_n *en posant* $x = \sqrt{n}\tan\varphi$. *En déduire* $\int_0^{\infty} e^{-t^2}\, dt$.

5.a) *Montrer que la suite* (C_n) *converge vers :*

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2}\, dt.$$

b) *Calculer* C_n. *En déduire* $\int_0^{\infty} e^{-t^2}\, dt$.

6) *Montrer que* $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

1) $I_{n-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} \varphi \, d\varphi$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \right)^{2n-2} d\varphi$$

$$= \frac{1}{4} \frac{1}{2^{2n-2}} \binom{2n-2}{n-1} \times 2\pi .$$

2) La fonction g_n est continue et positive sur $\mathbb{R}^+$. De plus, $g_n(x) =_{+\infty} O\left(x^{-2n}\right)$ et la fonction $(x \mapsto x^{-2n})$ est intégrable sur $[1, +\infty[$

3) L'inégalité, pour tous $n \geqslant 1$ et x réel :

$$x^2 < n \Rightarrow n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right) \leqslant -x^2$$

découle de la concavité de la fonction $\ln$.

L'inégalité :

$$\forall n \geqslant 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad -x^2 \leqslant -n \ln\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)$$

est vérifiée pour la même raison.

L'inégalité :

$$\forall n \geqslant 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad 1 + x^2 \leqslant \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n$$

est une conséquence de la formule du binôme.

4) Calculons B_n en posant $x = \sqrt{n} \tan \varphi$. On obtient :

$$B_n = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} \varphi \, d\varphi = \frac{\pi\sqrt{n}}{2^{2n-1}} \binom{2n-2}{n-1}.$$

Dans le but de montrer la convergence de la suite (B_n), considérons la suite de fonctions (g_n) avec :

$$g_n(x) = \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}.$$

- Les fonctions g_n sont continues, positives et intégrables sur $\mathbb{R}^+$.
- La suite de fonctions (g_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction continue $(x \mapsto e^{-x^2})$.
- La fonction positive et intégrable $\left(x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}\right)$ majore chacune des fonctions g_n.

Le théorème de convergence dominée permet d'affirmer que la suite (B_n) converge et :

$$\lim_{n \to +\infty} B_n = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \, dx .$$

Utilisons la formule de Stirling :

$$B_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

D'où

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

5) a) Posons $f_n : x \mapsto \begin{cases} \left(1 - \dfrac{x^2}{n}\right)^n & \text{si } x \leqslant \sqrt{n} \\ 0 & \text{si } x > \sqrt{n}. \end{cases}$

Appliquons à la suite (f_n) le théorème de convergence dominée.

- Les fonctions f_n, pour $n \geqslant 1$, sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}^+$ et intégrables sur $\mathbb{R}^+$.
- La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $f : x \to e^{-x^2}$, continue.
- Et enfin, les fonctions f_n sont majorées par f, qui est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Donc la suite (C_n) converge vers $\int_0^{\infty} e^{-x^2} \, dx$.

b) Calculons C_n en posant $x = \sqrt{n} \sin \varphi$. On obtient : $\qquad C_n = \sqrt{n} \int_o^{\pi/2} \cos^{2n+1} \varphi \, d\varphi.$

D'où :

$$\sqrt{n}\, I_{n+1} \leqslant C_n \leqslant \sqrt{n}\, I_n .$$

Donc $C_n \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$; d'où $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

6) La dernière question résulte du changement de variable $u = x^2$.

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \lim_{a \to 0} \left(\lim_{A \to +\infty} \left(\int_a^A e^{-x^2} \, dx \right) \right)$$

$$= \lim_{u \to 0} \left(\lim_{U \to +\infty} \left(\int_u^U \frac{e^{-u}}{2\sqrt{u}} \, du \right) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

D'où $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \, dt = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$

Ce résultat est à connaître.

5.2. Intégration terme à terme d'une série de fonctions

Conformément au programme, nous admettrons le théorème suivant.

Théorème 17

Soit (u_n) une suite de fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$ et telle que :

- pour tout n, u_n est intégrable sur I ;
- la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I et sa fonction somme, S, est continue par morceaux sur I ;
- la série numérique $\sum \left(\int_I |u_n(t)|\,\mathrm{d}t \right)$ converge.

Alors :

- S est intégrable sur I ;
- $\displaystyle \int_I S = \int_I \left(\sum_0^\infty u_n \right) = \sum_0^\infty \left(\int_I u_n \right)$.

Exemple : D'une intégrale à une série

On considère la fonction $f : \left(u \mapsto \dfrac{\ln u}{1+u^2} \right)$.

Montrons que $f \in \mathfrak{I}(]0,1],\mathbb{R})$ et exprimons $\displaystyle\int_0^1 f$ sous la forme d'une série.

La fonction f est continue et négative sur $]0,1]$.
De plus, $f(u) \sim_0 \ln u$, qui est intégrable sur $]0,1]$.
Donc f est intégrable sur $]0,1]$.
Nous savons que :

$$\forall u \in]0,1[\quad \frac{1}{1+u^2} = \sum_0^\infty (-u^2)^n.$$

Posons $f_n(u) = \left(-u^2\right)^n \ln u$.
Alors :

- les fonctions f_n sont continues et intégrables sur $]0,1]$;
- la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,1]$ vers f, continue sur I ;
- la série numérique :

$$\sum \int_0^1 |f_n| = -\sum \int_0^1 u^{2n} \ln u \,\mathrm{d}u .$$

converge. En effet :

$$\int_0^1 u^{2n} \ln u \,\mathrm{d}u = \lim_{x\to 0} \left(\left[\frac{u^{2n+1}}{2n+1} \ln u \right]_x^1 - \int_{[x,1]} \frac{u^{2n}}{2n+1} \,\mathrm{d}u \right) = -\frac{1}{(2n+1)^2}$$

Donc :

$$\int_0^1 f = \int_0^1 \frac{\ln u}{1+u^2} \,\mathrm{d}u = \sum_0^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}.$$

► *Pour s'entraîner : ex. 14.*

Ce *théorème* ne règle pas certains cas très simples, par exemple, lorsque la série de fonctions est une série géométrique.
Considérons :

$$\int_0^1 \left(\sum_0^\infty (-t)^n \right) \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t}$$

$$= \int_0^1 \left(\sum_0^n (-t)^k \right) \mathrm{d}t + \int_0^1 \sum_{n+1}^\infty (-t)^k \,\mathrm{d}t$$

$$= \sum_0^n \int_0^1 (-t)^n \,\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} \,\mathrm{d}t.$$

Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = 0.$
Donc :

$$\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln 2.$$

Donc :

$$\int_0^1 \left(\sum_0^\infty (-t)^n \right) \mathrm{d}t = \sum_0^\infty \int_0^1 (-t)^n \,\mathrm{d}t.$$

Mais le *théorème* précédent ne s'applique pas, car la série $\displaystyle\sum \int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t$ diverge.

Rapport Centrale, 2001

« Oubli des valeurs absolues lors de l'hypothèse de convergence de la série $\displaystyle\sum \int_I |f_n|$. »

Rapport Centrale, 2001

« Fonction Γ souvent méconnue. »

Application 9

La fonction Γ et la fonction ζ

Rappelons que les fonctions Γ et ζ sont définies, respectivement sur $]0,\infty[$ et $]1,+\infty[$, par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t \quad \textit{et} \quad \zeta(x) = \sum_1^{\infty} n^{-x}$$

Montrer que $\forall x > 1 \quad \zeta(x)\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t.$

Première étape

Fixons $x > 1$.

$$\begin{aligned}\zeta(x)\Gamma(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-x} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \left(\mathrm{e}^{-t} t^{x-1} n^{-x}\right)\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-un} u^{x-1}\,\mathrm{d}u\right)\end{aligned}$$

(en posant $t = u\,n$)

Seconde étape

Pour intervertir le signe $\sum$ et l'intégrale, vérifions les hypothèses du *théorème*.

• On note f_n les fonctions définies sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$u \to \mathrm{e}^{-u\,n} u^{x-1}.$$

Ces fonctions sont positives, continues et intégrables sur $\mathbb{R}^{+*}$ d'après le calcul ci-dessus.

• La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$, car, pour u fixé strictement positif, la série numérique $\sum \mathrm{e}^{-un} u^{x-1}$ est une série géométrique, de raison e^{-u}.

• La série numérique $\sum \left(\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-un} u^{x-1}\,\mathrm{d}u\right)$ converge d'après le calcul de la première étape.

Donc, la fonction somme de la série de fonctions est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et, de plus :

$$\begin{aligned}\zeta(x)\Gamma(x) &= \int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-un} u^{x-1}\right)\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\infty} u^{x-1} \left(\sum_1^{\infty} \mathrm{e}^{-nu}\right)\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\infty} \frac{u^{x-1}\mathrm{e}^{-u}}{1-\mathrm{e}^{-u}}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\infty} \frac{u^{x-1}}{\mathrm{e}^u - 1}\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

6 Fonctions définies par une intégrale

I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$.

6.1. Continuité

Théorème 18 : Continuité d'une fonction définie par une intégrale

Soit $f : ((x,t) \mapsto f(x,t))$ une fonction de $I \times J$ dans $\mathbb{K}$. On suppose que :

- f est continue par rapport à la première variable, x ;
- f est continue par morceaux par rapport à la seconde variable, t ;
- il existe φ dans $\mathfrak{I}(J,\mathbb{R}^+)$ telle que :

$$\forall (x,t) \in I \times J \quad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t) \quad \textbf{(hypothèse de domination)}.$$

Rapport X-ESPCI, 2001

« Très peu de candidats utilisent les théorèmes au programme avec hypothèse de domination. »

Rapport TPE, 2002

« ...insuffisamment appris en analyse, le théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre.

L'application φ ne dépend pas de x.

Alors :

- pour tout x de I, la fonction $(t \mapsto f(x,t))$ est intégrable sur J ;
- la fonction F, définie sur I par $F(x) = \int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$, est continue sur I.

■ Les *hypothèses de continuité* sont vérifiées en particulier lorsque f est continue sur $I \times J$.

■ Lorsque I et J sont des segments de $\mathbb{R}$, l'*hypothèse de domination* est vérifiée par la fonction constante $\sup\limits_{x\in I, t\in J} |f(x,t)|$.

Démonstration

Cette démonstration est une application du *théorème de convergence dominée*.

- La fonction $(t \mapsto f(x,t))$ est continue par morceaux sur J. De plus, la majoration $\forall t \in J \quad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$ entraîne l'intégrabilité sur J de la fonction $(t \mapsto f(x,t))$.
- Notons a un point de I et fixons une suite (x_n) de points de I convergeant vers a. Pour tout n, considérons l'application :

$$g_n : \begin{cases} J \to & \mathbb{K} \\ t \mapsto g_n(t) = & f(x_n,t) \end{cases}$$

Les hypothèses concernant f par rapport à t et l'hypothèse de domination permettent d'affirmer que :

- la fonction g_n est continue par morceaux de J dans $\mathbb{K}$;
- il existe une fonction φ de $\mathfrak{I}(J, \mathbb{R}^+)$ telle que $|g_n| \leqslant \varphi$;
- la suite de fonctions (g_n) converge simplement sur J vers la fonction continue par morceaux g, définie par $g(t) = f(a,t)$ car la fonction f est continue par rapport à la première variable.

On peut appliquer le théorème de convergence dominée et conclure par :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_J g_n = \int_J g \,.$$

Ou encore

$$\lim_{n\to+\infty} F(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \int_J f(x_n,t)\,\mathrm{d}t = \int_J f(a,t)\,\mathrm{d}t = F(a)\,.$$

La fonction F est continue en a.

Rapport CCP, 1997

« Les problèmes d'intégrales dépendant d'un paramètre sont souvent bien traités, ... l'exception de la continuité et de la dérivabilité sous le signe somme d'une fonction définie sur un intervalle ouvert par une intégrale impropre : les candidats essaient en général de vérifier le critère de domination sur l'intervalle ouvert tout entier, alors que continuité et dérivabilité étant des propriétés locales, il suffit la plupart du temps de le vérifier pour tout segment contenu dans l'intervalle ouvert de définition. »

Corollaire 18.1

f est une fonction de $I \times J$ dans $\mathbb{K}$. On suppose que :

- f est continue par rapport à la première variable ;
- f est continue par morceaux par rapport à la deuxième variable ;
- pour tout segment $[a,b]$ contenu dans I, il existe $\varphi_{a,b}$ dans $\mathfrak{I}(J, \mathbb{R}^+)$ telle que (**hypothèse de domination** sur tout segment de I) :

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times J \quad |f(x,t)| \leqslant \varphi_{a,b}(t).$$

Alors :

- pour tout x de I, la fonction $(t \mapsto f(x,t))$ est intégrable sur J ;
- la fonction F, définie sur I par $F(x) = \int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$, est continue sur I.

Corollaire 18.2
f est une fonction continue de $[a,b] \times [c,d]$ dans $\mathbb{K}$. Alors la fonction F, définie sur $[a,b]$ par $F(x) = \int_{[c,d]} f(x,t)\,\mathrm{d}t$, est continue sur $[a,b]$.

Exemple : La fonction Gamma, $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t$

• La fonction :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} & \to \quad \mathbb{R}, \\ (x,t) & \mapsto \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$.
Elle vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de $\mathbb{R}^{+*}$.
En effet, si $0 < a < b$, on a :

$$\forall x \in [a,b] \quad \forall t \in \mathbb{R}^{+*} \quad \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \leqslant \mathrm{e}^{-t} \max\left(t^{a-1}, t^{b-1}\right)$$

et la fonction $\left(t \mapsto \mathrm{e}^{-t} \max\left(t^{a-1}, t^{b-1}\right)\right)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Γ est donc continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
• Minorons $\Gamma(x)$. Pour tout $x \geqslant 1$:

$$\Gamma(x) \geqslant \int_2^3 \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t \geqslant \mathrm{e}^{-3} \int_2^3 t^{x-1}\,\mathrm{d}t \geqslant \mathrm{e}^{-3} 2^{x-1}.$$

D'où $\lim_{x\to+\infty} \Gamma(x) = +\infty$. De plus, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\Gamma(x)}{x} = +\infty$, le graphe de Γ admet, en $+\infty$, une branche parabolique verticale.

► ***Pour s'entraîner : ex. 15.***

6.2. Dérivabilité

Théorème 19 : Dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale
Soit $f : ((x,t) \mapsto f(x,t))$ une fonction de $I \times J$ dans $\mathbb{K}$.

On suppose que :

• pour tout x de I, la fonction $(t \mapsto f(x,t))$ est continue par morceaux et intégrable sur J ;

• f admet une dérivée partielle, $\frac{\partial f}{\partial x}$, par rapport à la première composante ;

• cette dérivée partielle est continue par rapport à la première variable, x, et continue par morceaux par rapport à la seconde, t ;

• $\exists \varphi \in \mathfrak{I}(J, \mathbb{R}^+) \quad \forall (x,t) \in I \times J \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$

(**hypothèse de domination** de $\frac{\partial f}{\partial x}$).

Rapport E3A, 2002
« Peu de candidats dérivent correctement une intégrale à un paramètre. Les justifications de dérivation sous le signe intégrale sont absentes ou incorrectes. »

Lorsque I et J sont des segments de $\mathbb{R}$, l'hypothèse de domination est vérifiée par la fonction constante :

$$\sup_{x\in I, t\in J} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|.$$

Alors la fonction F, définie sur I par $F(x) = \int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$, est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et, pour tout x de I :

$$F'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Démonstration

Soit a dans I. Fixons une suite (x_n) d'éléments de $I \setminus \{a\}$ qui converge vers a.

$$\frac{F(x_n) - F(a)}{x_n - a} = \int_J \frac{f(x_n,t) - f(a,t)}{x_n - a}\,\mathrm{d}t.$$

Par hypothèse, pour t fixé, l'application $(x \mapsto f(x,t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
Notons :

$$h_n(t) = \frac{f(x_n,t) - f(a,t)}{x_n - a} \quad \text{et} \quad h(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,t).$$

• La suite de fonctions continues par morceaux (h_n) converge simplement sur J vers la fonction continue par morceaux h.

• À t fixé, en utilisant l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction $(x \mapsto f(x,t))$ on a :

$$\left|\frac{f(x_n,t) - f(a,t)}{x_n - a}\right| \leqslant \sup_{x\in I}\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)\,.$$

Le théorème de convergence dominée s'applique à la suite de fonctions (h_n) :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_J h_n = \int_J h\,.$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F(x_n) - F(a)}{x_n - a} = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)\,\mathrm{d}t\,.$$

La fonction F est dérivable sur I et sa fonction dérivée est l'application :

$$\left(x \mapsto \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t\right)$$

qui est continue sur I d'après le *théorème* précédent. F est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

▶ ***Pour s'entraîner : ex. 16.***

Exemple : *Calcul de* $I_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\left(x+t^2\right)^n}$

Soit x un réel strictement positif. On définit, pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction I_n ci-dessus.

• *Un premier calcul*

$$I_1(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\left(x+t^2\right)} = \frac{\pi}{2\sqrt{x}}\,.$$

• *Dérivabilité de* I_n

Soit $a > 0$. Considérons, pour $n \geqslant 1$ fixé, la fonction f_n définie sur $[a,+\infty[\times\mathbb{R}^+$ par :

$$f_n(x,t) = \frac{1}{\left(x+t^2\right)^n}\,.$$

Cette fonction est continue sur $[a,+\infty[\times\mathbb{R}^+$ et admet une dérivée partielle continue sur $[a,+\infty[\times\mathbb{R}^+$:

$$\frac{\partial f_n}{\partial x}(x,t) = -\frac{n}{\left(x+t^2\right)^{n+1}}.$$

De plus :

$$\forall (x,t)\in[a,+\infty[\times\mathbb{R}^+ \quad 0 \leqslant \frac{n}{\left(x+t^2\right)^{n+1}} \leqslant \frac{n}{\left(a+t^2\right)^{n+1}}.$$

La fonction $\left(t \mapsto \dfrac{n}{\left(a+t^2\right)^{n+1}}\right)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Nous en déduisons que la fonction I_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et que $I_n'(x) = -nI_{n+1}(x)$.

• *Expression générale de* I_n

Vous vérifierez par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$I_n(x) = \frac{\pi}{(2n-1)}\frac{(2n)!}{4^n(n)!}x^{-(2n-1)/2}.$$

6.3. Extensions

Corollaire 19.1

Soit $f : ((x,t)\mapsto f(x,t))$ une application de $I\times J$ dans $\mathbb{K}$. On suppose que :

• pour tout x de I, la fonction $(t\mapsto f(x,t))$ est continue par morceaux et intégrable sur J ;

• f admet une dérivée partielle, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, par rapport à la première composante ;

• cette dérivée partielle est continue par rapport à la première variable, x, et continue par morceaux par rapport à la seconde, t, ;

• pour tout segment $[a,b]$ contenu dans I, on a :

$$\exists \varphi \in \mathfrak{I}(J,\mathbb{R}^+) \quad \forall (x,t)\in[a,b]\times J \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$$

(**hypothèse de domination** de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ sur tout segment de I.)

Alors la fonction F, définie sur I par $F(x) = \displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$, est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et :

$$F'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

Corollaire 19.2

Soit f une fonction de $[a,b]\times[c,d]$ dans $\mathbb{K}$. On suppose que :

• f est continue sur $[a,b]\times[c,d]$.

• f admet une dérivée partielle, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, par rapport à la première composante continue sur $[a,b]\times[c,d]$.

Alors la fonction F, définie sur $[a,b]$ par $F(x) = \int_{[c,d]} f(x,t)\,\mathrm{d}t$, est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et :

$$F'(x) = \int_{[c,d]} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t\,.$$

► ***Pour s'entraîner : ex. 17.***

Application 10

Toujours la fonction gamma

1) *Montrer que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.*

2) *Montrer que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.*

3) *Calculer Γ' et Γ''.*

1)• Soit $x > 0$. La fonction $(t \mapsto \mathrm{e}^{-t}t^{x-1})$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

• La fonction $f : ((x,t) \mapsto \mathrm{e}^{-t}t^{x-1})$ admet une dérivée partielle par rapport à la première composante. Et :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = (\ln t)\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$$

• Cette dérivée partielle est continue par rapport à x et continue par rapport à t.

Soit $[a,b]$ un segment inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$. Alors, pour tout (x,t) de $[a,b] \times \mathbb{R}^{+*}$:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant |(\ln t)|\,\mathrm{e}^{-t}\sup\left(t^{a-1}, t^{b-1}\right) = \varphi_1(t)\,.$$

Vous vérifierez que la fonction φ_1 est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

La fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2) La fonction f admet une dérivée partielle par rapport à la première composante à tout ordre $p \geqslant 1$.

$$\frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t) = (\ln t)^p\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}.$$

En vous inspirant de la question précédente, vous montrerez par récurrence que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et :

$$\forall p \geqslant 1 \quad \Gamma^{(p)}(x) = \int_0^\infty (\ln t)^p\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t\,.$$

3) En particulier :

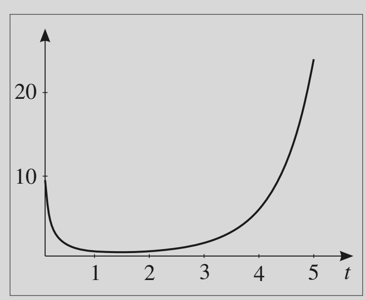
$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty (\ln t)\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$$

et $$\Gamma''(x) = \int_0^\infty (\ln t)^2\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

La fonction Γ est donc convexe sur $\mathbb{R}^{+*}$. Nous pouvons tracer son graphe (*doc.* 11).

Avec Maple :

```
> plot(GAMMA(t),t=0.1..5);
```



Doc. 11. *La fonction gamma.*

FICHE MÉTHODE

I désigne un intervalle d'intérieur non vide et $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les fonctions considérées sont des fonctions continues par morceaux sur I.

Pour montrer que l'intégrale $\int_I f$ converge, on peut :

- montrer que la fonction $|f|$ est intégrable sur I.
- si $I = [a, b[$, on peut montrer que $\left(x \mapsto \int_a^x f\right)$ admet une limite à gauche en b.

Pour montrer qu'une fonction f est intégrable sur I, on procède en deux étapes :

- on précise sur quel intervalle f est continue par morceaux : $([\inf I, \sup I[\,,\ ]\inf I, \sup I], \ldots)$;
- pour terminer, on partage éventuellement I en $]\inf I, a]$ et $[a, \sup I[$, avec $a \in I$ et on applique un critère d'intégrabilité sur chacun de ces intervalles.

Critères d'intégrabilité globaux

La fonction f est continue par morceaux sur I.

- *Critère par comparaison de fonctions*
  On montre l'existence de g, positive, continue par morceaux et intégrable sur I telle que :
$$|f| \leqslant g.$$
- *Critère utilisant une primitive de $|f|$*
  On introduit une primitive F de $|f|$ et on montre que F est bornée sur I.
- *Critère utilisant les segments contenus dans I*
  On montre l'existence d'une constante M telle que :
$$\forall [a, b] \subset I \quad \int_a^b |f| \leqslant M.$$

Critères d'intégrabilité locaux : comparaison de fonctions

La fonction f est continue par morceaux sur $]a, b]$.

- On cherche g, continue par morceaux, positive et intégrable sur $]a, b]$ telle que $f =_a O(g)$.
- On cherche une fonction g continue par morceaux et intégrable sur $]a, b]$ telle que $f \sim_a g$.

On pourra procéder de manière analogue pour un intervalle $[a, b[$.

Critère par comparaison avec une série (*PSI*)

Soit f dans $\mathcal{CM}\left(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+\right)$, décroissante.

Pour montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, il suffit de montrer que la série $\sum f(n)$ converge.

Pour **intervertir somme et intégrale sur un intervalle I** d'une série de fonctions :

- lorsqu'il s'agit d'une série géométrique, on raisonne directement en calculant la somme partielle ;
- sinon, on peut utiliser le *théorème de convergence dominée* ;
- on peut aussi utiliser le *théorème d'intégration* terme à terme d'une série de fonctions.

Exercices résolus

1. Calcul de $\displaystyle\int_0^{\pi/2}(-\ln(\sin(x))\,\mathrm{d}\,x$

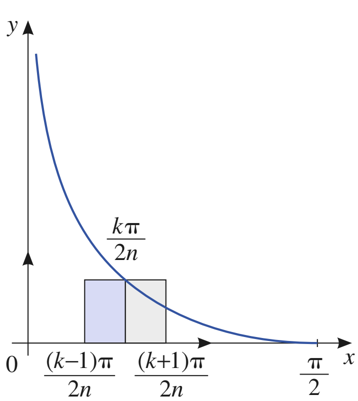
ÉNONCÉ

1) Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ $X^{2m}-1$ et en déduire une expression simplifiée de $I_m=\displaystyle\prod_{k=1}^{m-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2m}\right)$.

2) Montrer que la fonction $-\ln(\sin)$ est intégrable sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

3) Déduire de la *question* **1** la valeur de $\displaystyle\int_0^{\pi/2}(-\ln(\sin(x))\,\mathrm{d}\,x$.

CONSEILS



SOLUTION

1) Nous savons que :

$$X^{2m}-1=\prod_{k=1}^{2m}\left(X-\exp\left(\frac{\mathrm{i}k\pi}{m}\right)\right)$$
$$=\left(X^2-1\right)\prod_{k=1}^{m-1}\left(X^2-2X\cos\left(\frac{k\pi}{m}\right)+1\right).$$

Par conséquent :

$$X^{2m-2}+X^{2m-4}+\ldots+1=\prod_{k=1}^{m-1}\left(X^2-2X\cos\left(\frac{k\pi}{m}\right)+1\right).$$

En particulier, pour $x=1$, on obtient :

$$m=2^{m-1}\prod_{k=1}^{m-1}\left(1-\cos\left(\frac{k\pi}{m}\right)\right)=2^{2(m-1)}\prod_{k=1}^{m-1}\sin^2\left(\frac{k\pi}{2m}\right).$$

Et :
$$\prod_{k=1}^{m-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2m}\right)=\frac{\sqrt{m}}{2^{m-1}}.$$

2) La fonction $(x\mapsto-\ln(\sin(x)))$ est continue sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. De plus, $-\ln(\sin(x))\sim_0-\ln(x)$ et la fonction $-\ln$ est intégrable sur $]0,1]$. La fonction $-\ln(\sin)$ est donc intégrable sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

3) Considérons, ci-contre, le *graphe* de la fonction $(x\mapsto-\ln(\sin x))$.

La fonction $-\ln(\sin)$ est décroissante sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, donc :

$$\frac{\pi}{2m}\sum_1^{m-1}-\ln\left(\sin\left(\frac{k\pi}{2m}\right)\right)\leqslant\int_0^{\pi/2}(-\ln(\sin(x)))\,\mathrm{d}\,x.$$

Par ailleurs, fixons $\varepsilon>0$. Puisque la fonction $-\ln(\sin)$ est intégrable sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, il existe $\alpha>0$ tel que, pour tout a de $]0,\alpha[$, on ait :

$$\int_0^a(-\ln(\sin(x)))\,\mathrm{d}\,x\leqslant\varepsilon.$$

Pour tout $m > \dfrac{1}{\alpha}$, on a alors :

$$\int_0^{\pi/2} (-\ln(\sin(x)))\,\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon + \frac{\pi}{2m}\sum_1^{m-1} -\ln\left(\sin\left(\frac{k\pi}{2m}\right)\right).$$

D'où :

$$\frac{\pi}{2m}\sum_1^{m-1} -\ln\left(\sin\left(\frac{k\pi}{2m}\right)\right) \leqslant \int_0^{\pi/2} (-\ln(\sin(x)))\,\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \varepsilon + \frac{\pi}{2m}\sum_1^{m-1} -\ln\left(\sin\left(\frac{k\pi}{2m}\right)\right).$$

Puis :

$$-\frac{\pi}{2m}\ln I_m \leqslant \int_0^{\pi/2} (-\ln(\sin(x)))\,\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon - \frac{\pi}{2m}\ln I_m .$$

On en déduit :

$$\int_0^{\pi/2} (-\ln(\sin(x)))\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\ln(2).$$

2. Deux expressions d'une même fonction

ÉNONCÉ

On considère, pour x réel, la fonction F définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \exp\left(t^x \ln t\right)\mathrm{d}t$.

1) Montrer que la fonction F est définie sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer qu'elle est croissante et continue sur $\mathbb{R}$.

3) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} F(x)$.

4) Établir, pour $x > 0$, l'égalité :

$$F(x) = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{(nx+1)^{n+1}}.$$

CONSEILS

Prendre $x_1 \leqslant x_2$ et comparer $F(x_1)$ et $F(x_2)$.

SOLUTION

1) Fixons le réel x et considérons la fonction φ_x définie sur $]0,1]$ par $\varphi_x(t) = \exp\left(t^x \ln t\right)$. Cette fonction est continue sur $]0,1]$ et se prolonge par continuité en 0 en posant :

$$\varphi_x(0) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

La fonction φ_x est donc intégrable sur $]0,1]$ et F est définie sur $\mathbb{R}$.

2) Considérons deux réels x_1 et x_2 tels que $x_1 \leqslant x_2$. Alors, pour tout t de $]0,1]$, nous pouvons écrire : $t^{x_1} \geqslant t^{x_2}$, puis :

$$\exp\left(t^{x_1}\ln t\right) \leqslant \exp\left(t^{x_2}\ln t\right).$$

La fonction F est croissante sur $\mathbb{R}$.

Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et φ la fonction de $[a,b]\times]0,1]$ dans $\mathbb{R}$, définie par $\varphi(x,t)=\exp\left(t^x \ln t\right)$. Alors :

- la fonction φ est continue par rapport à x sur $[a,b]$ et continue par rapport à t sur $]0,1]$;
- pour tout x de $[a,b]$, on a $\varphi(x,t)\leqslant\varphi(b,t)$;
- la fonction $(t\mapsto\varphi(b,t))$ est intégrable sur $]0,1]$.

Ainsi, la fonction F est continue sur tout segment de $\mathbb{R}$. Elle est continue sur $\mathbb{R}$.

On pourra montrer que, pour tout $x>0$:

$$\exp\left(-\frac{1}{x}\right)\leqslant\exp\left(t^x\ln t\right)$$

pour étudier la limite de F en $+\infty$.

On pourra choisir α dans $]0,1[$ et partager l'intégrale en deux pour étudier la limite de F en $-\infty$.

3) • Travaillons d'abord avec $x>0$.

Pour tout t de $]0,1]$, on a $\mathrm{e}^{-x\ln t}\geqslant -x\ln t$. D'où : $t^x\ln t\geqslant -\dfrac{1}{x}$; puis $\exp\left(-\dfrac{1}{x}\right)\leqslant\exp\left(t^x\ln t\right)\leqslant 1$.

Nous en déduisons $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$.

• Supposons ensuite $x<0$ et α dans $]0,1[$.

Pour tout t de $]0,\alpha[$, nous avons successivement $\ln t<\ln\alpha<0$, puis $t^x>\alpha^x>0$ et enfin :

$$\exp\left(t^x\ln t\right)<\exp\left(\alpha^x\ln\alpha\right).$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}0<F(x)&=\int_0^\alpha \exp\left(t^x\ln t\right)\mathrm{d}t+\int_\alpha^1\exp\left(t^x\ln t\right)\mathrm{d}t\\&\leqslant\alpha\exp\left(\alpha^x\ln\alpha\right)+(1-\alpha).\end{aligned}$$

Remarquons ensuite que, si α est fixé, on a :

$$\lim_{x\to-\infty}\exp\left(\alpha^x\ln\alpha\right)=0.$$

Il suffit alors de fixer $\varepsilon>0$, puis de choisir α dans $]0,1[$ tel que :

$$(1-\alpha)<\varepsilon.$$

On choisit ensuite M réel vérifiant pour tout $x<M$:

$$0<\alpha\exp\left(\alpha^x\ln\alpha\right)\leqslant\varepsilon.$$

Ceci montre que $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$.

On pourra utiliser l'égalité :

$$\exp(u)=\sum_0^\infty\frac{u^n}{n!}$$

4) Supposons $x>0$.

Écrivons, pour t dans $]0,1]$, $t^{t^x}=\exp\left(t^x\ln t\right)=\displaystyle\sum_0^\infty\frac{t^{nx}(\ln t)^n}{n!}$ et posons, pour tout n, $u_n(t)=\dfrac{t^{nx}(\ln t)^n}{n!}$. Les fonctions u_n sont continues sur $]0,1]$ et se prolongent par continuité en 0 en posant $u_n(0)=0$. Étudions la convergence de la série de fonctions $\sum u_n$ sur $[0,1]$. Soit g la fonction définie sur $[0,1]$ par $g(t)=t^x\ln t$.

t	0		$\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$		1
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	0	$\searrow$	$-\dfrac{1}{x\mathrm{e}}$	$\nearrow$	0

$\|u_n\|_\infty = \dfrac{1}{n!(ex)^n}$ et la série numérique $\sum \dfrac{1}{n!(ex)^n}$ converge. La série de fonctions de la variable t, $\sum u_n$, converge normalement sur $[0, 1]$. On peut donc permuter l'intégrale et la somme :

$$F(x) = \int_0^1 \left(\sum_0^\infty \frac{t^{nx}(\ln t)^n}{n!} \right) \mathrm{d}t = \sum_0^\infty \left(\int_0^1 \frac{t^{nx}(\ln t)^n}{n!} \mathrm{d}t \right)$$
$$= \sum_0^\infty \frac{1}{n!} \int_0^1 \left(t^x \ln t\right)^n \mathrm{d}t\,.$$

On calcule, pour $n \geqslant 1$, $\int_0^1 \left(t^x \ln t\right)^n \mathrm{d}t$ en utilisant une intégration par parties sur $[\varepsilon, 1]$, avec $0 < \varepsilon < 1$.

$$\int_0^1 (t^x \ln t)^n \, \mathrm{d}t = -\frac{n}{nx+1} \int_0^1 t^{nx} (\ln t)^{n-1} \, \mathrm{d}t\,.$$

On montre alors, par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$:

$$\int_0^1 \left(t^x \ln t\right)^n \mathrm{d}t = \frac{(-1)^n n!}{(nx+1)^{n+1}}\,.$$

et on conclut, pour tout $x > 0$:

$$F(x) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(nx+1)^{n+1}}\,.$$

Exercices

1 Montrer que la fonction $\left(t \mapsto \cos^2\left(\frac{1}{t}\right)\right)$ est intégrable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2 Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, la fonction $f : (x \mapsto |\ln x|^n)$ est intégrable sur $]0,1]$ et calculer $\int_0^1 |\ln x|^n \,\mathrm{d}x$.

3 Existence et calcul de :
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)\sqrt[3]{t^2(1-t)}}.$$

4 (*PSI*) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \frac{1}{1+x^2|\sin x|^{3/2}}.$$
Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}$.

5 Existence et calcul des intégrales :

1) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\tan x}\,\mathrm{d}x$; **2)** $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{Arctan}\,(x)}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$.

Indication

On pourra utiliser $\displaystyle\int_0^{\pi/2} -\ln(\sin(x))\,\mathrm{d}x = \frac{\pi\ln 2}{2}$ établi en *exercice résolu.*

6 Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 -\frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$.

7 **1)** La fonction $f : \left(x \mapsto \frac{\mathrm{Arctan}\,x}{x\ln(2+x^2)}\right)$ est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$?

2) Pour quelles valeurs de t, la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x-t}\sqrt{\frac{1-x}{x}}$ est-elle intégrable sur $]0,1[$?

8 Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction $f_n : (t \mapsto t^n(\ln t)^2)$ est intégrable sur $]0,1]$ et calculer son intégrale $u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n(\ln t)^2\,\mathrm{d}t$ en fonction de n.

En déduire une expression de $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{t+1}\,\mathrm{d}t$ sous la forme d'une série.

9 Existence et calcul de $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(b-x))(x-a)}}$, où $0 < a < b$.

10 Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \left(-\frac{\ln(t)}{\sqrt{t}(1-t)^{3/2}}\right)\mathrm{d}t$.

11 f est une fonction continue et de carré intégrable de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{C}$. Montrer que :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$
(On pourra fixer $B > 0$ et intégrer sur $[0,B]$ et sur $[B,x]$.)

12 Étudier la suite $\left(\displaystyle\int_0^1 nx(1-x)^n\,\mathrm{d}x\right)$.

13 Montrer que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x = \sum_1^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$.

14 Montrer que :
$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\cos(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x = \sum_0^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{(2n)!}$$

Indication

On pourra utiliser l'écriture de $\cos(\sqrt{x})$ comme somme d'une série.

15 (*D'après Écrin*, 1996.)

α étant un réel, on pose $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$.

Montrer que F est continue sur son domaine de définition.

16 Les notations sont les mêmes que dans l'*exercice* précédent.

1) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ et déterminer F'.

2) Montrer que $F' \leqslant 0$.

Indication

On pourra couper l'intégrale en deux et faire un changement de variables.

3) Préciser $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} F(n)$. En déduire $\displaystyle\lim_{+\infty} F$.

4) Déterminer $\displaystyle\lim_{\alpha\to1^+} F(\alpha)$.

5) Donner le tableau de variations de F et l'allure de son graphe.

17 On rappelle que $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1) Soit $\alpha > 0$. Calculer $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2}\, dx$.

2) En déduire, pour tout p de $\mathbb{N}$, la valeur de :

$$\int_0^{\infty} x^{2p} e^{-\alpha x^2}\, dx .$$

3) Calculer, pour $\alpha > 0$, $\displaystyle\int_0^{\infty} x e^{-\alpha x^2}\, dx$.

4) En déduire, pour tout p de $\mathbb{N}$, la valeur de :

$$\int_0^{\infty} x^{2p+1} e^{-\alpha x^2}\, dx .$$

18 Soit $a > 0$. Préciser pour quelles valeurs de a et b la fonction $f : x \mapsto \dfrac{|\sin x|^a}{x^b}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

19* Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ et $a < 0$, tels que $\displaystyle\lim_{+\infty} \frac{f'}{f} = a$.

Montrer que la fonction f' est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

En déduire la nature de la série $\sum f(n)$.

20 Soit a et b deux réels strictement positifs. Montrer que $\displaystyle\sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb} = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\, dt$. En déduire $\displaystyle\sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

21* On définit $I_n = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\dots(n+x)}$.

1) Calculer I_n et étudier la limite de la suite (I_n).

2) On pose $f_n(x) = \dfrac{1}{(1+x)\dots(n+x)}$. En considérant $\dfrac{f_n'(x)}{f_n(x)}$, donner un équivalent de $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\, dx$.

3) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\dots(n+x)} = nI_{n+1}$ et en déduire la nature de la série $\sum I_n$.

22* On considère, pour $\lambda \in]0,1[$, la fonction g définie sur $]0,1[$ par $g(x) = \dfrac{1}{x^{1-\lambda}(1-x)^{\lambda}}$.

1) Montrer que g est intégrable sur $]0,1[$.

On note $I(\lambda) = \displaystyle\int_0^1 g(x)\, dx$.

2) À l'aide d'un changement de variable homographique, montrer que :

$$I(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^{1-\lambda}(1+u)} .$$

3) En déduire l'expression de $I(\lambda)$ au moyen de $J(\lambda)$ et de $J(1-\lambda)$, où $J(\lambda) = \displaystyle\int_0^1 \frac{du}{u^{1-\lambda}(1+u)}$.

4) Donner une expression de $J(\lambda)$ comme somme d'une série convergente.

5) En déduire que :

$$I(\lambda) = \frac{1}{\lambda} + 2\lambda \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda^2 - n^2} .$$

23 Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 1-périodique.

On pose $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{f(t)}{t}\, dt$.

1) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la série $\sum u_n$ converge.

2) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $t \mapsto \dfrac{f(t)}{t}$ soit intégrable sur $[1,+\infty[$.

3) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{f(t)}{t}\, dt$ soit convergente, mais non absolument convergente.

24* On considère, pour tout réel a, la fonction :

$$f : x \mapsto x^a e^{ix}$$

1) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles f est intégrable sur $[1,+\infty[$.

2) Montrer que, si a appartient à $[-1,0[$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^a e^{ix}\, dx$ est convergente et donner une relation entre :

$$\int_1^{+\infty} x^a e^{ix}\, dx \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} x^{a-1} e^{ix}\, dx .$$

3) Lorsque $a \geqslant 0$, montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^a \cos x\, dx$ diverge. Qu'en conclure pour :

$$\int_1^{+\infty} x^a e^{ix}\, dx ?$$

4) Qu'en déduire pour les intégrales :

$$\int_1^{+\infty} x^a \cos x\, dx \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} x^a \sin x\, dx$$

5. a) Déterminer le signe de $\displaystyle\int_0^{\infty} x^a \sin x\, dx$ lorsque a appartient à $[-1,0[$.

b) Montrer que les intégrales :

$$\int_0^{\infty} \cos(x^2)\, dx \quad \text{et} \quad \int_0^{\infty} \sin(x^2)\, dx$$

sont convergentes.

Préciser le signe de $\displaystyle\int_0^{\infty} \sin(x^2)\, dx$.

25* a est un réel fixé.

1) Étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_{-\infty}^{a} \frac{n^2x^2 e^{-n^2x^2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

2)Étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_{-\infty}^{a} \frac{n^3x^2 e^{-n^2x^2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

26* **1)** Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty e^{-x}\ln(x)\,\mathrm{d}x$$

2) En déduire la valeur de cette intégrale.

27 On considère une fonction f continue et bornée sur $\mathbb{R}$ et un réel $t > 0$.

1) Montrer que la fonction $\varphi : x \mapsto f(x)\exp\left(-tx^2\right)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

2) Calculer la limite de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\exp\left(-tx^2\right)\mathrm{d}x$ lorsque t tend vers $+\infty$.

3) On suppose $f(0) \neq 0$.

Donner un équivalent de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\exp\left(-tx^2\right)\mathrm{d}x$ lorsque t tend vers $+\infty$.

28 f est une fonction continue et bornée de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.

1) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^\infty f(x)e^{-nx}\,\mathrm{d}x$.

2) Posons $I_n = \displaystyle\int_0^\infty n\,f(x)e^{-nx}\,\mathrm{d}x$; déterminer :

$$L = \lim_{n\to+\infty} I_n\,.$$

3) On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$, de dérivée bornée sur $\mathbb{R}^+$ et telle que $f'(0) \neq 0$. Déterminer un équivalent de $(I_n - L)$.

29 h étant une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on définit la fonction F par $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{h(t)}{\sqrt{x^2-t^2}}\,\mathrm{d}t$.

Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si :

$$h'(0) = 0 = h(0).$$

30* Soit f une fonction continue et intégrable de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.

1) Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto e^{-xt}f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

On pose, pour tout $x \geqslant 0, \varphi(x) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-xt}f(t)\,\mathrm{d}t$.

2) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\varphi(x) = f(0)$.

3) Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

31 Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+xt}\,\mathrm{d}t$.

1) Étudier f. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un domaine à préciser.

2) Déterminer $f(0)$, $f'(0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3) Résoudre l'équation différentielle $x^2y' + y = x$ sur $]0,+\infty[$.

Montrer qu'il existe une unique solution g telle que :

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0.$$

Vérifier que $g(x) = x\,f(x)$.

Déterminer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Séries entières

8

Introduction

*Dans les chapitres précédents d'*Analyse*, nous avons manipulé certaines fonctions exprimées comme sommes de séries, par exemple :*

- *pour tout* x *de* $]-1,1[$:

$$\frac{1}{(1-x)}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

- *pour tout* z *de* $\mathbb{C}$:

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

- *pour tout* x *de* $\mathbb{R}$:

$$\cos(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Dans ces trois exemples, chaque fonction considérée est décrite comme fonction somme d'une série de fonctions $\sum u_n$, *où* u_n *est une fonction monôme, nulle ou de degré* n :

$$u_n(x)=a_nx^n.$$

Le but de ce chapitre est l'étude systématique de ces séries de fonctions appelées séries entières.

OBJECTIFS

- Définition des séries entières.
- Rayon de convergence d'une série entière.
- Disque de convergence et intervalle de convergence d'une série entière.
- Somme et produit de Cauchy de deux séries entières.
- Convergence normale sur tout compact du disque de convergence.
- Primitive et dérivée d'une fonction somme de séries entières.
- Fonction développable en série entière.
- Formule du binôme généralisée.
- Développements classiques.

Séries entières réelles ou complexes, les définitions

1.1. Définition d'une série entière

Soit (a_n) une suite de nombres complexes, la **série entière** de la variable réelle x associée à la suite (a_n) est la série de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ notée $\sum a_n x^n$. Le nombre a_n est appelé le n-ième coefficient de la série entière $\sum a_n x^n$.

De même, la série entière de la variable complexe z associée à la suite (a_n) est la série de fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ notée $\sum a_n z^n$.

Exemples

- $\sum z^n, \sum \frac{z^n}{n!}$ et $\sum \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ sont des séries entières.
- On peut identifier le polynôme $a_0 + \cdots + a_p z^p$ à une série entière dont les coefficients sont nuls à partir de l'indice $p+1$.

1) Les fonctions sommes partielles d'une série entière sont des fonctions polynômes.
2) Pour $z = 0$, la série $\sum a_n z^n$ converge. Sa somme vaut : a_0

1.2. Lemme d'Abel

Précisons le domaine de convergence d'une série entière, c'est-à-dire le domaine de définition de sa fonction somme.

Lemme
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et z_0 un nombre complexe non nul.
Si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée, alors pour tout nombre complexe z :

$$a_n z^n = O\left(\left|\frac{z}{z_0}\right|^n\right).$$

Théorème 1 : Lemme d'Abel
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et z_0 un nombre complexe non nul. Si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée, alors, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série numérique $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Démonstration
Vous rédigerez la démonstration en écrivant :

$$\forall z_0 \neq 0 \qquad |a_n z^n| = |a_n z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n.$$

Pour $0 < |z| < |z_0|$, une série géométrique de raison $\left|\frac{z}{z_0}\right|$ converge.

1.3. Rayon de convergence

Étant donné une série entière $\sum a_n z^n$, on note A l'ensemble des réels positifs r tels que la suite $(a_n r^n)$ soit bornée. On constate aisément que :

- $0 \in A$;
- A est un intervalle, car si r est dans A, alors $[0, r] \subset A$.

Rapport X-ESPCI, 2001
« Les séries entières sont toujours en difficulté par leur rayon de convergence dont on ne connaît pas la signification, pas plus que le lemme d'Abel. »

On définit le **rayon de convergence** R de la série entière $\sum a_n z^n$:

$$R = \sup A = \sup\{r \in \mathbb{R}^+ \,;\, (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée}\}$$

Le sup est pris dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Exemples

- Pour la série entière $\sum nz^n$:

$$A = [0, 1[\quad \text{et} \quad R = 1.$$

- Si α est un réel strictement positif, pour la série entière $\sum \left(\frac{x}{\alpha}\right)^n$:

$$A = [0, \alpha] \quad \text{et} \quad R = \alpha.$$

- On sait que, pour tout réel $r > 0$, la suite $\left(\frac{r^n}{n!}\right)$ tend vers 0. Donc, pour la série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$:

$$A = [0, +\infty[\quad \text{et} \quad R = +\infty.$$

On constate par ces exemples que tout élément de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ est rayon de convergence d'une série entière.

- Pour la série entière $\sum n! z^n$:

$$A = \{0\} \quad \text{et} \quad R = 0.$$

1.4. Convergence d'une série entière

Théorème 2

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

• Pour tout complexe z vérifiant $|z| < R$, la série numérique $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

• Pour tout complexe z vérifiant $|z| > R$, la série numérique $\sum a_n z^n$ est grossièrement divergente.

Ce *théorème* ne permet pas de conclure quant à la nature de la série numérique $\sum a_n z^n$ pour un nombre complexe z de module R. L'étude systématique de ce cas est hors programme.

Démonstration

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. On désigne par A l'ensemble des réels positifs r tels que la suite $(a_n r^n)$ soit bornée.

Puisque $R = \sup A$, on peut dire que :

- si $|z| < R = \sup A$, il existe un élément r de A tel que : $|z| < r$.

La suite $(a_n r^n)$ est bornée et, d'après le *lemme d'Abel*, la série numérique $\sum a_n z^n$ est absolument convergente ;

- si $|z| > R$, $|z|$ n'est pas dans A, donc la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée et la série $\sum a_n z^n$ est grossièrement divergente.

Rapport X-ESPCI, 2001

« Les candidats débutent souvent mal leur épreuve ... étude incomplète de la série entière (recherche du rayon de convergence R, étude en $+R$ ou $-R$). »

Si la série entière $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence R et si la série $\sum |a_n| R^n$ converge, alors la série numérique $\sum a_n z^n$ converge pour tout z du disque fermé $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant R\}$, car elle converge absolument.

Exemples

Les trois exemples ci-dessous illustrent le fait que, pour une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R, le comportement de la série pour les valeurs de z telles que $|z| = R$ n'est pas déterminé par le *théorème* 2.

■ La série entière $\sum \frac{z^n}{3^n}$ converge si, et seulement si, $|z| < 3$, car c'est une série géométrique de raison $\frac{z}{3}$. Son rayon de convergence est 3 et, pour tout nombre complexe z tel que $|z| = 3$, la série diverge.

■ La série entière $\sum \frac{z^n}{n}$ converge si $|z| < 1$, car $\left|\frac{z^n}{n}\right| < |z|^n$. Elle diverge grossièrement si $|z| > 1$, car, dans ce cas, la suite $\left(\left|\frac{z^n}{n}\right|\right)$ tend vers $+\infty$. Donc son rayon de convergence vaut 1. On sait que la série $\sum \frac{z^n}{n}$ converge pour $z = -1$ et diverge pour $z = 1$.
Vous verrez en *exercice* que cette série converge pour tout nombre complexe z tel que $|z| = 1$ et $z \neq 1$.

■ La série entière $\sum \frac{z^n}{2^n n^2}$ converge absolument pour tout z tel que $|z| \leqslant 2$ et diverge grossièrement pour tout z tel que $|z| > 2$. Son rayon de convergence vaut 2 et elle converge pour tout z tel que $|z| = 2$.

Théorème 3
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors :

$$R = \sup\{r \in \mathbb{R}^+ \,;\, (a_n r^n)_n \text{ converge vers } 0\}.$$

Corollaire 3.1
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors :
$$R = \sup\{r \in \mathbb{R}^+ \,;\, \sum a_n r^n \text{ converge}\}.$$

1.5. Disque de convergence, intervalle de convergence

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Dans le plan complexe, on appelle **disque de convergence de la série entière** le disque ouvert de centre O, de rayon R, c'est-à-dire :

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}.$$

Le disque de convergence est le plus grand disque ouvert de centre O en tout point duquel la série entière $\sum a_n z^n$ converge absolument.

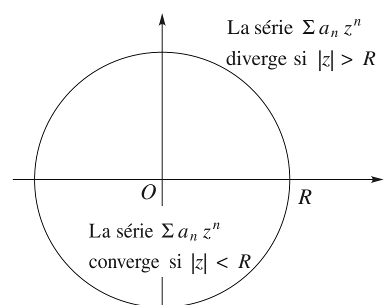
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R, on appelle **intervalle de convergence de la série entière** l'intervalle ouvert $]-R, R[$.

L'intervalle de convergence est le plus grand intervalle ouvert de centre O en tout point duquel la série entière $\sum a_n x^n$ converge absolument.

▶ *Pour s'entraîner : ex. 1.*

Rapport Mines-Ponts, 2000
« Une partie d'entre eux n'a pas l'idée de corriger les anomalies résultant des calculs obtenus : par exemple un rayon de convergence infini avec une fonction f qui s'écrit $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(4-x)}}$. »

Rapport X-ESPCI, 2001
« la recherche du rayon de convergence se résume pour beaucoup de candidats à l'étude du rapport $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, ils se trouvent désemparés lorsqu'il faut utiliser d'autres arguments. »



Doc. 1. *Le disque de convergence d'une série entière.*

Le domaine de convergence de la série entière de la variable complexe $\sum a_n z^n$ est compris entre la boule ouverte $BO(0, R)$ et la boule fermée $BF(0, R)$.

Le domaine de convergence de la série entière de la variable réelle $\sum a_n x^n$ est compris entre l'intervalle ouvert $]-R, R[$ et l'intervalle fermé $[-R, R]$

Rapport X-ESPCI, 2001
« Assez peu de candidats se sont rendus compte qu'il fallait utiliser la convergence absolue de la série entière à l'intérieur du disque de convergence. »

Application 1

Quelques calculs de rayon de convergence

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Prouver que les séries entières suivantes ont aussi R comme rayon de convergence :

1) $\sum |a_n| z^n$.

2) $\sum \alpha\, a_n z^n$ *où α est un nombre complexe non nul.*

3) $\sum n a_n z^n$.

4) $\sum a_n \dfrac{z^{n+1}}{n+1}$.

1) La suite $(a_n z^n)$ est bornée si, et seulement si, la suite $\left(|a_n| z^n\right)$ l'est aussi.

2) On utilise le même argument qu'au **1)**.

3) Notons $A = \{r \in \mathbb{R}^+ | (a_n r^n) \text{ bornée}\}$, $R = \sup A$, $A' = \{r \in \mathbb{R}^+ | (n a_n r^n) \text{ bornée}\}$ et $R' = \sup A'$.

Soit $r \in A'$, alors la suite $(n a_n r^n)$ est bornée. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$|a_n r^n| \leqslant |n a_n r^n|,$$

La suite $(a_n r^n)$ est aussi bornée. Donc $A' \subset A$ et $R' \leqslant R$.

Soit $r \in [0, R[$, on fixe un réel s tel que $r < s < R$. Pour tout n, on peut écrire :

$$n a_n r^n = a_n s^n n \left(\frac{r}{s}\right)^n.$$

Puisque $\dfrac{r}{s} \in [0, 1[$,

$$\lim_{n \to +\infty} n \left(\frac{r}{s}\right)^n = 0 \quad \text{et} \quad n a_n r^n = o(a_n s^n).$$

Or la série $\sum a_n s^n$ est absolument convergente, donc la série $\sum n a_n r^n$ aussi et $[0, R[\subset A'$.

On en déduit que $R = R'$.

4) D'après la question **3)**, le rayon de convergence de :

$$\sum a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}$$

est le même que celui de $\sum a_n z^{n+1}$. Ceci permet de conclure.

2 Calcul du rayon de convergence et exemples

2.1. Calcul du rayon de convergence par comparaison

Théorème 4

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

- Si la série numérique $\sum a_n z_0^n$ converge pour un certain z_0, le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ est tel que $|z_0| \leqslant R$.
- Si la série numérique $\sum a_n z_1^n$ diverge pour un certain z_1, le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ est tel que $R \leqslant |z_1|$.

Rapport X-ESPCI, 2001

« Pour déterminer l'ensemble de convergence d'une série entière, beaucoup se contentent de chercher le rayon de convergence. »

Corollaire 4.1
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

- Si la suite numérique $(a_n z_0^n)$ est bornée pour un certain z_0, alors le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ est tel que :

$$|z_0| \leqslant R.$$

- Si la suite numérique $(a_n z_1^n)$ n'est pas bornée pour un certain z_1, alors le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ est tel que :

$$R \leqslant |z_1|.$$

Les inégalités sont larges.

Corollaire 4.2
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

- Si la suite numérique $(a_n z_0^n)$ converge vers 0 pour un certain z_0, alors le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ est tel que :

$$|z_0| \leqslant R.$$

- Si la suite numérique $(a_n z_1^n)$ ne converge pas vers 0 pour un certain z_1, alors le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ est tel que :

$$R \leqslant |z_1|.$$

▶ ***Pour s'entraîner : ex. 2.***

2.2. La règle de d'Alembert

Théorème 5. Règle de d'Alembert pour les séries entières
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière vérifiant les hypothèses suivantes :

- pour tout entier $n, a_n \neq 0$;
- la suite $\left(\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$ tend vers un élément L de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

Alors, le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est :

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{L} & \text{si} \quad L \in \mathbb{R}^{+*} \\ +\infty & \text{si} \quad L = 0 \\ 0 & \text{si} \quad L = +\infty \end{cases}$$

Rapport X-ESPCI, 2001
« Quant au rayon de convergence, hors d'Alembert point de salut. »

Rapport TPE, 2002
« ... dictature de la règle dite de d'Alembert pour étudier les séries et les rayons de convergence, avec des dégâts spectaculaires. »

Démonstration
Poser $u_n = a_n z^n$ et utiliser la règle de d'Alembert pour les séries numériques.

▶ ***Pour s'entraîner : ex. 3.***

2.3. Exemples

■ **Calcul du rayon de convergence, R, de la série entière $\sum \frac{n!}{n^n} z^n$**

La règle de d'Alembert est parfaitement adaptée à cet exemple.

Notons $a_n = \frac{n!}{n^n}$. On a : $a_n \neq 0$; $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \mathrm{e}^{-1}$. Donc $R = \mathrm{e}$.

■ **Calcul du rayon de convergence, R, de la série entière $\sum \frac{x^{2n}}{(2n)!}$**

On ne peut pas appliquer la règle de d'Alembert pour les séries entières, car tous les coefficients d'indices impairs de cette série entière sont nuls.

En revanche, pour $x \neq 0$, si l'on pose $u_n = \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, on constate que :

$$u_n \neq 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0.$$

On en déduit, par la règle de d'Alembert sur les séries numériques, que la série $\sum u_n$ converge et que $R = +\infty$.

■ **Calcul du rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^{2n}$, sachant que celui de $\sum a_n x^n$ vaut R**

On ne connaît pas la suite (a_n), l'utilisation de la règle de d'Alembert est exclue. En revanche, on peut poser $t = x^2$, la série $\sum a_n t^n$ converge pour $|t| < R$ et diverge pour $|t| > R$. Puisque $t = x^2$, la série $\sum a_n x^{2n}$ converge pour $|x| < \sqrt{R}$ et diverge pour $|x| > \sqrt{R}$.

Donc, si le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ vaut R, celui de $\sum a_n x^{2n}$ vaut $\sqrt{R}$. (On convient que $\sqrt{\infty} = \infty$.)

Rapport Centrale, 1998

« Une série entière peut avoir un rayon de convergence R sans que la limite de $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ soit $\frac{1}{R}$. »

« Si la limite de $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ n'existe pas, alors... c'est la panique »

Ce résultat n'est pas utilisable directement dans une copie. Il faut le redémontrer si besoin est. La méthode utilisée pour l'obtenir est à connaître.

3 Opérations sur les séries entières

3.1. Sommes de séries entières

Théorème 6

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R et R'.

On note ρ le rayon de convergence de la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$, somme de ces deux séries entières. Alors :

- $\rho \geqslant \min(R, R')$;
- pour tout z tel que $|z| < \min(R, R')$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)\, z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, z^n \ ;$$

- si $R \neq R'$, alors $\rho = \min(R, R')$.

Démonstration

Regarder les disques de convergence des deux séries considérées.

Dans le cas $R = R'$, on peut avoir $\rho > \min(R, R')$. Considérer les séries entières de rayon de convergence 1 :

$$\sum x^n \quad \text{et} \quad \sum \left(\frac{1}{3^n} - 1\right) x^n.$$

3.2. Produit de Cauchy de séries entières

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières. Fixons un nombre complexe z et notons $u_n = a_n z^n$ et $v_n = b_n z^n$.

On constate que $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} u_j v_{n-j} = \sum_{j=0}^{n} (a_j b_{n-j}) z^n$.

Ainsi, le **produit de Cauchy de deux séries entières** est une série entière.

Le produit de Cauchy des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est la série entière $\sum c_n z^n$, avec :

$$c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}.$$

Théorème 7

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R et R'.

Notons $\sum c_n z^n$ la série entière produit de Cauchy de ces deux séries et R'' son rayon de convergence.

Alors :

- pour tout nombre complexe z tel que $|z| < \min(R, R')$, les trois séries numériques $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$ et $\sum c_n z^n$ sont absolument convergentes. De plus :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) ;$$

- $R'' \geqslant \min(R, R')$.

On ne peut, *a priori*, rien affirmer de plus au sujet du rayon de convergence de la série entière $\sum c_n z^n$, ainsi qu'un exemple va nous le montrer.

Exemple

Définissons la suite (a_n) en posant $a_0 = 1$ et $a_n = 2$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Définissons la suite (b_n) en posant $b_0 = 1$ et $b_n = 2(-1)^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Le produit de Cauchy des deux séries entières est noté $\sum c_n x^n$.

Alors $c_0 = 1$ et, en traitant deux cas suivant la parité de n, on prouvera que $c_n = 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Rappel 1

Soit deux séries à termes complexes $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

Le **produit de Cauchy** des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est la série de terme général :

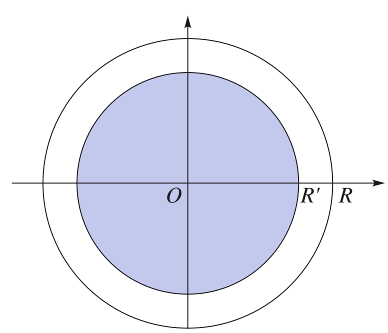
$$w_n = \sum_{j=0}^{n} u_j v_{n-j}.$$

Rappel 2

Si les séries numériques $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, alors la série produit de Cauchy $\sum w_n$ est absolument convergente.

De plus, dans ce cas, les sommes de ces séries vérifient l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n.$$



Doc. 2. *Convergence d'une série somme ou produit de deux séries entières sur le plus petit des deux disques.*

Les deux séries entières ont un rayon de convergence qui vaut 1 et leur produit de Cauchy a un rayon de convergence infini.

Pour conclure, vous vérifierez que :

$$\forall x \in]-1,1[\quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1+x}{1-x} \;;\quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \frac{1-x}{1+x} \;;\quad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = 1.$$

▶ ***Pour s'entraîner : ex. 4 et 5.***

Application 2

Étude de la série entière $\sum \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) x^n$

• On pose $a_0 = 0$, $a_k = \frac{1}{k}$ pour $k \geqslant 1$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $b_n = 1$.

On remarque que :

$$\sum_{j=0}^{n} a_j\, b_{n-j} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n},$$

donc la série entière donnée est le produit de Cauchy de $\sum \frac{1}{n} x^n$ par $\sum x^n$.

Ces deux séries entières ont un rayon de convergence égal à 1, donc $R \geqslant 1$.

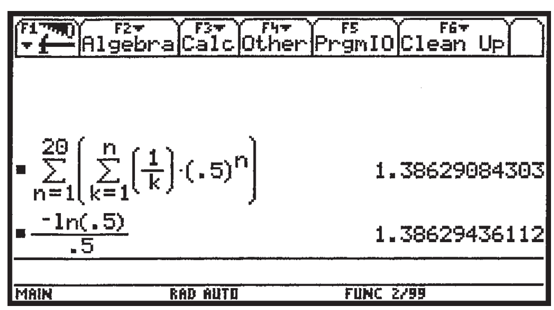
De plus, pour $x = 1$, la série donnée est grossièrement divergente. Donc $R = 1$.

• Pour tout x de $]-1,1[$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = -\ln(1-x)$$

Donc :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) x^n = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}.$$



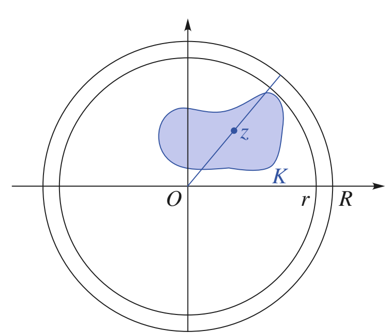
Doc. 3.

4 Continuité sur le disque ouvert de convergence

4.1. Convergence normale sur tout compact du disque de convergence

Théorème 8

La série entière $\sum a_n z^n$ est normalement convergente sur tout compact contenu dans son disque ouvert de convergence.



Doc. 4.

Démonstration

Soit R le rayon de convergence de la série entière et K un compact inclus dans $\{z \in \mathbb{C}\,;|z| < R\}$.

- Il existe un réel r de $[0, R[$ tel que (*doc.* 1) :

$$K \subset \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| \leqslant r\}.$$

En effet, la fonction $(z \mapsto |z|)$ est continue sur le compact K et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Elle atteint donc son maximum en un point z_0 de K. Le réel $r = |z_0|$ convient.

- La série entière $\sum a_n z^n$ est normalement convergente sur le compact K.

En effet :

$$\forall z \in K \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad |a_n z^n| \leqslant |a_n r^n|.$$

Le majorant $|a_n r^n|$ est indépendant de z et c'est le terme général d'une série convergente car $r < R$. Donc, la série de fonctions $\sum a_n z^n$ est normalement convergente sur K.

Rapport E3A, 2002

« Le mode de convergence d'une série entière n'est pas maîtrisé. »

Ce résultat n'entraîne pas la convergence uniforme sur le disque (ou l'intervalle) de convergence

4.2. Continuité de la fonction somme

Théorème 9

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

La fonction somme de cette série entière est continue sur le disque ouvert de convergence :

$$\{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| < R\}.$$

Rapport Centrale, 1997

« De nombreux candidats continuent à affirmer qu'une série entière converge uniformément sur l'intervalle ouvert de convergence. »

▶ ***Pour s'entraîner : ex. 6.***

5 Primitive de la somme d'une série entière

Dans ce qui suit, pour une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$, on étudie les différentes propriétés de la fonction de la variable réelle :

$$S : \begin{cases}]-R, R[\to \mathbb{C} \\ x \quad \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \end{cases}$$

L'étude générale de la fonction de la variable complexe :

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

ne figure pas à notre programme, sauf pour la continuité sur le disque de convergence, résultat obtenu au paragraphe précédent.

Lemme

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.

Le rayon de convergence de la série $\sum a_n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ est aussi R.

L'*application* 1 démontre ce lemme.

Théorème 10
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière réelle de rayon de convergence R strictement positif.
Une primitive sur $]-R, R[$ de la fonction somme, S, de la série entière s'obtient en intégrant terme à terme la série entière :

$$\forall x \in]-R, R[\qquad \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Exemple
La série entière $\sum x^n$ a un rayon de convergence égal à 1 et sa fonction somme est :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

On déduit du corollaire précédent les égalités déjà démontrées :

$$\forall x \in]-1, 1[\qquad \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

6 Dérivation de la fonction somme d'une série entière

6.1. Le théorème de dérivation

Lemme
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R. Le rayon de convergence de la série dérivée terme à terme $\sum n a_n x^{n-1}$ est aussi R.

L'*application* 1 démontre ce lemme.

Théorème 11
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R strictement positif. Sa fonction somme, S, est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R, R[$.
Pour tout x de $]-R, R[$, $S'(x)$ s'obtient en dérivant terme à terme le développement de $S(x)$:

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Application 3

Un calcul de somme de série

Calculer $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^2}$.

Le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{n^2}$ est 1. Notons f sa somme.

La série numérique $\sum \frac{1}{2^n n^2}$ converge, sa somme est $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

La fonction f' est définie sur $]-1, 1[$:

$$f'(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}.$$

$$\forall x \in]0,1[\quad f'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x}.$$

Puis :

$$\forall x \in]0,1[\quad f'(1-x) = -\frac{\ln(x)}{1-x}.$$

Soit : $\forall x \in]0, 1[$

$$f'(x) - f'(1-x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln(x)}{1-x} = -(\ln(x)\ln(1-x))'.$$

Par conséquent :

$$\exists k \in \mathbb{R} \quad f(x) + f(1-x) = k - \ln x \ln(1-x).$$

De plus, la convergence de la série :

$$\sum \frac{1}{n^2}$$

entraîne la convergence normale de la série entière :

$$\sum \frac{x^n}{n^2}$$

sur $[0, 1]$. La fonction f est donc continue sur $[0, 1]$ et :

$$\lim_{x \to 0^+} (f(x) + f(1-x)) = f(0) + f(1) = k = \frac{\pi^2}{6}.$$

Et enfin :

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^2} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{6} - (\ln 2)^2\right).$$

6.2. Dérivations successives

Corollaire 11.1

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R strictement positif.

Sa fonction somme, S, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$.

Pour tout entier $k \geqslant 1$, la dérivée k-ième de S sur $]-R, R[$, $\mathrm{D}^k(S)$, s'obtient en dérivant k fois terme à terme la série de fonctions :

$$S^{(k)}(x) = \mathrm{D}^k\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}.$$

La dérivée k-ième de S peut aussi s'écrire, pour tout x de $]-R, R[$:

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k}(n+k)\dots(n+1)x^n$$

Corollaire 11.2

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière réelle de rayon de convergence R strictement positif.

Les coefficients de la série entière sont liés à sa fonction somme S par :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad a_k = \frac{1}{k!} S^{(k)}(0).$$

Exemples

- Sur $]-1, 1[$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

En dérivant k fois cette expression :

$$\forall x \in]-1, 1[\quad \sum_{n=0}^{\infty} (n+k)(n+k-1)\dots(n+1)x^n = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$$

Donc : $\quad \forall x \in]-1, 1[\ \forall k \in \mathbb{N}^* \quad \dfrac{1}{(1-x)^{k+1}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^n$

Dans cet exemple, l'expression $\dfrac{1}{(1-x)^{k+1}}$ est considérée comme une dérivée.
Elle peut aussi être considérée comme un produit, ce qui donne une deuxième démonstration de la formule étudiée ici (*cf. chapitre* 1, *application* 4)

- Calcul de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$.

La somme cherchée est la valeur, pour $x = \frac{1}{2}$, de la fonction somme de la série entière $\sum n^3 x^n$. Le rayon de convergence de cette série entière vaut 1 (utiliser la *règle de d'Alembert*). Sa fonction somme, sur $]-1, 1[$, est notée f.
La fonction somme de la série entière $\sum x^n$ est notée g.
On obtient, pour tout x de $]-1, 1[$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(n-2)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3n(n-1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} nx^n$$

car chacune des séries entières ci-dessus converge sur $]-1, 1[$. Donc :

$$f(x) = x^3 g'''(x) + 3x^2 g''(x) + x g'(x).$$

Finalement :
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{2^n} = f\left(\frac{1}{2}\right) = 26.$$

▶ ***Pour s'entraîner : ex. 7.***

6.3. Une condition suffisante pour qu'une fonction soit de classe $\mathcal{C}^\infty$

Corollaire 11.3

Soit f une fonction de $]-R, R[$ dans $\mathbb{C}$.

Si, sur cet intervalle, la fonction f est la fonction somme d'une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à R, alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle.

La question du prolongement de certaines fonctions est fréquemment posée. Au *chapitre* 6, le *théorème* 8 et son corollaire permettent de traiter ce problème, mais cette méthode est très lourde.

Exemples

- Pour tout x de $\mathbb{R}^*$:

$$\frac{\sin(x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}.$$

On pose $f(0) = 1$. Alors, sur $\mathbb{R}$, f est la fonction somme de la série entière $\sum(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$ dont le rayon de convergence est infini.
La fonction f ainsi prolongée en 0 est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

- La fonction g :

$$x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{x}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 1[\setminus\{0\}$. Pour tout x de $]-1, 1[\setminus\{0\}$:

$$\frac{\ln(1-x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-x^n}{n+1}.$$

On pose $g(0) = -1$. Alors, sur $]-1, 1[$, g est la fonction somme de la série entière $\sum \frac{-x^n}{n+1}$ dont le rayon de convergence vaut 1.
La fonction g ainsi prolongée en 0 est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$ et sur $]-\infty, 0[$, donc sur $]-\infty, 1[$.

7 Fonctions développables en série entière

7.1. Définition

Une fonction f, définie sur un intervalle $]-r, r[$ (avec $r > 0$), est dite **développable en série entière** sur $]-r, r[$ s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$, de rayon de convergence supérieur ou égal à r, telle que :

$$\forall x \in]-r, r[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Les paragraphes précédents ont permis de développer les principales propriétés de la fonction somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$.
Il s'agit maintenant de déterminer à quelle condition une fonction donnée est la fonction somme d'une série entière.

Théorème 12
Soit f une fonction développable en série entière sur $]-r, r[$:

$$\forall x \in]-r, r[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r, r[$ et les coefficients a_n sont uniques et déterminés par la formule :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Rapport Mines-Ponts, 2000
« Une grande proportion de candidats est persuadée que toute fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ est développable en série entière. »

- les fonctions exponentielle, sinus, cosinus, sinus hyperbolique, cosinus hyperbolique sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$;
- les fonctions :

$$x \mapsto \frac{1}{1-x}, \qquad x \mapsto \frac{1}{1+x}, \qquad x \mapsto \frac{1}{1+x^2}, \qquad x \mapsto \ln(1-x),$$
$$x \mapsto \ln(1+x), \qquad x \mapsto \operatorname{Arctan} x, \qquad x \mapsto \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \quad (k \in \mathbb{N})$$

sont développables en série entière sur $]-1,1[$.

7.2. Séries de Taylor et fonctions développables en série entière

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $]-r,r[$ dans $\mathbb{C}$.

On appelle **série de Taylor** de f, la série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

Corollaire 12.1
Soit f une fonction développable en série entière sur $]-r,r[$.
Alors :
- la série de Taylor de f est convergente sur $]-r,r[$;
- $\forall x \in]-r,r[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

Exemples
Les exemples suivants montrent qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r,r[$ n'est pas nécessairement développable en série entière sur $]-r,r[$.

■ La fonction Arctangente est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

C'est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ qui est développable en série entière sur $]-1,1[$.

Donc :

$$\forall x \in]-1,1[\quad \operatorname{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}.$$

La fonction Arctangente est développable en série entière sur $]-1,1[$. Elle n'est pas développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

■ La fonction $g : x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout entier n, $g^{(n)}(0) = 0$.

Sa série de Taylor est donc la série nulle. Le rayon de convergence de cette série entière est infini.

La fonction g n'est développable en série entière sur aucun intervalle de la forme $]-r,r[$.

Rapport X, 1997
« C'est bien la vingtième fois depuis le début du concours qu'il y a un logarithme à développer au voisinage de 1. Ça y est, ça ne rate pas ! C. s'est trompé, comme douze de ses prédécesseurs environ, dans les deux premiers termes du développement de $\ln(1+x)$ *! ... Si seulement ! ... Si seulement le développement de* $\ln(1+x)$ *ou de* $(1+x)^a$ *et les formules trigonométriques élémentaires pouvaient être sus ! par cœur ! »*

La différence entre fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ et fonction développable en série entière réside dans le phénomène suivant.
Si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle $]-r,r[$, alors f admet un développement limité en 0 à n'importe quel ordre, donné par la *formule de Taylor-Young* :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{n}(0)}{n!}x^n + R_N(x)$$

avec $\lim_{x\to 0} \frac{R_N(x)}{x^N} = 0$.
Mais, *a priori*, pour x fixé dans $]-r,r[$, on ne connaît pas le comportement de $R_N(x)$ lorsque N tend vers $+\infty$.

Il est possible de construire une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ dont la série de Taylor a un rayon de convergence nul. Vous trouverez une étude détaillée de ce phénomène dans le problème *Navale 1989, Maths 1, partie 2.*

Application 4

Caractérisation d'une fonction développable en série entière

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I, tel que $\inf I < 0 < \sup I$, à valeurs complexes.

1) *On suppose l'existence de réels β, C et M strictement positifs tels que :*

$$\forall x \in]-\beta, \beta[\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant C M^n n!$$

Prouver que f est développable en série entière sur un intervalle $]-\alpha, \alpha[\subset I$.

2) *Montrer que cette condition suffisante est aussi nécessaire.*

1) En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange on a, pour tout x de $]-\beta, \beta[$ et tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k\right| \leqslant \frac{|x^n|}{n!} \sup_{|t| \leqslant |\beta|} \left|f^{(n)}(t)\right|$$
$$\leqslant C M^n |x|^n$$

Soit $\alpha = \min\left(\beta, \dfrac{1}{M}\right)$.

Pour tout x de $]-\alpha, \alpha[$, $M|x| < 1$ et :

$$\lim_{n \to +\infty} \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k\right| = 0.$$

La fonction est développable en série entière sur $]-\alpha, \alpha[$.

2) La fonction f est développable en série entière sur $]-\alpha, \alpha[$. Soit r dans $]0, \alpha[$.

La suite $\left(\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} r^n\right)$ est bornée :

$$\exists A > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| r^n \leqslant A.$$

D'autre part, puisque f est développable en série entière sur $]-\alpha, \alpha[$:

$\forall x \in]-\alpha, \alpha[\quad \forall k \in \mathbb{N}$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^{n-k}$$

On majore $\left|f^{(k)}(x)\right|$ pour tout entier k et tout x de $]-\alpha, \alpha[$:

$$\left|f^{(k)}(x)\right| \leqslant \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} \left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| r^{n-k} \left|\frac{x}{r}\right|^{n-k}.$$

$$\left|f^{(k)}(x)\right| \leqslant A r^{-k} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} \left|\frac{x}{r}\right|^{n-k}.$$

Or, sur $]-1, 1[$, la fonction :

$$t \mapsto \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} t^{n-k}$$

est la dérivée k-ième de la fonction :

$$t \mapsto \sum_0^\infty t^n = \frac{1}{1-t}.$$

On en déduit que, pour tout réel t de $]-1, 1[$, on a :

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} t^{n-k} = \frac{k!}{(1-t)^{k+1}}.$$

En choisissant $0 < \beta < r$, on a, pour tout x de $]-\beta, \beta[$ et tout k de $\mathbb{N}$:

$$\left|f^{(k)}(x)\right| \leqslant \frac{Ar}{r-\beta} \frac{1}{(r-\beta)^k} k!$$

Le résultat est atteint en prenant :

$$C = \frac{Ar}{r-\beta} \quad \text{et} \quad M = \frac{1}{r-\beta}.$$

Application 5

Équation différentielle linéaire et série entière

On considère l'équation différentielle :

$$x^2y'' + 4xy' + 2y = \ln(1+x) \qquad (E)$$

1) *Montrer l'existence d'une solution de cette équation, développable en série entière sur* $]-1,1[$.

2) *Exprimer la fonction somme de cette série entière à l'aide des fonctions classiques.*

3) *En déduire les solutions de* (E) *sur* $]-1,0[$, $]0,+\infty[$, $]-1,+\infty[$.

1) • Recherche des coefficients d'une éventuelle série entière solution

Si la série entière $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence $R \geqslant 1$ et si sa fonction somme $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est solution de (E) sur $]-1,1[$, alors y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et sur $]-1,1[$, l'équation devient :

$$2a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left((n^2+3n+2)a_n - \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)x^n = 0$$

On en déduit, grâce à l'unicité du développement en série entière, qu'une éventuelle série entière solution est telle que :

$$a_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)}.$$

• Étude de la série entière $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)}x^n$

La *règle de d'Alembert* permet de conclure que son rayon de convergence est 1.

Sa fonction somme, notée f, est donc définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.

Par construction, f est développable en série entière sur cet intervalle et les relations satisfaites par ses coefficients prouvent que f est solution de (E) sur $]-1,1[$.

2) Compte tenu des rayons de convergence, pour tout x de $]-1,1[$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n}x^n - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2(n+2)}x^n.$$

De plus, pour tout x de $]-1,1[\setminus\{0\}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n}x^n = \frac{1}{2}\ln(1+x)$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+1}x^n = \frac{1}{x}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k = \frac{1}{x}(\ln(1+x)-x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2(n+2)}x^n = \frac{1}{2x^2}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k = \frac{1}{2x^2}\left(\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}\right).$$

On sait, d'autre part, que $f(0) = a_0 = 0$ et que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$. Il en découle que :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)^2}{2x^2}\ln(1+x) - \dfrac{1}{2x} - \dfrac{3}{4} & \text{si } x \in]-1,1[\setminus\{0\} \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

3) Notons (H) l'équation linéaire homogène associée à (E) :

$$x^2y'' + 4xy' + 2y = 0 \qquad (H)$$

L'ensemble des solutions de (H) sur un intervalle I ne contenant pas 0 est un espace vectoriel de dimension 2.

La fonction $x \mapsto x^r$ est solution de (H) si, et seulement si :

$$r(r-1) + 4r + 2 = 0.$$

Donc, les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sont solutions de (H) sur tout intervalle I ne contenant pas 0.

Connaissant les solutions de (H) et une solution particulière de (E), on peut conclure.

- Les solutions de (E) sur $]-1,0[$ sont :

$$x \mapsto \frac{(x+1)^2}{2x^2}\ln(1+x) - \frac{1}{2x} - \frac{3}{4} + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}$$

avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

• D'après la question **2)**, la fonction :

$$x \mapsto \frac{(x+1)^2}{2x^2}\ln(1+x) - \frac{1}{2x} - \frac{3}{4}$$

est solution de (E) sur $]0,1[$.

Les calculs de ses dérivées étant valables sur $]0,+\infty[$, elle est solution sur $]0,+\infty[$. Ainsi, les solutions de (E) sur $]0,+\infty[$ sont de la forme :

$$x \mapsto \frac{(x+1)^2}{2x^2}\ln(1+x) - \frac{1}{2x} - \frac{3}{4} + \frac{c}{x} + \frac{d}{x^2}$$

avec $(c,d) \in \mathbb{R}^2$.

• Une solution de (E) sur $]-1,+\infty[$ est de la forme indiquée ci-dessus sur $]-1,0[$ et sur $]0,+\infty[$.

De plus, elle est continue en 0. Sachant que :

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{(x+1)^2}{2x^2}\ln(1+x) - \frac{1}{2x} - \frac{3}{4}\right] = 0,$$

on en déduit que la fonction :

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{(x+1)^2}{2x^2}\ln(1+x) - \frac{1}{2x} - \frac{3}{4} & \text{si } x \in]-1,+\infty[\setminus\{0\} \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est la seule solution de (E) sur $]-1,+\infty[$.

7.3. Méthode pratique

Pour prouver qu'une fonction est développable en série entière sur $]-r,r[$:

• on regarde **d'abord** si elle n'est pas composée à l'aide d'une somme, d'un produit, de primitives ou de dérivées de fonctions développables en série entière déjà connues ;

• on peut aussi étudier si la fonction est solution d'une équation différentielle et utiliser la méthode développée ci-dessus ;

• si les tentatives précédentes ont échoué, on prouve que, pour tout x de $]-r,r[$:

$$\lim_{N\to+\infty}\left| f(x) - \sum_{n=0}^{N}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right| = 0.$$

Pour cela, on majore la valeur absolue du reste $R_N(x) = f(x) - \sum_{n=0}^{N}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$, soit à l'aide de l'*inégalité de Taylor-Lagrange*, soit grâce à l'*égalité de Taylor avec reste intégral*.

8 Développements en série entière classiques

8.1. Formule du binôme généralisée

Théorème 13 : Formule du binôme généralisée

Pour tout réel α, la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est développable en série entière sur $]-1,1[$. Son développement est donné par :

$$\forall x \in]-1,1[\quad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n.$$

Lorsque le réel α est un entier positif, on remarque que, pour $n > \alpha$:

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!} = 0.$$

Dans ce cas, le développement indiqué est valable pour tout x de $\mathbb{R}$. Il s'agit tout simplement de la formule du binôme de Newton, d'où l'appellation « formule du binôme généralisée », lorsque α est un réel quelconque.

Démonstration

Soit α un élément de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$. On note f l'application $x \mapsto (1+x)^{\alpha}$.

- L'application f est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $]-1,+\infty[$ et, sur cet intervalle :

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} = \frac{\alpha}{1+x} f(x).$$

- Il est aisé de vérifier que $f(0) = 1$ et $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))$.

On pose $a_0 = 1$ et

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}.$$

Par construction, la série entière $\sum a_n x^n$ est la série de Taylor de f. Son rayon de convergence vaut 1. On note g sa fonction somme sur $]-1,1[$.

- Pour tout x de $]-1,1[$:

$$(1+x)g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!}(n+1)x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!} n x^n.$$

$$= \alpha g(x)$$

Donc, la fonction g est solution, sur $]-1,1[$, de l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$y' = \frac{\alpha}{1+x} y \qquad \textbf{(1)}$$

La fonction f est aussi solution, sur $]-1,1[$, de cette équation différentielle linéaire et $f(0) = g(0) = 1$. Le *théorème de Cauchy-Lipschitz* permet de conclure que $f = g$.

Rapport Centrale, 2001

« Ici, on assiste au développement en série entière de $1/(1-u)$ sans tenir compte de son domaine de validité. »

Il est fondamental de comprendre que la convergence de la série de Taylor de f sur un intervalle $]-r,r[$ n'implique pas, *a priori*, que la fonction somme de cette série soit f. C'est pourquoi il reste à prouver que $f = g$.

Application 6

Développement en série entière de la fonction Arcsinus

1) *Montrer que la fonction :*

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

est développable en série entière sur $]-1,1[$.

2) *En déduire que la fonction* Arcsinus *est développable en série entière sur $]-1,1[$ et exprimer les coefficients de son développement à l'aide de factorielles.*

3) *Montrer que :*

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}.$$

1) D'après la *formule du binôme généralisée*, pour tout u de $]-1,1[$: $(1+u)^{-1/2} =$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{-1}{2}\left(\frac{-1}{2}-1\right)\dots\left(\frac{-1}{2}-(n-1)\right)}{n!} u^n.$$

Pour tout x de $]-1,1[$, $-x^2$ est aussi dans $]-1,1[$ et :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^n n!} x^{2n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}.$$

Ceci prouve que la fonction :

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

est développable en série entière sur $]-1,1[$.

2) La fonction Arcsinus est une primitive, sur $]-1,1[$, de :

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Elle est donc développable en série entière sur cet intervalle.

Pour tout x de $]-1,1[$:

$$\operatorname{Arcsin} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

3) Soit :

$$u_n(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{et} \quad \|u_n\|_\infty = \sup_{]-1,1[} |u_n|.$$

La formule de Stirling permet de prouver que :

$$\|u_n\|_\infty = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $]-1,1[$.

Le *théorème d'interversion des limites* s'applique lorsque x tend vers 1^- et permet de conclure.

8.2. Les incontournables

8.2.1 Fonctions construites à partir de la fonction exponentielle

Les fonctions suivantes sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$.

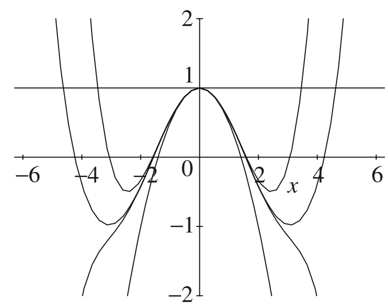
$$t \mapsto e^{tz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n z^n}{n!}$$

$$x \mapsto \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$x \mapsto \operatorname{ch} x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$x \mapsto \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$x \mapsto \operatorname{sh} x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$



Doc. 5. *Quelques sommes partielles de la série de Taylor de la fonction cosinus.*

► ***Pour s'entraîner : ex. 8.***

8.2.2 Fonctions construites à partir de séries géométriques et de la formule du binôme généralisée

Les fonctions suivantes sont développables en série entière sur $]-1,1[$:

$$x \mapsto \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$x \mapsto \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-x^n}{n}$$

$$x \mapsto \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$$x \mapsto \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$$

$$x \mapsto \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

$$x \mapsto \operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

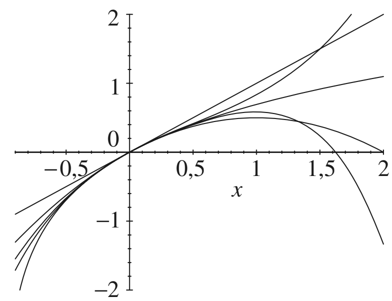
$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$$

$$\operatorname{Arcsin} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$$

$$\operatorname{Argsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$



Doc. 6. *Quelques sommes partielles de la série de Taylor de la fonction :* $x \mapsto \ln(1+x)$.

Ces fonctions sont, en général, définies sur des intervalles plus grands que $]-1, 1[$.

Toutefois, vous pourrez vérifier que le rayon de convergence de chacune de ces séries entières vaut 1.

▶ ***Pour s'entraîner : ex. 9.***

FICHE MÉTHODE

Pour **déterminer le rayon de convergence R d'une série entière** $\sum a_n x^n$, on peut :

- trouver un complexe z_0 tel que :
  - la suite $(a_n z_0^n)$ soit bornée ;
  - la suite $(a_n z_0^n)$ converge vers 0 ;
  - la série $\sum a_n z_0^n$ converge ;

alors $R \geqslant |z_0|$.

- trouver un complexe z_1 tel que :
  - la série $\sum a_n z_1^n$ diverge ;
  - la suite $(a_n z_1^n)$ ne soit pas bornée ;
  - la suite $(a_n z_1^n)$ ne converge pas vers 0 ;

alors $R \leqslant |z_1|$.

- (*Règle de d'Alembert*) vérifier que a_n ne s'annule pas et que la suite $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$ admet une limite l dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$;

alors, le rayon de convergence est :

- $R = \frac{1}{l}$ si $l \in \mathbb{R}^{+*}$;
- $R = 0$ si $l = +\infty$;
- $R = +\infty$ si $l = 0$.

Pour prouver qu'**une fonction est développable en série entière** sur $]-r, r[$, on peut :

- regarder d'abord si elle n'est pas composée à l'aide d'une somme, d'un produit, de primitives ou de dérivées de fonctions développables en séries entières ;
- étudier si la fonction est solution d'une équation différentielle :
  - calculer les coefficients des éventuelles séries entières solutions de cette équation ;
  - justifier de l'égalité, sur $]-r, r[$, de la fonction de départ avec l'une des sommes de séries entières ainsi déterminées ;
- sachant que f **est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r, r[$**, on peut démontrer que, pour tout x de $]-r, r[$:

$$\lim_{N\to+\infty}\left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{n}(0)}{n!}x^n \right| = 0.$$

Pour cela, on majore la valeur absolue du reste $R_N(x) = f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{n}(0)}{n!}x^n$, soit à l'aide de l'*inégalité de Taylor-Lagrange*, soit grâce à l'*égalité de Taylor avec reste intégral*.

Exercices

1 Déterminer le rayon de convergence de la série entière :

$$\sum \frac{1}{(1+\sqrt{n})^n} z^n.$$

2 **1)** Montrer que la suite $(\cos n)$ ne converge pas vers 0. (Utiliser la suite extraite $(\cos 2n)$).

2) Déterminer le rayon de convergence de $\sum \cos n\, x^n$.

3) Déterminer sa fonction somme sur l'intervalle ouvert de convergence.

3 Déterminer le rayon de convergence de la série entière :

$$\sum \frac{\left(n+\frac{1}{n}\right) n!}{2^{2n}\sqrt{(2n)!}} z^n.$$

4 On considère la série entière $\sum \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}$.

1) Déterminer son rayon de convergence.

2) Exprimer sa fonction somme, sur l'intervalle ouvert de convergence, à l'aide d'une décomposition en éléments simples.

3) Que dire aux bornes de l'intervalle de convergence ?

5 Déterminer le rayon de convergence et la fonction somme de la série entière $\sum nx^n$ en la représentant à l'aide d'un produit de Cauchy.

6 Déterminer, pour chacune des séries entières suivantes, le rayon de convergence R et l'intervalle I, le plus grand possible, sur lequel elles convergent.

$$\sum x^n \;, \quad \sum \frac{x^n}{n} \quad \text{et} \quad \sum \frac{x^n}{n^2}.$$

Dans les trois cas, la fonction somme est-elle continue sur I ?

7 Déterminer le rayon de convergence de la série entière :

$$\sum \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)}.$$

Calculer sa fonction somme sur l'intervalle ouvert de convergence en utilisant sa dérivée.

8 **1)** Prouver que la fonction :

$$x \mapsto e^x \sin x$$

est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et déterminer son développement.

2) En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\sum_{p=0}^{E((n-1)/2)} (-1)^p \binom{n}{2p+1} = \left(\sqrt{2}\right)^n \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right).$$

9 Montrer que la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln\left(1+\frac{x}{1+x^2}\right)$$

est développable en série entière sur $]-1,1[$.

10 On fixe (α,β) dans $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière dont les coefficients vérifient la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+2} = \alpha\, a_{n+1} + \beta\, a_n \qquad \textbf{(1)}$$

1) Montrer que le rayon de convergence de cette série entière est non nul.

2) Montrer que, sur un certain disque ouvert centré en 0, la fonction somme de cette série entière est la fraction rationnelle :

$$f(z) = \frac{a_0 + (a_1 - a_0\,\alpha)z}{1-\alpha z - \beta z^2}.$$

11* Soit la série entière $\sum \sqrt{n}\, x^n$ et f sa fonction somme.

1) Calculer son rayon de convergence.

2) Exprimer $(1-x)\, f(x)$ et $(1-x)^2\, f(x)$ sous forme de sommes de séries entières.

3) En déduire le comportement de f lorsque x tend vers -1 par valeurs supérieures.

4) Calculer $\lim_{x\to 1^-} (1-x)\, f(x)$ et $\lim_{x\to 1^-} (1-x)^2\, f(x)$.

5) Déterminer un équivalent de f lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

12 Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 1$ et S sa fonction somme.

Montrer que, pour tout entier n :

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(e^{i\theta})e^{-in\theta}\, d\theta.$$

13 Calcul du rayon de convergence et de la somme de la série entière :

$$\sum \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!}.$$

14 On considère la fonction, définie sur $]-\pi,\pi[\setminus\{0\}$:

$$f : x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}.$$

Montrer que f est prolongeable en 0 en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\pi, \pi[$.

15 (*Extrait de CCP* 96)

On considère l'équation différentielle :

$$xy'' - y' + 4x^3 y = 0 \qquad (\boldsymbol{E})$$

dont on se propose de déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$.

On recherche d'abord les solutions développables en séries entières.

On note $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une telle solution, lorsqu'elle existe, et on désigne par R son rayon de convergence.

1) Montrer qu'il existe une relation de récurrence, que l'on explicitera, entre a_{n+4} et a_n.

2) Pour $p \in \mathbb{N}$, déterminer a_{4p+1} et a_{4p+3}.

3) Pour $p \in \mathbb{N}$, déterminer a_{4p} en fonction de a_0 et de p (respectivement a_{4p+2} en fonction de a_2 et de p).

4) Quel est le rayon de convergence de la série entière obtenue ?

5) Soit S le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont solutions de $(\boldsymbol{E})$ sur $\mathbb{R}$. Préciser une base de S.

16 * Dans tout cet exercice, α est un réel strictement supérieur à 1.

1) Déterminer le domaine de définition de la fonction f définie par :

$$f(x) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}\right).$$

2) Montrer que f est continue sur son domaine de définition.

3) Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$.

4) Déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre satisfaite par f.

En déduire que f est développable en série entière sur $]-1, 1[$.

5) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geqslant 1$.

Montrer que, s'il existe un entier naturel p tel que la suite $(n^p a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, alors $R = 1$.

En déduire le rayon de convergence de la série de Taylor de f.

17 ** **1)** Montrer que, la série de fonctions :

$$\sum (-1)^{n-1} \frac{n}{x^2 + n^2}$$

converge simplement sur $\mathbb{R}$

Dans la suite, la fonction somme est notée f.

2) Montrer que, pour tout réel x et tout entier $n > 0$:

$$\int_0^\infty \cos(xt) e^{-nt}\, dt = \frac{n}{x^2 + n^2}.$$

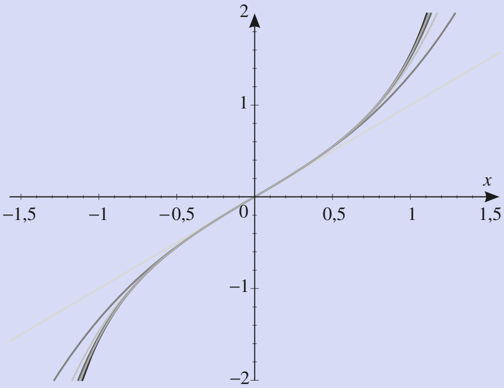
En déduire que, pour tout réel x :

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{e^t + 1}\, dt.$$

3) Montrer que f est développable en série entière sur un intervalle à préciser.

18 Développement en série entière de la fonction tangente

L'objectif est d'établir que la fonction tangente, notée f, est développable en série entière sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.



1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\qquad f^{(n)}(x) \geqslant 0.$

2) Montrer que, pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, la série de Taylor de f converge. En déduire que le rayon de convergence de cette série entière est supérieur ou égal à $\frac{\pi}{2}$.

La fonction somme de la série de Taylor de f est notée g.

3) Montrer que $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\qquad g'(x) = 1 + g^2(x).$

4) Conclure.

Séries de Fourier

9

Introduction

Historiquement, c'est au milieu du XVIII*e siècle que d'Alembert* (1747)*, Euler* (1753) *et Daniel Bernoulli* (1755) *commencent à étudier les questions suivantes :*
Un son peut-il être décomposé en une série d'harmoniques ?
Comment calculer les harmoniques ?
Comment retrouver le signal à partir des harmoniques ?
En 1807*, Fourier affirme que, pour « une fonction entièrement arbitraire » (et* 2π*-périodique), la formule :*

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t$$

permet de calculer les harmoniques de la fonction f *qui est l'appellation mathématique du signal. Et, à propos des séries qui synthétisent le signal par la formule*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \mathrm{e}^{int},$$

il affirme : « Il est facile de montrer qu'elles sont convergentes. » Les idées géniales, bien qu'imprécises, de Fourier (mais il avait le niveau de rigueur de son époque !) ont été un moteur formidable pour préciser, entre autres, la notion de fonction, la (ou les) théorie(s) de l'intégration et les notions de convergence d'une série de fonctions.

OBJECTIFS

- Coefficients de Fourier de f.
- Coefficients trigonométriques de f.
- Série de Fourier de f.
- Projection orthogonale dans l'espace préhilbertien $\mathcal{C}_{2\pi}$.
- Convergence en moyenne quadratique.
- Formule de Parseval.
- Les deux théorèmes de convergence ponctuelle.

Dans ce chapitre, aux applications physiques et technologiques importantes, nous allons d'abord étudier le moyen d'*analyser un signal périodique* en le décomposant en *harmoniques*.

Après avoir étudié la décomposition d'un signal en ses harmoniques, nous nous intéresserons au problème de la synthèse de ce signal à partir de ses harmoniques. Il s'agit dès lors d'un problème de convergence. La série de Fourier d'une fonction f continue par morceaux, 2π-périodique, converge-t-elle vers f, en moyenne quadratique ? normalement ? simplement ?

L'analyse du signal : les coefficients de Fourier d'une fonction périodique

***Joseph Fourier** (1768-1830), mathématicien et physicien français.*

Le cadre fixé par le programme, pour ce chapitre, est l'**espace vectoriel complexe** $\mathcal{CM}_{2\pi}$ des fonctions 2π-périodiques, continues par morceaux sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes.

1.1. Polynômes trigonométriques

Nous avons rencontré en *Algèbre* les fonctions $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad e_n(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nt} \quad c_n(t) = \cos(nt) \quad \text{et} \quad s_n(t) = \sin(nt).$$

De plus, $\mathrm{Vect}\,((e_k)_{-n\leqslant k\leqslant n}) = \mathrm{Vect}\,(c_0, c_1, \ldots, c_n, s_1, \ldots, s_n)$. C'est un sous-espace vectoriel de dimension $2n+1$, de $\mathcal{CM}_{2\pi}$, que l'on note $\mathcal{P}_n$.

Si P appartient à $\mathcal{P}_n$, P apparaît comme un polynôme en $\cos(t)$ et $\sin(t)$. Il est appelé « polynôme trigonométrique ». On note :

$$\mathcal{P} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_n = \mathrm{Vect}(e_k \ ; \ k \in \mathbb{Z}) = \mathrm{Vect}\left(\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}} \ , \ \{s_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}\right).$$

Cet ensemble est appelé l'espace des **polynômes trigonométriques**.

Un polynôme trigonométrique peut donc s'écrire :

$$P = \sum_{k=-m}^{m} \alpha_k e_k = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{m} \left[(\alpha_k + \alpha_{-k})c_k + \mathrm{i}(\alpha_k - \alpha_{-k})s_k\right]$$

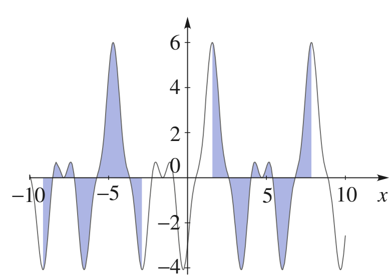
où les α_k sont des complexes.

Si g est une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a, a+2\pi[$, admettant une limite à gauche en $a+2\pi$, g peut être prolongée, et de manière unique, sur $\mathbb{R}$ en une fonction de $\mathcal{CM}_{2\pi}$ et nous définirons fréquemment une fonction de $\mathcal{CM}_{2\pi}$ par sa restriction à un intervalle de la forme $[a, a+2\pi[$.

Si f est dans $\mathcal{CM}_{2\pi}$, on calcule l'intégrale sur une période de la fonction f. L'application f étant 2π-périodique, on remarque que :

$$\int_a^{a+2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Cette propriété a été rencontrée dans le cours d'intégration et peut se visualiser sur le *document* 1.



Doc. 1. *Les aires colorées sur le schéma sont égales.*

1.2. Coefficients de Fourier de f

Si f est dans $\mathcal{CM}_{2\pi}$, on pose, pour tout n de $\mathbb{Z}$:

$$\hat{f}(n) = c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{a}^{a+2\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t.$$

Les $c_n(f)$ sont appelés les **coefficients de Fourier** de f.
Le coefficient $c_0(f)$ est la valeur moyenne de f sur une période.

⚠ *Lorsque f est définie au départ sur un intervalle $[\alpha, \alpha+2\pi[$, toutes les intégrales seront calculées sur cet intervalle.*

Exemples

■ Si P est un polynôme trigonométrique, le coefficient de Fourier $c_n(P)$ est le coefficient de e_n dans P. En effet :

$$\begin{aligned} c_n(P) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=-m}^{m}\alpha_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=-m}^{m}\alpha_k\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-n)t}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Donc, $c_n(P) = \alpha_n$ si $|n| \leqslant m$ et 0 sinon.

■ Soit f l'application de $\mathcal{CM}_{2\pi}$, définie sur $]-\pi, \pi]$ par $x \mapsto \dfrac{\pi - x}{2}$.
Si $n \neq 0$, alors :

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\pi - x}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n}{2\mathrm{i}n}.$$

Si $n = 0$:

$$c_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\pi - x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

1.3. Propriétés des coefficients de Fourier de f

■ Pour n fixé dans $\mathbb{Z}$, l'application de $\mathcal{CM}_{2\pi}$ dans $\mathbb{C}$, qui à f associe $c_n(f)$, est une forme linéaire.

■ L'application ϕ est linéaire :

$$\phi : \begin{cases} \mathcal{CM}_{2\pi} \to \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \\ f \mapsto \hat{f} = \left(\hat{f}(n)\right)_{n\in\mathbb{Z}} = (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \end{cases}$$

■ $\forall f \in \mathcal{CM}_{2\pi} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \qquad \overline{c_n(f)} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\overline{f(t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t = c_{-n}(\overline{f}).$

Par conséquent, si f est à valeurs réelles, $\overline{c_n(f)} = c_{-n}(f)$.

Rapport Centrale, 1998

« Trop de candidats ignorent que :

$$\int_x^{x+T} f$$

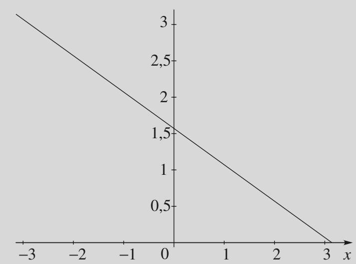
ne dépend pas de x lorsque f est T-périodique et continue. »

Rapport X-ESPCI, 2000

« Les coefficients de Fourier offrent des difficultés de calcul pour deux raisons : mauvaise connaissance des formules de base en trigonométrie, manque d'entraînement aux techniques classiques de calcul d'intégrale de base. »

Avec Maple :

```
> plot((Pi-x)/2,x=-Pi..Pi);
```




```
> c0 :=1/(2*Pi)*(int((Pi-x)/2,
  x=-Pi..Pi));
```

$$c0 := \frac{1}{2}\pi$$

```
> cn :=1/(2*Pi)
  *simplify(int((Pi-x)/2
  *exp(-i*n*x), x=-Pi..Pi));
```

$$cn := \frac{1}{4}\frac{(e^{(-2\pi i n)} + 2\pi i n - 1)\,e^{(\pi i n)}}{\pi i^2 n^2}$$

```
> cn :=subs(exp(-2*i*Pi*n)=1,");
> cn :=subs(exp(i*Pi*n)
  =(-1)^n,");
```

$$cn := \frac{1}{2}\frac{e^{(\pi i n)}}{i n}$$

$$cn := \frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{i n}$$

Doc. 2.

■ Soit f dans $\mathcal{CM}_{2\pi}$ et g définie par $g(t) = f(-t)$. Alors, g est dans $\mathcal{CM}_{2\pi}$ et :

$$c_n(g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t = c_{-n}(f).$$

En particulier, si f est une fonction paire, $c_n(f) = c_{-n}(f)$ et, si f est impaire, alors $c_n(f) = -c_{-n}(f)$.

■ Soit α un réel et f dans $\mathcal{CM}_{2\pi}$, on définit h dans $\mathcal{CM}_{2\pi}$ par $h(t) = f(t+\alpha)$. Alors :

$$c_n(h) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+\alpha)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\alpha}c_n(f)$$

(poser $u = t + \alpha$).

Rapport École de l'air, 1998

« Très peu de candidats ont su exploiter correctement la relation liant les coefficients de Fourier de f et ceux de f'. »

■ Si f est dans $\mathcal{CM}_{2\pi}$, la suite $\widehat{f}$ de ses coefficients de Fourier est bornée :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad |c_n(f)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|.$$

► ***Pour s'entraîner : ex. 1.***

1.4. Cas d'une fonction de classe $\mathcal{C}^k$

Soit f continue, 2π-périodique, et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

La suite $\left(\widehat{f}(n)\right)_{n\in\mathbb{Z}} = (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est bornée et :

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| = \left\|\widehat{f}\right\|_\infty \leqslant \|f\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

De même :

$$\|\widehat{f'}\|_\infty \leqslant \|f'\|_1 .$$

De plus, pour tout n de $\mathbb{Z}$:

$$c_n(f') = \frac{1}{2\pi}\left[f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(-\mathrm{i}n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t.$$

D'où :

$$\boxed{c_n(f') = \mathrm{i}nc_n(f).}$$

En particulier, $c_0(f') = 0$ et, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $c_n(f) = \dfrac{1}{\mathrm{i}n}c_n(f')$.

Donc $c_n(f) = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Rapport Centrale, 1997

« Ces erreurs sont étonnantes, et pourtant trop persistantes pour qu'il ne s'agisse que d'inattention ou d'affolement : … dans l'étude de Fourier, la notion de fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux est presque toujours fausse et on ignore l'importance de la continuité de f dans les relations entre coefficients de f et f'. »

Théorème 1

Si f est 2π-périodique, de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ $(k \geqslant 1)$, alors les suites $(c_n(f))$ et $(c_{-n}(f))$ sont dominées par la suite $\left(\dfrac{1}{n^k}\right)$.

1.5. Coefficients trigonométriques de f

Soit f dans $\mathcal{CM}_{2\pi}$, on appelle **coefficients trigonométriques** de f les coefficients $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ définis par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$$

De plus, $\dfrac{a_0(f)}{2} = c_0(f)$ est la valeur moyenne de la fonction sur une période.

Lorsque f est définie au départ sur un intervalle $[\alpha, \alpha+2\pi[$, toutes les intégrales seront calculées sur cet intervalle.

Les relations $\cos(nt) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}}{2}$ et $\sin(nt) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}}{2\mathrm{i}}$ entraînent que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$a_n(f) = \left[c_n(f)+c_{-n}(f)\right] \quad \text{et} \quad b_n(f) = \mathrm{i}\left[c_n(f)-c_{-n}(f)\right]$$

$$c_n(f) = \frac{1}{2}\left[a_n(f)-\mathrm{i}b_n(f)\right] \quad \text{et} \quad c_{-n}(f) = \frac{1}{2}\left[a_n(f)+\mathrm{i}\,b_n(f)\right].$$

Ces relations liant les coefficients de Fourier aux coefficients trigonométriques permettent de substituer à la suite indexée par $\mathbb{Z}$ des coefficients de Fourier, une suite indexée par $\mathbb{N}$ et une indexée par $\mathbb{N}^*$.

Rapport St Cyr, 1998

Pour les séries de Fourier [...], le terme constant de la série (peu importe qu'on l'appelle a_0 ou $\frac{a_0}{2}$) donne lieu à des erreurs ; peu de candidats savent qu'il s'agit de la moyenne de la fonction sur une période.

Rapport X-ESPCI, 2001

« Nous insistons sur la dégradation de l'usage de la trigonométrie. »

Exemple

Coefficients trigonométriques de l'application f de $\mathcal{CM}_{2\pi}$, définie sur $]-\pi, \pi]$ par :

$$x \mapsto \frac{\pi - x}{2}.$$

Le calcul des coefficients de Fourier de f a été effectué.

Les formules ci-dessus permettent d'en déduire :

$$\frac{a_0(f)}{2} = c_0(f) = \frac{\pi}{2}$$

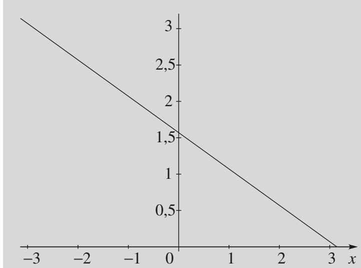
$$a_n(f) = [c_n(f)+c_{-n}(f)] = 0 \quad \text{si} \quad n>0$$

$$b_n(f) = \mathrm{i}\,[c_n(f)-c_{-n}(f)] = \frac{(-1)^n}{n}.$$

On constate que les coefficients $a_n(f)$, pour $n \geqslant 1$, sont nuls.

Ceci s'explique par le fait que la fonction $x \mapsto f(x) - \dfrac{\pi}{2}$ est impaire.

Avec Maple :




```
> assume(n,integer) ;
> bn :=1/Pi*simplify(int(sin(n*x)
   *(Pi-x)/2,x=-Pi..Pi)) ;
> an :=1/Pi*simplify(int(cos(n*x)
   *(Pi-x)/2,x=-Pi..Pi)) ;
```

$$bn := \frac{(-1)^{n\sim}}{n\sim}$$

$$an := 0$$

```
> a[0] :=1/Pi*int((Pi-x)/2,
  x=-Pi..Pi) ;
```

$$a_0 := \pi$$

Doc. 3.

1.6. Propriétés des coefficients trigonométriques

Les propriétés suivantes se déduisent des propriétés des $c_n(f)$.

■ Pour n fixé, les applications $(f \mapsto a_n(f))$ et $(f \mapsto b_n(f))$ sont linéaires de $\mathcal{CM}_{2\pi}$ dans $\mathbb{C}$.

■ Si f est à valeurs réelles, les coefficients trigonométriques de f sont réels.

■ Soit f dans $\mathcal{CM}_{2\pi}$ et g la fonction de $\mathcal{CM}_{2\pi}$, définie par : $g(t) = f(-t)$, on a :

$$a_n(g) = a_n(f) \quad \text{et} \quad b_n(g) = -b_n(f).$$

Par conséquent :

$$\begin{array}{lll} \text{si } f \text{ est paire :} & \forall n \in \mathbb{N}^* & b_n(f) = 0. \\ \text{si } f \text{ est impaire :} & \forall n \in \mathbb{N} & a_n(f) = 0. \end{array}$$

- Si f est paire et 2π-périodique, $a_n(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$.
- Si f est impaire et 2π-périodique, $b_n(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$.

Pour exploiter au mieux cette propriété, on utilise les coefficients trigonométriques de f, et non les coefficients de Fourier, lorsque f est paire ou impaire.

■ Si f est 2π-périodique, continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, :

$$a_n(f') = nb_n(f) \quad \text{et} \quad b_n(f') = -na_n(f).$$

► ***Pour s'entraîner : ex. 2.***

Rapport Centrale, 2001
« Signalons que certains candidats ont trouvé que a_n est différent de 0 alors que la fonction considérée est impaire. »

■ **Traduction physique**

L'analyse du signal est faite. La fonction :

$$t \rightarrow a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt).$$

est la n-ième harmonique du signal f. Lorsque $n = 1$, elle est appelée le fondamental.

Lorsque f est à valeurs réelles, en posant $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, il existe un réel φ_n tel que :

$$a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt) = A_n\cos(nt + \varphi_n).$$

A_n est l'amplitude de la n-ième harmonique et φ_n sa phase. Mais, cette expression n'est pas utilisée en mathématiques, principalement parce que les déphasages sont définis modulo 2π et que la suite de ces déphasages, (φ_n), est difficilement étudiable.

Rapport TPE, 2002
« ... difficultés de calcul de nombreux candidats en trigonométrie (bien utile pour l'étude des séries de Fourier). »

Rapport Centrale, 2001
« Les candidats n'ont pas la moindre idée de l'ordre de grandeur des coefficients de Fourier d'une fonction de classe $\mathcal{C}^k$. »

2 Série de Fourier d'une fonction périodique

2.1. Définitions

Rappelons les notations :

$$c_n(x) = \cos(nx) \quad ; \quad s_n(x) = \sin(nx).$$

Pour toute fonction f de $\mathcal{CM}_{2\pi}$, la série de fonctions :

$$c_0(f) + \sum (a_n(f)c_n + b_n(f)s_n)$$

est appelée la **série de Fourier de** f.

Pour tout entier naturel p, on note $S_p(f)$ la p-ième somme partielle de la série de Fourier de f :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad S_p(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{p}(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx))$$

$$= \sum_{n=-p}^{p} c_n(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nx}.$$

2.2. Exemples

■ $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ sur $]-\pi, \pi]$ (*doc.* 4)

Pour $x = \pi \pmod{2\pi}$, on a, pour tout p : $S_p(f)(x) = \dfrac{\pi}{2} \neq f(\pi)$ (*doc.* 4).

■ Soit f la fonction définie par $f(x) = \max(0, \sin(x))$.

f est 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$.

$$\frac{a_0(f)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\pi}.$$

$$a_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} (\sin(u + nu) + \sin(u - nu))\,\mathrm{d}u.$$

Si $n = 1$, $a_1(f) = 0$.

Si $n > 1$, $a_n(f) = \dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{(-1)^n}{n+1} - \dfrac{(-1)^n}{n-1} + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n-1}\right).$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_{2n+1}(f) = 0$ et $a_{2n}(f) = \dfrac{-2}{\pi(4n^2 - 1)}.$

$$b_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} (\cos(u - nu) - \cos(u + nu))\,\mathrm{d}u.$$

$$b_1(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} (1 - \cos(2x))\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \;;\; \forall n > 1 \quad b_n(f) = 0.$$

Avec Maple :

```
> f:=x->piecewise(x>-3*Pi
  and -Pi>x,(-Pi -x)/2,
  -Pi<x and x<Pi,(Pi-x)/2,
  (3*Pi-x)/2) ;
> restart ;
```

Série de Fourier de f.

```
  b:=array(1..10) ;
  for i to 10 do b[i] :=
  `if`(type(i,even),1/i,-1/i)
  od :
> S:=proc(p,x)
>     local i ;
> a[0]/2+sum(b[i]*sin((i)*x),
  i=1..p) ;
> end ;
```

$$b := \mathrm{array}(1..10, [\,])$$

$$S := \textbf{proc}(p, x)\textbf{local}\ i;$$

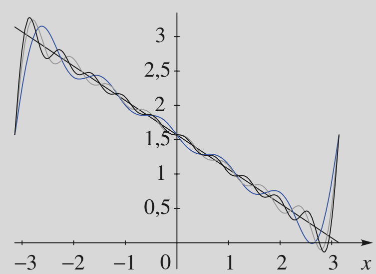
$$1/2 * a[0] + \mathrm{sum}(b[i] * \sin(i * x),$$

$$i = 1..p)\textbf{end}$$

On visualise.

..

```
> plot([(Pi-x)/2,S(5,x),
  S(8,x),S(10,x)],x=-Pi..Pi) ;
```



Doc. 4. *Les graphes de* f *et* $S_5(f)$, $S_8(f)$ *et* $S_{10}(f)$.

On constate que les sommes partielles paraissent « bien approcher » la fonction f sur tout intervalle $[-\pi + \alpha, \pi - \alpha]$ $(0 < \alpha < \pi)$. Mais, sur $[-\pi, -\pi + \alpha]$ et sur $[\pi - \alpha, \pi]$, le comportement est très différent. Les sommes partielles s'éloignent de la fonction f. Il s'agit là du phénomène de Gibbs, qui s'étudie en mathématiques, mais n'est pas à notre programme.

Les sommes partielles de la série de Fourier de f sont :

$$S_p(f)(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin(x) + \sum_{n=1}^{E(p/2)} \frac{-2\cos(2nx)}{\pi(4n^2-1)}$$

où $E(p/2)$ désigne la partie entière de $\frac{p}{2}$ (*doc.* 5).

▶ ***Pour s'entraîner : ex. 3.***

2.3. Une expression de $S_p(f)$ à l'aide d'une intégrale

Déterminons une expression intégrale de $S_p(f)$.
Soit f dans $\mathcal{CM}_{2\pi}$, alors :

$$S_p(f)(x) = \sum_{n=-p}^{p} c_n(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=-p}^{p} f(u)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n(x-u)}\,\mathrm{d}u\right).$$

On pose $D_p(u) = \sum_{n=-p}^{p} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nu}$.

D_p est dans $\mathcal{P}_p$. D_p est appelé le **noyau de Dirichlet**.

$$\forall u \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z} \quad D_p(u) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}pu}\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2p+1)u}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}} = \frac{\sin\left(p+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}}.$$

Et, pour $x = 2k\pi$:

$$D_p(2k\pi) = \sum_{n=-p}^{p} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n2k\pi} = 2p+1 = \lim_{x\to 2k\pi}\frac{\sin\left(p+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Donc, en posant $u - x = v$:

$$S_p(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_p(x-u)f(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi}\int_{-x}^{2\pi-x} D_p(-v)f(v+x)\,\mathrm{d}v$$

D_p est paire et 2π-périodique :

$$S_p(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_p(v)f(v+x)\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\left(p+\frac{1}{2}\right)v}{\sin\frac{v}{2}}f(v+x)\,\mathrm{d}v.$$

Un calcul aisé permet de prouver que, si $f = 1$, alors $S_p(f) = 1$, donc :

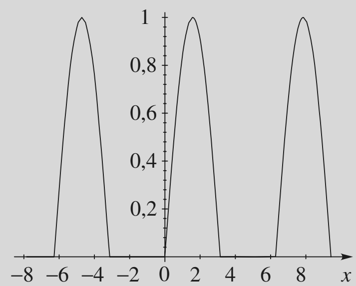
$$1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_p(v)\,\mathrm{d}v.$$

Nous en déduisons :

$$S_p(f)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_p(v)(f(v+x) - f(x))\,\mathrm{d}v.$$

Avec Maple :

```
> restart ;
> f :=x->max(0,sin(x)) ;
> plot(f(x),
  x=-3*Pi..3*Pi) ;
```



Doc. 5.

```
> b1=1/Pi*(int(sin(x)
  *sin(x),x=0..Pi)) ;
  assume(n,integer) ;
> bn:=1/Pi
> an:=1/Pi*simplify
  ((int(cos(n*x)*sin(x),
  x=0..Pi))) ;
> a:=array(0..10) ;seq(a[n]
  =1/Pi*int(cos(n*x)
  *sin(x),x=0..Pi),
  n=0..10) ;assign(") ;
```

Cette formule mesure l'écart entre la fonction f, calculée au point x, et la p-ième somme de sa série de Fourier en ce même point. Elle est le point de départ de différents problèmes concernant la convergence des séries de Fourier.

3 L'espace préhilbertien $\mathcal{C}_{2\pi}$

■ **Position du problème**

Toute fonction f de $\mathcal{CM}_{2\pi}$ admet un développement en série de Fourier. Toutefois, le premier exemple ci-dessous montre que, si la série de Fourier de f converge en un point x, elle ne converge pas nécessairement vers $f(x)$.

Une fonction f de $\mathcal{CM}_{2\pi}$ dont la série de Fourier converge simplement vers la **fonction** f est dite **développable en série de Fourier**.

Or, nous avons défini plusieurs notions de convergence d'une suite de fonctions. Nous allons maintenant étudier différents modes de convergence de la série de Fourier d'une fonction f.

Rapport Centrale, 2001
« Pour beaucoup, étudier les coefficients de Fourier d'une fonction périodique continue les conduit à affirmer qu'elle est « développable en série de Fourier ». »

3.1. Quelques rappels

L'espace vectoriel $\mathcal{C}_{2\pi}$ des fonctions continues, 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$, et à valeurs complexes est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{CM}_{2\pi}$.

L'espace vectoriel préhilbertien $\mathcal{C}_{2\pi}$ est muni du produit scalaire :

$$\forall (f,g) \in \mathcal{C}_{2\pi} \quad (f \mid g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)}g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{a}^{a+2\pi} \overline{f(t)}g(t)\,\mathrm{d}t.$$

et de la norme associée $\|f\|_2 = \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t\right]^{1/2}$.

La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale de $\mathcal{C}_{2\pi}$ et, pour tout n de $\mathbb{Z}$ et toute fonction f de $\mathcal{C}_{2\pi}$, on a :

$$c_n(f) = (e_n \mid f).$$

La famille $\Big((c_n)_{n\in\mathbb{N}}, (s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\Big)$ est orthogonale. Plus précisément :

$(s_n \mid s_k) = (c_n \mid c_k) = 0$ si $n \neq k$, $(c_n \mid s_k) = 0$ pour tout (n,k) de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$;

$(s_n|s_n) = \frac{1}{2}$, $(c_n \mid c_n) = 1$ si $n = 0$, et $\frac{1}{2}$ sinon.

Nous savons aussi que cet espace vectoriel peut également être muni :

de la norme $\|\ \|_1$ définie par :

$$\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

et de la norme $\|\ \|_\infty$ définie par :

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|.$$

Parmi ces trois normes sur $\mathcal{C}_{2\pi}$, aucune n'est équivalente à une autre, comme nous l'avons déjà vu. Mais, pour tout f de $\mathcal{C}_{2\pi}$:

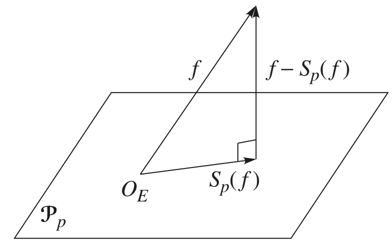
$$\|f\|_1 \leqslant \|f\|_\infty \quad \text{et} \quad \|f\|_2 \leqslant \|f\|_\infty.$$

3.2. Projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel des polynômes trigonométriques $\mathcal{P}_p$

Soit p un entier naturel non nul. L' espace vectoriel $\mathcal{P}_p$ des polynômes trigonométriques engendré par $(e_n)_{n\in[\![-p,p]\!]}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_{2\pi}$, de dimension finie. On peut donc définir la projection orthogonale q sur $\mathcal{P}_p$.

Soit f dans $\mathcal{C}_{2\pi}$. La famille $\{e_n \mid |n| \leqslant p\}$ étant une base orthonormale de $\mathcal{P}_p$, nous avons vu en algèbre bilinéaire que (*doc.* 6) :

$$q(f) = \sum_{n=-p}^{p} (e_n|\, f)e_n = \sum_{n=-p}^{p} c_n(f)e_n = S_p(f).$$



Doc. 6. *Projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel* $\mathcal{P}_p$.

En particulier, l'application :

$$\begin{cases} \mathcal{P}_p \to \mathbb{R}^+ \\ P \mapsto \|\, f - P\|_2 \end{cases}$$

atteint son minimum en un unique vecteur de $\mathcal{P}_p$: $S_p(f)$. On dit aussi que $S_p(f)$ est la meilleure approximation quadratique de f (c'est-à-dire au sens de $\|\ \|_2$), par un élément de $\mathcal{P}_p$.

Nous en déduisons, grâce au *théorème de Pythagore*, puisque $f - q(f)$ et $q(f)$ sont orthogonaux dans l'espace préhilbertien $\mathcal{C}_{2\pi}$, les relations :

- $d(f, \mathcal{P}_p) = \|\, f - S_p(f)\|_2$
- $\forall\, Q \in \mathcal{P}_p \qquad \|\, f - S_p(f)\|_2 \leqslant \|\, f - Q\|_2$
- $\|\, f\|_2^2 = \|S_p(f)\|_2^2 + \|\, f - S_p(f)\|_2^2 = \|S_p(f)\|_2^2 + d(f, \mathcal{P}_p)^2$
- $\|S_p(f)\|_2 \leqslant \|\, f\|_2$.

► ***Pour s'entraîner : ex. 4.***

3.3. Inégalité de Bessel

Calculons $\|S_p(f)\|_2^2$. La base $(e_n)_{-p\leqslant n\leqslant p}$ de $\mathcal{P}_p$ est orthonormale, donc :

$$\begin{aligned} \|S_p(f)\|_2^2 &= \|\sum_{n=-p}^{p} (e_n \mid f)e_n\|_2^2 = \sum_{n=-p}^{p} |c_n(f)|^2 \\ &= |c_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{p}(|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2) \\ &= \left|\frac{a_0(f)}{2}\right|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{p} \left[|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right]. \end{aligned}$$

Friedrich Bessel (1784-1846), astronome allemand.

Or, $\|S_p(f)\|_2^2 \leqslant \|\, f\|_2^2$. Par conséquent, on obtient :

Théorème 2 : Inégalité de Bessel

Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, à valeurs réelles ou complexes :

$$\left|\frac{a_0(f)}{2}\right|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{p} \left[|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right] = \sum_{n=-p}^{p} |c_n(f)|^2 \leqslant \|\, f\|_2^2 .$$

Quelques conséquences importantes de cette inégalité :

- La suite $\left(\sum_{n=-p}^{p} |c_n(f)|^2\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est convergente, car elle est croissante et majorée.

- Les suites $(c_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_{-n}(f))_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers 0.

- Les séries $\sum |a_n(f)|^2$ et $\sum |b_n(f)|^2$, à termes positifs et majorées, convergent.

- Les suites $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ tendent vers 0.

La limite de la suite $\left(\sum_{n=-p}^{p} |c_n(f)|^2\right)_{p\in\mathbb{N}}$ sera notée $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2$.

Nous avons vu que, si f est 2π-périodique, de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ $(k \geqslant 1)$, alors, pour tout n de $\mathbb{Z}$:

$$c_n(f^{(k)}) = (\mathrm{i}\,n)^k c_n(f).$$

Il en découle que si f est 2π-périodique, de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$, alors :

$$c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$$

et :

$$c_{-n}(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right).$$

▶ ***Pour s'entraîner : ex. 5.***

4 Convergence dans l'espace préhilbertien $(\mathcal{C}_{2\pi}, (\ |\ ))$

4.1. Convergence dans l'espace préhilbertien $(\mathcal{C}_{2\pi}, (\ |\ ))$

Théorème 3

Si f est une fonction de $\mathcal{C}_{2\pi}$, alors la suite $(S_p(f))$ converge vers f dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}_{2\pi}, \|\ \|_2)$:

$$\lim_{p\to+\infty} \| f - S_p(f)\|_2 = 0.$$

On dit alors que la série de Fourier d'une fonction f, continue et 2π-périodique converge vers f en moyenne quadratique.

Démonstration

Soit f une fonction de $\mathcal{C}_{2\pi}$. Nous établirons d'abord que la suite $(\| f - S_p(f)\|_2)$ converge, puis que sa limite est nulle.

- Soit p un entier naturel, on sait que $\mathcal{P}_p$ est inclus dans $\mathcal{P}_{p+1}$.

Donc $S_p(f)$ est dans $\mathcal{P}_{p+1}$ et, par conséquent :

$$\| f - S_{p+1}(f)\|_2 \leqslant \| f - S_p(f)\|_2.$$

La suite $(\| f - S_p(f)\|_2)$ est donc décroissante et minorée par 0, elle converge vers L supérieur ou égal à 0.

- Mais, si ε est un réel strictement positif, il existe, d'après le *théorème de Weierstrass* (*cf. chapitre* 4), un polynôme trigonométrique Q, élément de $\mathcal{P}_m$, pour un certain m, tel que :

$$\| f - Q\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

On en déduit : $\| f - S_m(f)\|_2 \leqslant \| f - Q\|_2 \leqslant \| f - Q\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

Et donc que $L \leqslant \varepsilon$.

Ceci étant vrai pour tout ε strictement positif, $L = 0$.

4.2. Formule de Parseval

Théorème 4 : Formule de Parseval

Soit f une application de $\mathcal{C}_{2\pi}$, alors :

$$(\|f\|_2)^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, dt$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2 = \left|\frac{a_0(f)}{2}\right|^2 + \frac{1}{2}\sum_1^{\infty}[|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2].$$

Marc Parseval, (1755-1836), mathématicien français.

Le *théorème de Pythagore* donne, pour toute application f de $\mathcal{C}_{2\pi}$:

$$(\|f\|_2)^2 = (\|S_p(f)\|_2)^2 + (\|f - S_p(f)\|_2)^2$$

La suite $((\|f - S_p(f)\|_2)^2)$ tend vers 0 lorsque p tend vers $+\infty$. Ceci permet de conclure.

▶ ***Pour s'entraîner : ex. 6.***

Rapport Mines-Ponts, 1997

« Pauvre Parseval des Chênes ! Les candidats ont rarement retenu l'orthographe précise de son nom, qui d'ailleurs perd souvent la majuscule des noms propres. Dans leur recherche du Graal de la solution du problème, ils invoquent Perceval, quand ce n'est pas un Parsifal wagnérien. Le goût de l'invocation magique se retrouve tout au long de certaines copies. On lit « par Lebesgue », « par Perceval », quand ce n'est pas « par Fourier » (il s'agit, bien sûr, du Baron Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)*), ou plus simplement « par théorème du cours » (ici, les étudiants se réfèrent généralement à ce qu'ils n'ont pas appris). »*

Rapport École de l'Air, 1998

« Les candidats ayant pensé à appliquer la formule de Parseval à f' sont peu nombreux. »

4.3. Interprétation physique

Si f est une onde, $(\|f\|_2)^2$ est proportionnelle à l'énergie totale.

La formule de Parseval exprime que l'énergie totale est égale à la somme des énergies des composantes harmoniques de l'onde.

Exemple

Soit $f(x) = \sup(0, \sin(x))$. Quelle fraction de l'énergie totale de l'onde est obtenue dès la dixième harmonique ? La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Appliquons-lui la formule de Parseval :

$$\left(\frac{1}{\pi}\right)^2 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \sum_1^{\infty}\left[\frac{-2}{\pi(4n^2-1)}\right]^2\right]$$
$$= (\|f\|_2)^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, dt = \frac{1}{4}.$$

Donc :

$$\sum_1^{\infty}\left[\frac{-2}{\pi(4n^2-1)}\right]^2 = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}.$$

En termes d'énergie, quelle fraction de l'énergie totale est négligée si le signal f est remplacé par sa somme partielle $S_{10}(f)$?

Il faut évaluer le rapport $\dfrac{(\|S_{10}(f)\|_2)^2}{(\|f\|_2)^2}$.

$$\|S_{10}(f)\|_2)^2 = \left(\frac{1}{\pi}\right)^2 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \sum_1^{5}\left[\frac{-2}{\pi(4n^2-1)}\right]^2\right] = 0{,}249\,975.$$

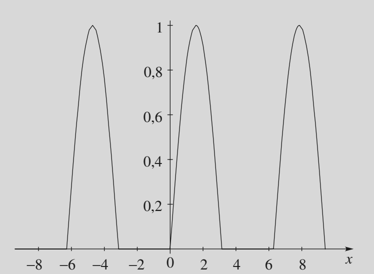
Ainsi :

$$\frac{\|S_{10}(f)\|_2)^2}{(\|f\|_2)^2} = 0{,}999\,899.$$

Une fraction très importante de l'énergie est donc récupérée dès la dixième somme partielle.

Avec Maple

```
> restart :
> f :=x->max(0,sin(x)) ;
> plot(f(x),x=-3*Pi..3*Pi) ;
```



Doc. 7.

4.4. Deux conséquences importantes

Théorème 5

L'application linéaire : $\begin{cases} \mathcal{C}_{2\pi} \to \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \\ f \mapsto \widehat{f} \end{cases}$ est injective.

En conséquence, deux fonctions de $\mathcal{C}_{2\pi}$ qui ont les mêmes coefficients de Fourier sont égales.

Théorème 6

Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{C}_{2\pi}$. Alors, on a :

$$(f|g) = \overline{c_0(f)}\, c_0(g) + \sum_1^{\infty} \left[\overline{c_k(f)}\, c_k(g) + \overline{c_{-k}(f)}\, c_{-k}(g)\right].$$

Cette somme est aussi notée $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{c_n(f)}\, c_n(g)$.

Démonstration

• Calculons $|(f|g) - (S_p(f)|g)| = |(f - S_p(f)|g)| \leqslant \|f - S_p(f)\|_2 \|g\|_2$.
Or, $\|f - S_p(f)\|_2$ tend vers 0, donc :

$$\begin{aligned}(f \mid g) &= \lim_{p\to+\infty} (S_p(f) \mid g) = \lim_{p\to+\infty} \sum_{k=-p}^{p} \overline{c_k(f)}\, c_k(g) \\ &= \overline{c_0(f)}\, c_0(g) + \sum_1^{\infty} \left[\overline{c_k(f)}\, c_k(g) + \overline{c_{-k}(f)}\, c_{-k}(g)\right].\end{aligned}$$

• Ou bien, avec la continuité du produit scalaire :
Soit p dans $\mathbb{N}^*$, alors :

$$\big(S_p(f) \mid S_p(g)\big) = \sum_{k=-p}^{p} \overline{c_k(f)} c_k(g).$$

Donc :

$$(f \mid g) = \lim_{p\to+\infty} \big(S_p(f) \mid S_p(g)\big) = \overline{c_0(f)} c_0(g) + \sum_1^{\infty} \left[\overline{c_k(f)} c_k(g) + \overline{c_{-k}(f)} c_{-k}(g)\right].$$

4.5. Extension au cas des fonctions continues par morceaux

De nombreux résultats établis ci-dessus pour des fonctions continues et 2π-périodiques restent encore valables.
Nous allons justifier brièvement pourquoi.

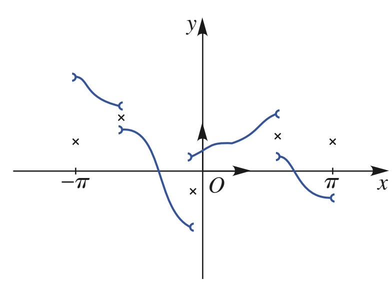
• À tout f de $\mathcal{CM}_{2\pi}$, on peut associer l'application f_r de $\mathcal{CM}_{2\pi}$, définie par :

$$f_r(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2},$$

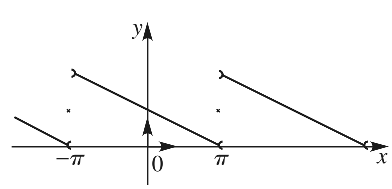
où $f(x^+)$ et $f(x^-)$ désignent respectivement les limites à droite et à gauche de f en x.

En tout point x de continuité de f, $f(x) = f_r(x)$ et, en fait, la définition de l'application f_r associée à f consiste à « régulariser » f en ses points de discontinuité.

f_r est appelé **fonction régularisée** de f.



Doc. 8.



Doc. 9.

• Il est clair que, sur tout segment de $\mathbb{R}$, f et f_r ne diffèrent qu'en un nombre fini de points. Donc, f et f_r ont les mêmes coefficients de Fourier et :

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} |f_r(t)|^2 \, \mathrm{d}t.$$

• On introduit le **sous-espace** $\mathcal{D}_{2\pi}$ de $\mathcal{CM}_{2\pi}$ formé des applications g de $\mathcal{CM}_{2\pi}$ vérifiant, de plus, $g = g_r$. L'application régularisée d'une application f de $\mathcal{CM}_{2\pi}$ appartient à $\mathcal{D}_{2\pi}$. $\mathcal{C}_{2\pi}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}_{2\pi}$.

• L'application $(f, g) \mapsto (f|g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{f(t)}g(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{D}_{2\pi}$ et l'on note encore $\| \ \|_2$ la norme définie par :

$$\|g\|_2 = \sqrt{(g \mid g)}.$$

Le *théorème* concernant l'injectivité de l'application, qui à f associe $\widehat{f}$, n'est pas vrai dans $\mathcal{CM}_{2\pi}$, mais il est exact dans $\mathcal{D}_{2\pi}$.
Deux fonctions distinctes de $\mathcal{CM}_{2\pi}$ peuvent avoir les mêmes coefficients de Fourier.
Il suffit de penser à la fonction caractéristique de $2\pi\mathbb{Z}$, nulle sur $\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$, prenant la valeur 1 sur $2\pi\mathbb{Z}$, pour s'en convaincre. En effet, les coefficients de Fourier de cette fonction sont nuls.

Exemple

Soit f définie par $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ pour tout x de $]-\pi, \pi]$.

$$f_r(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } \ x \in (2\mathbb{Z}+1)\pi \\[2ex] \dfrac{\pi - \left[x - 2\pi \mathrm{E}\left(\dfrac{x+\pi}{2\pi}\right)\right]}{2} & \text{si } \ x \notin (2\mathbb{Z}+1)\pi \end{cases}$$

Rapport Centrale, 2001

« Quant à la convergence en moyenne quadratique, la moitié des candidats dit ne jamais en avoir entendu parler. »

Le *théorème de convergence en moyenne quadratique* est valable dans $\mathcal{D}_{2\pi}$.

Par conséquent, pour toute fonction f de $\mathcal{CM}_{2\pi}$, on a :

$$\lim_{p\to+\infty} \|f_r - S_p(f_r)\|_2 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{p\to+\infty} \|S_p(f_r)\|_2 = \|f_r\|_2.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}(\|f_r\|_2)^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_r(t)|^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f_r)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 \\ &= \left|\frac{a_0(f)}{2}\right|^2 + \frac{1}{2}\sum_1^{+\infty} [|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2].\end{aligned}$$

Donc la *formule de Parseval* est encore valable pour une fonction f de $\mathcal{CM}_{2\pi}$.

• On remarque aussi que les quatre séries numériques :

$$\sum |c_n(f)|^2, \qquad \sum |c_{-n}(f)|^2, \qquad \sum |a_n(f)|^2, \qquad \text{et} \qquad \sum |b_n(f)|^2$$

sont convergentes et que les suites associées : $(c_n(f))$, $(c_{-n}(f))$, $(a_n(f))$, $(b_n(f))$ tendent vers 0.

Exemple

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ sur $]-\pi, \pi]$.

La fonction f_r associée à f diffère de f uniquement aux points de $\pi\mathbb{Z}$, et $f_r(k\pi) = \dfrac{\pi}{2}$.

La fonction f_r est dans l'espace $\mathcal{D}_{2\pi}$ et les résultats précédents s'appliquent.

La *formule de Parseval* donne :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\pi - x}{2}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{3} = \left|\frac{a_0(f)}{2}\right|^2 + \frac{1}{2}\sum_1^\infty [|a_n|^2 + |b_n|^2] = \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}.$$

Et on retrouve le résultat bien connu :

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

► ***Pour s'entraîner : ex. 7.***

5 Convergence ponctuelle

5.1. Un lemme important

Lemme

On considère une série de fonctions de la forme :

$$u_0 + \sum (u_n e^{int} + u_{-n} e^{-int}).$$

Si les séries $\sum |u_n|$ et $\sum |u_{-n}|$ convergent, la série de fonctions converge normalement sur $\mathbb{R}$. On note S la fonction somme. Alors :

- la fonction S est dans $\mathcal{C}_{2\pi}$;
- la série de fonctions est la série de Fourier de sa fonction somme, c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{Z} \quad c_n(S) = u_n$.

On peut aussi écrire la série de fonctions sous la forme :

$$\frac{v_0}{2} + \sum (v_n \cos(nt) + w_n \sin(nt))$$

Si les séries $\sum |v_n|$ et $\sum |w_n|$ convergent, les résultats énoncés restent vrais.
Une telle série de fonctions est appelée série trigonométrique.

Démonstration

L'inégalité $|u_n e^{int} + u_{-n} e^{-int}| \leqslant |u_n| + |u_{-n}|$ entraîne la convergence normale sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions.

Soit S la fonction somme de la série de fonctions et S_p les fonctions sommes partielles de la série.

La convergence de la série de fonctions vers S étant normale et les S_p étant continues, la fonction S est continue. Elle est 2π-périodique et appartient donc à $\mathcal{C}_{2\pi}$. Calculons ses coefficients de Fourier.

$$c_n(S) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t.$$

Rapport Mines-Ponts, 2000

« Seulement un candidat sur deux connaît un énoncé exact permettant de justifier l'égalité entre f et la somme de sa série de Fourier. »

Fixons $k \in \mathbb{Z}$. La série de fonctions $\sum_n f_n(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}$ converge normalement vers la fonction $(t \mapsto S(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt})$. On en déduit :

$$c_k(S) = \frac{1}{2\pi}\left[u_0 \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-k)t}\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+k)t}\,\mathrm{d}t\right]$$

Puis : $c_k(S) = u_k$.

Rapport Centrale, 2001

« Comme dans l'étude des suites de fonctions,représenter graphiquement la fonction que l'on veut décomposer en série de Fourier permet d'en connaître la régularité. »

Exemple

On considère la série de fonctions $\sum \frac{\cos(nx)}{n^2}$.

Pour tout x réel, $\left|\frac{\cos(nx)}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$, donc la série de fonctions converge normalement sur $\mathbb{R}$. Sa somme S est continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.

Le lemme ci-dessus permet d'affirmer que :

$$a_0(S) = 0\,;\ \forall n \geqslant 1 \quad a_n(S) = \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad b_n(S) = 0.$$

Rapport Centrale, 1998.

« Très peu de candidats savent que si une série trigonométrique converge normalement sur $\mathbb{R}$, c'est la série de Fourier de sa somme. »

5.2. Un théorème de convergence normale

Théorème 7

Soit f une fonction continue, 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Alors :

- la série de fonctions $c_0(f) + \sum (c_n(f)e_n + c_{-n}(f)e_{-n})$ converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$;
- la suite de fonctions $(S_p(f))$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$. (*PSI*)

Sous la forme trigonométrique, la série de fonctions s'écrit :

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum (a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt)).$$

Démonstration

- Étudions $\|c_n(f)e_n + c_{-n}(f)e_{-n}\|_\infty$. On a :

$$\|c_n(f)e_n + c_{-n}(f)e_{-n}\|_\infty \leqslant |c_n(f)| + |c_{-n}(f)|, \quad \text{car} \quad \|e_n\|_\infty = 1.$$

- Soit n dans $\mathbb{Z}^*$. Nous avons vu que $c_n(f') = \mathrm{i}nc_n(f)$, donc :

$$|c_n(f)| = \left|\frac{c_n(f')}{n}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n^2} + |c_n(f')|^2\right].$$

Les séries numériques $\sum \frac{1}{n^2}, \sum |c_n(f')|^2$ et $\sum |c_{-n}(f')|^2$ sont convergentes.
Donc, la série de fonctions :

$$c_0(f) + \sum (c_n(f)e_n + c_{-n}(f)e_{-n})$$

converge normalement sur $\mathbb{R}$.
D'après le lemme, la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers g.
g est dans $\mathcal{C}_{2\pi}$ et, pour tout n de $\mathbb{Z}$: $c_n(g) = c_n(f)$.
f et g sont deux fonctions de $\mathcal{C}_{2\pi}$ qui ont les mêmes coefficients de Fourier, donc coïncident.

Corollaire 7.1
Soit f une fonction continue, 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors, pour tout réel x :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{inx} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_1^\infty (a_n(f)\cos nx + b_n(f)\sin nx).$$

▶ ***Pour s'entraîner : ex. 8.***

Exemples

■ La fonction définie par $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ sur $]-\pi, \pi]$ n'est pas continue, on ne peut lui appliquer le théorème. Par ailleurs, les coefficients trigonométriques de f ont été calculés. Vous montrerez que la série de Fourier de f n'est pas normalement convergente.

■ La fonction g définie par $g(x) = \sup(0, \sin(x))$ est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Donc la série de Fourier de g converge normalement vers g. La fonction g est développable en série de Fourier :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \sup(0, \sin(x)) = \frac{1}{\pi} + \frac{\sin x}{2} + \frac{-2}{\pi}\sum_1^\infty \frac{\cos(2nx)}{(4n^2-1)}.$$

En particulier, pour $x = \dfrac{\pi}{2}$, on obtient :

$$1 = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} + \frac{-2}{\pi}\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{(4n^2-1)}, \text{ d'où : } \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{(4n^2-1)} = +\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

5.3. Un théorème de convergence simple

Théorème 8 : Théorème de Dirichlet
Si f est une fonction 2π-périodique, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes, sa série de Fourier converge simplement sur $\mathbb{R}$ et sa somme est la fonction f_r régularisée de f.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{1}{2}[f(x^+)+f(x^-)] = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_1^\infty (a_n(f)\cos(nx)+b_n(f)\sin(nx))$$

En particulier, si f est continue en x, alors :

$$f(x) = f_r(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_1^\infty (a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)).$$

On remarque que les hypothèses sont plus faibles dans ce théorème que dans le précédent, on perd la continuité de f. La convergence, précédemment normale, devient une convergence simple et on retrouve la fonction « régularisée » de f.

Démonstration

• **Première étape : le noyau de Dirichlet**

Soit f dans $\mathcal{CM}_{2\pi}$, alors :

$$S_p(f)(x) = \sum_{n=-p}^{p} c_n(f)e^{inx} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-p}^{p}\left(\int_0^{2\pi} f(u)e^{-inu}\,du\right)e^{inx}.$$

Nous avons établi au § **2.3** que $D_p(u) = \sum_{n=-p}^{p} e^{-inu}$ est dans $\mathcal{P}_p$ et que :

$$S_p(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_p(v)\, f(x+v)\,\mathrm{d}v.$$

Grâce à la parité de D_p et à la périodicité de f et de D_p, on obtient :

$$S_p(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_p(u)\, f(x-u)\,\mathrm{d}u.$$

En prenant la demi-somme de ces deux expressions :

$$S_p(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_p(v)\,\frac{f(x+v)+f(x-v)}{2}\,\mathrm{d}v \qquad \textbf{(1)}$$

- **Deuxième étape : apparition de la régularisée de f et deuxième transformation de l'intégrale**

La régularisée de f est un élément de $\mathcal{CM}_{2\pi}$ et $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_p(v)\,\mathrm{d}v = 1.$

$$\begin{aligned} S_p(f)(x) - f_r(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_p(v)\left(\frac{f(x+v)+f(x-v)}{2} - f_r(x)\right)\mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x-v)+f(x+v)-2f_r(x)}{2\sin\left(\frac{v}{2}\right)}\sin\left(\left(p+\frac{1}{2}\right)v\right)\mathrm{d}v \end{aligned}$$

en remplaçant D_p par son expression calculée (*cf.* **2.3**).

Fixons alors x et définissons, pour tout t de $[-\pi,\pi]\setminus 0$, la fonction g par :

$$g(t) = \frac{f(x-t)+f(x+t)-2f_r(x)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

On peut écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad S_p(f)(x) - f_r(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(v)\sin\left(\left(p+\frac{1}{2}\right)v\right)\mathrm{d}v \qquad \textbf{(2)}$$

- **Troisième étape. Étude de la fonction g**

Sachant que f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, il est clair que g est continue par morceaux sur $[-\pi, 0[$ et sur $]0,\pi]$.

Étudions la fonction g à droite en 0.

f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, donc f' admet une limite à droite en x, $f'(x^+) = \lim_{t\to 0^+} f'(x+t)$, et une limite à gauche en x, $f'(x^-) = \lim_{t\to 0^-} f'(x+t)$. On peut donc écrire, pour $t>0$:

$$f(x+t) = f(x^+) + t\, f'(x^+) + t\varepsilon_1(t), \quad \text{avec} \quad \lim_{t\to 0^+}\varepsilon_1(t) = 0$$

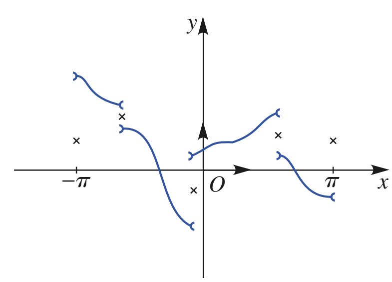
$$f(x-t) = f(x^-) - t\, f'(x^-) - t\varepsilon_2(t), \quad \text{avec} \quad \lim_{t\to 0^+}\varepsilon_2(t) = 0.$$

Et donc, pour $t>0$:

$$g(t) = \frac{f(x-t)+f(x+t)-2f_r(x)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{t\left(f'(x^+) - f'(x^-) + \varepsilon_1(t) - \varepsilon_2(t)\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

Or $\lim_{t\to 0^+}\frac{t}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = 1$, donc $\lim_{t\to 0^+} g(t) = f'(x^+) - f'(x^-)$.

Gustav Dirichlet (1805-1859), mathématicien allemand, élève de Gauss.
En arithmétique, il montre que toute suite arithmétique $(an+b)$, où a et b sont premiers entre eux, contient une infinité de nombre premiers.
En analyse, il énonce et démontre le théorème qui porte son nom. On attribue à Dirichlet le célèbre principe des tiroirs. Lorsque $n+1$ objets sont rangés dans n tiroirs, deux objets au moins se retrouvent dans le même tiroir. En utilisant ce principe, pouvez-vous établir que, si sept points sont disposés à l'intérieur d'un cercle, deux au moins sont à une distance inférieure au rayon R.
Reformuler ce principe en termes de cardinal d'ensemble et d'application.



Doc. 10.

Rapport X-ESPCI, 2000

« Les hypothèses du théorème de Dirichlet posent, et cela est nouveau, des problèmes. »

Rapport Centrale, 2001

« Il reste encore des candidats ignorant les hypothèses exactes de ce théorème. »

g admet une limite à droite en 0 et, de même, g admet une limite à gauche en 0.
g est donc continue par morceaux sur $[-\pi, \pi]$.

- **Quatrième étape. La conclusion**

Appliquons le lemme de Lebesgue à la relation **(2)** :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{p \to +\infty} S_p(f)(x) = f_r(x).$$

Exemple

La fonction 2π-périodique définie sur $]-\pi, \pi]$ par :

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}$$

n'est pas continue, mais est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. On peut lui appliquer le théorème de Dirichlet :

$$\forall x \in]-\pi, \pi[\quad f(x) = \frac{\pi - x}{2} = \frac{\pi}{2} + \sum_1^\infty (-1)^n \frac{\sin(nx)}{n}$$

$$\forall x \in \pi\mathbb{Z} \quad f_r(x) = \frac{\pi}{2}.$$

La série de Fourier de f converge simplement vers f. La valeur $x = \frac{\pi}{2}$ permet de prouver la formule :

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

▶ ***Pour s'entraîner : ex. 9.***

Rapport ENS, 1997

« La théorie des séries de Fourier est bien connue. Les théorèmes fondamentaux (inégalité de Bessel, convergence uniforme dans le cas d'une fonction continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux) sont appliqués judicieusement. En revanche, les candidats doivent prendre garde au fait que le théorème de Dirichlet donne une convergence simple, ce qui est rarement suffisant pour effectuer des interversions avec des intégrales par exemple ! De plus, les candidats parviennent à se servir de la décomposition en série de Fourier pour étudier des équations aux dérivées partielles ou différentielles ordinaires. »

Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, c un réel, g une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$ continue par morceaux sur $[a, b]$. Alors :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b g(t) \sin((n+c)t) \, \mathrm{d}t = 0.$$

Ce résultat, le *lemme de Lebesgue*, a été rencontré en Première année dans une *application.*

6 Cas des fonctions T-périodiques

$\mathcal{CM}_T$ désigne l'espace vectoriel des **fonctions T-périodiques**, continues par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

- On définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ par $e_n(t) = \exp\left(\mathrm{i}\, n \frac{2\pi}{T} t\right)$.

- On définit les coefficients de Fourier d'une fonction f de $\mathcal{CM}_T$ par :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad c_n(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, n(2\pi/T)t} \, \mathrm{d}t$$

et les coefficients trigonométriques de f par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) \mathrm{d}t$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad b_n(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) \mathrm{d}t.$$

- On remarque que :

École de l'Air, 1998

« ...Appliquer les bonnes formules, à savoir ici pour une fonction 2-périodique. Il semble que certains candidats aient éprouvé des difficultés sur ce point précisément en s'embrouillant dans le changement de variable. »

- $c_0(f) = \dfrac{a_0(f)}{2}$ est toujours la valeur moyenne de f sur une période ;
- les formules liant $a_n(f), b_n(f)$ et $c_n(f)$ restent inchangées :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad c_n(f) = \frac{a_n(f) - \mathrm{i}\, b_n(f)}{2} \; ; \; c_{-n}(f) = \frac{a_n(f) + \mathrm{i}\, b_n(f)}{2}$$

$$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) \; ; \; b_n(f) = \mathrm{i}\,(c_n(f) - c_{-n}(f)).$$

Rapport Centrale, 2001

« Les énoncés de théorèmes sont trop souvent donnés de manière très approximative (Parseval...) »

■ Les sommes partielles de la série de Fourier de f sont :

$$S_p(f) = \sum_{n=-p}^{p} c_n(f) e_n, \quad \text{où } p \text{ est dans } \mathbb{N}$$

$\forall p \in \mathbb{N} \;\; \forall t \in \mathbb{R}$

$$S_p(f)(t) = \sum_{n=-p}^{p} c_n(f) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, n(2\pi/T)t}$$

$$= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{p} \left[a_n(f) \cos(n\frac{2\pi}{T}t) + b_n(f) \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) \right].$$

■ La formule de Parseval reste valable pour les fonctions continues par morceaux et T-périodiques :

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2 = \left|\frac{a_0(f)}{2}\right|^2 + \frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty} [|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2]$$

Elle se justifie de la même manière que pour des fonctions 2π-périodiques et continues par morceaux sur $\mathbb{R}$.

■ Les théorèmes de convergence ponctuelle s'appliquent également :

- si f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, la série de Fourier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$;
- si f est seulement $\mathcal{C}^1$ par morceaux, la série de Fourier de f converge simplement vers la fonction f_r définie par :

$$f_r(x) = \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)].$$

► ***Pour s'entraîner : ex. 10.***

Application 1

La fonction $f(x) = x - \mathrm{E}(x)$

1) *Calculer ses coefficients de Fourier.*

2) *Quels théorèmes de convergence peut-on lui appliquer ?*

1) La fonction f est 1-périodique, elle n'appartient pas à $\mathcal{D}_1$, mais elle est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et même $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ (*doc.* 11).

Calculons ses coefficients trigonométriques.

$$a_n(f) = 2\int_0^1 t\cos(n2\pi t)\,\mathrm{d}t.$$

Donc, $a_0(f) = 1$ et, pour $n \geqslant 1$, $a_n(f) = 0$.
Quant aux b_n :

$$b_n(f) = 2\int_0^1 t\sin(n2\pi t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\pi n}.$$

La série de Fourier de f est donc la série de fonctions :

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum \frac{\sin(2\pi n x)}{n}.$$

2) La formule de Parseval s'applique et :

$$\int_0^1 t^2 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_1^{\infty}\frac{1}{(\pi n)^2}.$$

Elle permet de retrouver : $\displaystyle\sum_1^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Le théorème de convergence simple de Dirichlet s'applique (*doc.* 12) :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z} \quad f_r(x) = f(x) = x - \mathrm{E}(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}\frac{\sin(2\pi n x)}{n}$$

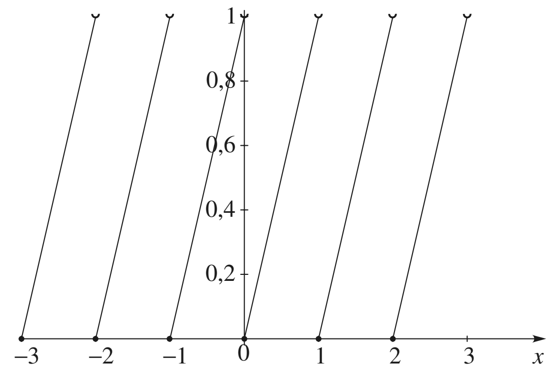
$$\forall x \in \mathbb{Z} \quad f_r(x) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}\frac{\sin(2\pi n x)}{n}.$$

Pour $x = \dfrac{1}{4}$, on obtient :

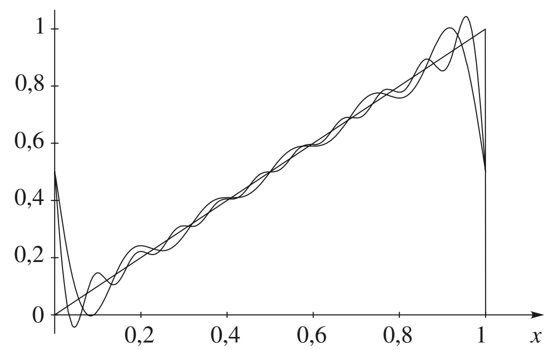
$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{n}.$$

Soit : $\displaystyle\frac{\pi}{4} = \sum_1^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{n} = \sum_0^{\infty}\frac{\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}}{2k+1}$.

Et, donc : $\displaystyle\frac{\pi}{4} = \sum_0^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$.



Doc. 11.



Doc. 12.

TD

Transformée de Fourier de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch} t}$

(*D'après CCP, 1995*)

Soit f une fonction donnée, continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. On appelle transformée de Fourier de f, la fonction F qui associe, à tout réel x, l'intégrale :

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t.$$

Partie I : Développement en série de Fourier d'une fonction

Soit t un réel quelconque donné. On désignera par f_t la fonction définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, impaire, telle que, sur $]0,\pi[$, $f_t(x) = \operatorname{ch}(tx)$.

1)a) Montrer que, pour tout entier k, $f_t(k\pi) = 0$.

b) Construire, pour $t = 0{,}5$, la courbe représentative de la restriction de $f_{0,5}$ à l'intervalle $[-2\pi, +2\pi]$.

2) Calculer les coefficients de Fourier de la fonction f_t.

3)a) En précisant le théorème utilisé, dont on vérifiera soigneusement les hypothèses dans le cas présent, donner la valeur de la somme de la série $\displaystyle\sum_1^{\infty} b_n(f_t)\sin nx$ pour tout x de $[-\pi,\pi]$.

b) Déduire, du résultat précédent, une expression de $\operatorname{ch}\left(t\dfrac{\pi}{2}\right)$ de la forme :

$$\operatorname{ch}\left(t\frac{\pi}{2}\right) = \sum_0^{\infty} U_p(t)(-1)^p$$

où U_p est rationnel par rapport à l'indice p.

4)a) En utilisant les résultats précédents, montrer que $\dfrac{1}{\operatorname{ch}\left(t\dfrac{\pi}{2}\right)}$ s'exprime simplement à l'aide de la somme de la série alternée $\displaystyle\sum \frac{(-1)^p(2p+1)}{(2p+1)^2+t^2}$.

(On exprimera $1\ +\operatorname{ch}(\pi t)$ en fonction de $\operatorname{ch}\left(t\dfrac{\pi}{2}\right)$.)

b) En déduire une expression de $\dfrac{\pi}{4}$ comme somme d'une série numérique.

Partie II : Calcul de la transformée de Fourier

1) Montrer que la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch} t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et exprimer la transformée de Fourier de f en fonction de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch} t}\,\mathrm{d}t$.

2)a) Montrer qu'il existe une suite (α_p) de réels telle que, pour tout x :

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch} t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \sum_0^{\infty} \alpha_p \cos(xt)\mathrm{e}^{-(2p+1)t}\,\mathrm{d}t.$$

b) Terminer alors soigneusement la détermination de la fonction F.

3) Quelle remarque peut-on faire sur la transformée de Fourier de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch}\left(t\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\right)}$?

Exercices

1 Soit a un complexe. On considère la fonction f, 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, définie sur $]-\pi, \pi]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{si } x \in]-\pi, \pi[\\ \mathrm{ch}\,(\pi a) & \text{si } x = \pi \end{cases}$$

où $\mathrm{ch}\,(z) = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$ et $\mathrm{sh}\,(z) = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$ pour un complexe z quelconque.

Déterminer les coefficients de Fourier de f.

2 Déterminer les coefficients trigonométriques de la fonction f, 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, définie sur $]-\pi, \pi]$ par :

$$f(x) = \mathrm{ch}\,(ax)$$

dans les deux cas suivants :

1) $a \in i\mathbb{Z}$;

2) $a \in \mathbb{R}^{+*}$.

3 Déterminer la série de Fourier des fonctions f des *exercices* 1 et 2.

4 Déterminer $\inf\{\|f - Q\|_2 ; Q \in \mathcal{P}_n\}$ pour la fonction de l'*exercice* 1.

5 La série trigonométrique $\sum \dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ est-elle la série de Fourier d'une fonction de $\mathcal{CM}_{2\pi}$?

6 Peut-on appliquer la formule de Parseval aux fonctions rencontrées dans les *exercices* 1 et 2 ?

Pour chacune de ces fonctions, quelles égalités obtient-on ?

Quelles égalités remarquables en déduit-on ?

7 La formule de Parseval s'applique-t-elle à d'autres fonctions parmi celles introduites dans les *exercices* 1 et 2 ? Si oui, écrire les égalités obtenues dans chaque cas.

Quelles égalités remarquables en déduit-on ?

8 Parmi les fonctions étudiées dans les *exercices* 1 et 2, auxquelles peut-on appliquer le *théorème de convergence normale* ?

Écrire dans chaque cas l'égalité obtenue.

Quelles égalités remarquables en déduit-on ?

9 Parmi les fonctions étudiées dans les *exercices* 1 et 2, auxquelles s'applique le seul *théorème de convergence simple* ?

Écrire dans chaque cas l'égalité obtenue.

Quelles égalités remarquables en déduit-on ?

10 **1)** Déterminer les coefficients trigonométriques de la fonction T-périodique f définie par :

$$f(x) = \left|\sin\left(\frac{\pi}{T}x\right)\right|.$$

2) Quels théorèmes de convergence peut-on appliquer à la série de Fourier de f ?

11* Soit (α_n) une suite de nombres strictement positifs qui converge vers 0.

Montrer qu'il existe une fonction continue 2π-périodique, f, dont les coefficients trigonométriques, $a_n(f)$ et $b_n(f)$, vérifient pour une infinité de valeurs de n :

$$|a_n(f)| + |b_n(f)| \geqslant \alpha_n.$$

12 On définit les fonctions T-périodiques et paires f et g en posant :

$$\forall x \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \quad f(x) = x^4, \quad g(x) = x^2.$$

1) Déterminer les coefficients trigonométriques de f et de g.

2) En déduire deux constantes c_0 et d_0 et une fonction h, combinaison linéaire de f et g, telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) = c_0 + d_0 \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{T^4}{n^4} \cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right).$$

3) Calculer $\displaystyle\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^8}$.

13 Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes, 2π-périodique, d'intégrale nulle sur une période.

Montrer l'inégalité $\displaystyle\int_0^{2\pi} |f|^2 \leqslant \int_0^{2\pi} |f'|^2$.

Préciser les cas d'égalité.

14 Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' + y = |\sin(x)| \qquad (E)$$

15* Donner le développement en série de Fourier de la fonction :

$$f : x \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch} a + \cos x} \quad \text{où } (a > 0).$$

En déduire les intégrales :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nx)}{\operatorname{ch} a + \cos x}\, \mathrm{d}x.$$

16* Déterminer toutes les applications f, $\mathcal{C}^\infty$, 2π-périodiques et telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(2x) = 2\sin x\ f'(x).$$

17* (*D'après X, 1993*)

Soit $T > 0$, λ un complexe non nul et E_λ l'espace vectoriel des fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, T-périodiques et vérifiant la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+1) - f(x-1) = \lambda\ f'(x).$$

Montrer que la dimension de E_λ est finie et qu'elle est égale à 1 si $|\lambda|$ est supérieur ou égal à un nombre que l'on précisera, ou si λ n'est pas réel.

Calcul différentiel

10

Introduction

Le but de ce chapitre est de développer, d'un point de vue purement pratique, les outils de l'analyse vectorielle (champs de scalaires et de vecteurs, intégrales multiples, formes différentielles, systèmes différentiels autonomes), ainsi que le théorème de Cauchy-Lipschitz concernant les équations différentielles non linéaires.

Il n'est pas question ici d'aborder les théories sur lesquelles s'appuient ces notions mais il est fort intéressant de constater que presque toutes les parties du cours de mathématiques que vous avez suivi avec passion cette année interviennent dans ce chapitre.

De nombreux exemples sont développés afin d'illustrer ces notions.

OBJECTIFS

- Champ de scalaires, champ de vecteurs.
- Gradient d'un champ de scalaires.
- Circulation d'un champ de vecteurs.
- Formes différentielles de degré 1 (*PSI*).
- Intégrales doubles et triples.
- Le théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations différentielles non linéaires.
- Équations différentielles à variables séparables.
- Le cas des équations autonomes.

Champs de vecteurs, champs de scalaires

Dans ce paragraphe, U est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$ et k un entier naturel, $(\,|\,)$ désigne le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^p$.
Dans la pratique, on se limitera à $p = 2$ ou $p = 3$.

1.1. Définitions

Un **champ de vecteurs** de classe $\mathcal{C}^k$ sur U est une application $\overrightarrow{f}$ de U dans $\mathbb{R}^p$, de classe $\mathcal{C}^k$ sur U.

Un **champ de scalaires** de classe $\mathcal{C}^k$ sur U est une application g de U dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^k$ sur U.

Soit $\overrightarrow{f}$ un champ de vecteurs sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$. C'est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, on peut donc parler des **fonctions composantes** du champ de vecteurs $\overrightarrow{f}$. Ce sont les fonctions de U dans $\mathbb{R}$, $f_1, \ldots, f_p$, telles que, pour tout x de U,

$$\overrightarrow{f}(x) = (f_1(x), \ldots, f_p(x)).$$

1.2. Gradient d'un champ de scalaires

Le gradient d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}$ a été défini au chapitre précédent. Il fournit un exemple fondamental de champ de vecteurs.

Soit un entier $k \geqslant 1$ et un champ de scalaires g de classe $\mathcal{C}^k$ sur U, alors $\overrightarrow{\text{grad}}\, g$ est un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur U.

On rappelle que $\overrightarrow{\text{grad}}\, g(a)$ est l'unique vecteur de $\mathbb{R}^p$ tel que :

$$\forall \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^p \quad \mathrm{d}\, g(a)(\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{\text{grad}}\, g(a) \mid \overrightarrow{v}).$$

Pour tout a de U :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, g(a) = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial g}{\partial x_p}(a)\right).$$

Donc, si g est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U, $\overrightarrow{\text{grad}}\, g$ est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$.

1.3. Circulation d'un champ de vecteurs (*PC*)

Soit $\overrightarrow{f}$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^p$ et $f_1, \ldots, f_p$ ses fonctions composantes.

Soit $([a,b], \gamma, \Gamma)$ un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$ dont le support Γ est inclus dans U. On note, pour tout t de $[a,b]$, $\gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_p(t))$.

L'intégrale du champ de vecteurs $\overrightarrow{f}$ le long de l'arc orienté $\overset{\frown}{\Gamma}$ est la quantité :

$$\int_{\overset{\frown}{\Gamma}} \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}x} = \int_a^b \left[\sum_{i=1}^p f_i(x_1(t), \ldots, x_p(t)) x_i'(t)\right] \mathrm{d}t.$$

En physique, cette quantité représente la circulation du champ de vecteur $\overrightarrow{V}$ le long de l'arc orienté $\overset{\frown}{\Gamma}$.

Par exemple, la circulation d'un champ de forces $\overrightarrow{V}$ le long d'un arc allant du point A au point B représente le travail de cette force le long de cet arc.

► *Pour s'entraîner : ex. 1.*

2 Formes différentielles (*PSI*)

On désigne par U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$.

2.1. Définitions

2.1.1 Forme différentielle

On appelle **forme différentielle** de degré 1 sur U toute application ω de U dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$.

Dans cet ouvrage, nous étudions uniquement les formes différentielles de degré 1. Par conséquent, nous parlerons simplement de forme différentielle plutôt que de forme différentielle de degré 1.

Exemple fondamental

Soit f une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

Pour tout a de U, la différentielle de f en a, $\mathrm{d}f(a)$, est une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$. Ainsi, l'application $\mathrm{d}f$ définie par :

$$\mathrm{d}\,f : \begin{cases} U \longrightarrow \mathcal{L}\,(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}) \\ a \longmapsto \mathrm{d}\,f(a) \end{cases}$$

est une forme différentielle sur U.

2.1.2 Base duale

La base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^p$ est notée $(\mathrm{d}x_1, \dots, \mathrm{d}x_p)$. Toute forme linéaire φ sur $\mathbb{R}^p$ se décompose, de manière unique, sous la forme :

$$\varphi = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \,\mathrm{d}x_i$$

où $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$. Avec cette notation, pour $h = (h_1, \dots, h_p)$ dans $\mathbb{R}^p$:

$$\varphi(h) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \,\mathrm{d}x_i(h_1, \dots, h_p) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i h_i .$$

2.1.3 Fonctions composantes d'une forme différentielle

Soit ω une forme différentielle sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^p$.

Pour tout a de U, $\omega(a)$ se décompose selon la base $(\mathrm{d}x_1, \dots, \mathrm{d}x_p)$ de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$. Il existe un unique p-uplet de réels $(P_1(a), \dots, P_p(a))$ tel que :

$$\omega(a) = \sum_{i=1}^{p} P_i(a)\,\mathrm{d}x_i .$$

On définit ainsi les fonctions composantes $(P_1, \dots, P_p)$ de ω.

Pour chaque i de $[\![1, p]\!]$, P_i est une application de U dans $\mathbb{R}$. On note :

$$\omega = \sum_{i=1}^{p} P_i \,\mathrm{d}x_i .$$

Soit un entier naturel k.

La forme différentielle $\omega = \sum_{i=1}^{p} P_i \,\mathrm{d}x_i$ est dite de classe $\mathcal{C}^k$ sur U si :

$$\forall i \in [\![1, p]\!] \qquad P_i \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}).$$

Exemple

Soit un entier $k \geqslant 1$ et une application f de classe $\mathcal{C}^k$ de U dans $\mathbb{R}$. La forme différentielle $\mathrm{d} f$, vue au **2.1.1**, est telle que :

$$\forall a \in U \qquad \mathrm{d} f(a) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \,\mathrm{d} x_i.$$

Ses fonctions composantes sont donc les fonctions dérivées partielles de f et :

$$\mathrm{d} f = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i} \,\mathrm{d} x_i.$$

On en déduit que $\mathrm{d} f$ est une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur U.

La **forme différentielle** ω, définie sur l'ouvert non vide U de $\mathbb{R}^p$ est dite **exacte** sur U si :

$$\exists f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}) \quad \forall a \in U \qquad \omega(a) = \mathrm{d} f(a).$$

Ceci équivaut à dire que :

$$\exists f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}) \qquad \omega = \mathrm{d} f.$$

On dit alors que la fonction f est une primitive de ω sur l'ouvert U.

2.2. Intégrale curviligne d'une forme différentielle

Soit $\omega = \sum_{i=1}^{p} P_i \,\mathrm{d} x_i$ une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^k$ sur U (avec $k \geqslant 0$).

Soit $([a, b], \gamma, \Gamma)$ une courbe de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^p$ dont le support Γ est inclus dans U.

On pose $[a, b] = I$ et, pour tout t de I, on note $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_p(t))$.

2.2.1 Petit exercice de compréhension

- ω est une forme différentielle sur U.
- Pour tout t de $I, \gamma(t)$ est un point de U et $\omega(\gamma(t))$ une forme linéaire sur $\mathbb{R}^p$.
- Pour tout t de $I, \gamma'(t)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^p$ et $\omega(\gamma(t))(\gamma'(t))$ est un réel. De plus :

$$\omega(\gamma(t))(\gamma'(t)) = \sum_{i=1}^{p} P_i(\gamma(t))\gamma_i'(t).$$

- Enfin, la fonction $t \longmapsto \omega(\gamma(t))(\gamma'(t))$ est continue sur I.

L'**intégrale curviligne** de la forme différentielle ω le long de la courbe $([a, b], \gamma, \Gamma)$ est le réel :

$$\int_a^b \omega(\gamma(t))(\gamma'(t)) \,\mathrm{d} t = \int_a^b \left[\sum_{i=1}^{p} P_i(\gamma_1(t), \ldots, \gamma_p(t))\gamma_i'(t) \right] \mathrm{d} t.$$

La relation de Chasles pour les intégrales permet de définir l'intégrale curviligne d'une forme différentielle le long d'une courbe continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

On note provisoirement cette quantité $\displaystyle\int_{(I,\gamma,\Gamma)} \omega$.

A priori, elle dépend du paramétrage $([a, b], \gamma)$ de la courbe. Le théorème suivant montre que l'intégrale curviligne $\displaystyle\int_{(I,\gamma,\Gamma)} \omega$ dépend seulement du sens de parcours du support Γ.

2.2.2 Changement de paramètre

Théorème 1

Soit φ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $J = [c,d]$ dans $I = [a,b]$.

- Si φ est croissante, alors $\displaystyle\int_{(I,\gamma,\Gamma)} \omega = \int_{(J,\gamma o\varphi,\Gamma)} \omega.$
- Si φ est décroissante, alors $\displaystyle\int_{(I,\gamma,\Gamma)} \omega = -\int_{(J,\gamma o\varphi,\Gamma)} \omega.$

$([a,b],\gamma)$ et $([c,d],\gamma\circ\varphi)$ sont deux paramétrages de la courbe étudiée.

Démonstration

$$\int_{(J,\gamma o\varphi,\Gamma)} \omega = \int_c^d \omega(\gamma\circ\varphi(u))(\gamma\circ\varphi)'(u)\,\mathrm{d}u$$
$$= \int_c^d \left[\sum_{i=1}^p P_i(\gamma_1(\varphi(u)),\ldots,\gamma_p(\varphi(u)))\gamma_i'(\varphi(u))\right]\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

Le changement de variable $t = \varphi(u)$ s'impose. Il donne $\mathrm{d}t = \varphi'(u)\,\mathrm{d}u$.

- Si φ est croissante, $\varphi(c) = a$ et $\varphi(d) = b$. D'où (*doc.* 1) :

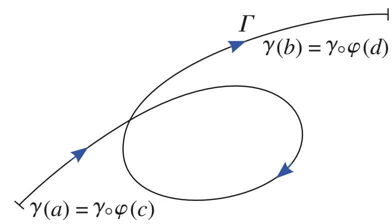
$$\int_{(J,\gamma o\varphi,\Gamma)} \omega = \int_a^b \left[\sum_{i=1}^p P_i(\gamma_1(t),\ldots,\gamma_p(t))\gamma_i'(t)\right]\mathrm{d}t.$$

- Si φ est décroissante, les bornes sont inversées et (*doc.* 2) :

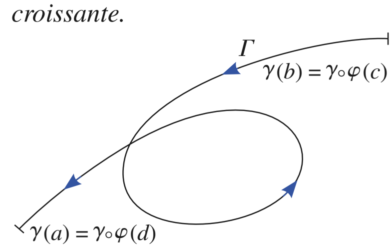
$$\int_{(J,\gamma o\varphi,\Gamma)} \omega = -\int_{(I,\gamma,\Gamma)} \omega.$$

Ainsi, l'intégrale curviligne de la forme différentielle ω le long d'une courbe ne dépend pas du paramétrage de l'arc, mais seulement du sens de parcours de cette courbe. C'est pourquoi on la note souvent :

$$\int_{\widehat{\Gamma}} \omega.$$



Doc. 1. *Parcours de l'arc Γ paramétré par $\gamma\circ\varphi$ lorsque φ est croissante.*



Doc. 2. *Parcours de l'arc Γ paramétré par $\gamma\circ\varphi$ lorsque φ est décroissante.*

Exemple

Soit ω la forme différentielle définie sur l'ouvert $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ par :

$$\omega = \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}.$$

On a $\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$, avec $P(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$ et $Q(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$.

On considère le cercle C de centre O et de rayon R, paramétré par :

$$\gamma : \begin{cases} [0,2\pi] \longrightarrow C \\ \quad t \quad\longmapsto (x(t),y(t)) = (R\cos t, R\sin t) \end{cases}$$

ω est de classe $\mathcal{C}^1$ et, par définition de l'intégrale curviligne :

$$\int_{\widehat{C}} \omega = \int_0^{2\pi} [P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)]\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{2\pi} [\sin^2(t) + \cos^2(t)]\,\mathrm{d}t = 2\pi.$$

On remarque que :
- le résultat ne dépend pas de R ;
- en prenant $t \in [0,2n\pi]$, ce qui équivaut à parcourir le cercle n fois dans le sens direct, on obtient $2n\pi$ pour la valeur de l'intégrale curviligne de ω ;
- le paramétrage :
  $t \longmapsto (R\cos t, -R\sin t)$,
  qui correspond à un parcours du cercle dans le sens indirect, donne une intégrale curviligne négative.

► ***Pour s'entraîner : ex. 1.***

2.3. Le cas des formes différentielles exactes

Théorème 2

Soit ω une forme différentielle exacte sur U, f une primitive de ω sur U et deux points A et B de U. Pour toute courbe paramétrée $([a,b],\gamma,\Gamma)$ de classe $\mathcal{C}^1$, de support inclus dans U, d'origine $A=\gamma(a)$ et d'extrémité $B=\gamma(b)$, on a :

$$\int_{\widehat{\Gamma}} \omega = \int_{\widehat{\Gamma}} \mathrm{d}\, f = f(B) - f(A).$$

On peut dire en résumé que l'intégrale curviligne d'une forme différentielle exacte le long d'une courbe ne dépend que de l'origine et de l'extrémité de la courbe et non pas du chemin parcouru pour joindre ces points.

Le résultat du *théorème* 2 peut être abrégé en écrivant simplement :

$$\int_{\widehat{AB}} \mathrm{d}\, f = f(B) - f(A).$$

Démonstration

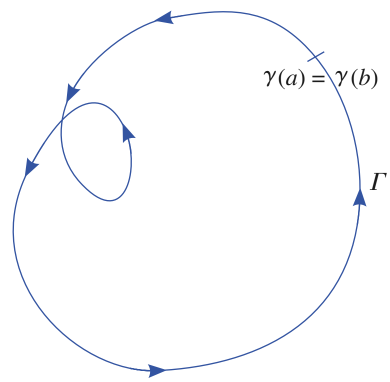
On note $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_p(t))$. Puisque $\omega = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}\, x_i$, on a :

$$\int_{\widehat{\Gamma}} \omega = \int_a^b \left[\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t))\gamma_i'(t)\right] \mathrm{d}\, t.$$

On sait aussi que : $\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t))\gamma_i'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}(f \circ \gamma)(t)$.

Donc : $\int_{\widehat{\Gamma}} \omega = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}(f\circ\gamma)(t)\,\mathrm{d}\, t = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = f(B) - f(A)$.

Une courbe paramétrée $([a,b],\gamma,\Gamma)$ est dite fermée lorsque $\gamma(a) = \gamma(b)$.



Doc. 3.

Corollaire 2.1

L'intégrale curviligne d'une forme différentielle exacte sur U, le long d'une courbe fermée de classe $\mathcal{C}^1$ de support contenu dans U, est nulle.

Ce *corollaire* reste vrai pour une courbe fermée, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, de support contenu dans U.

Exemple

Reprenons l'exemple du paragraphe précédent :

$$\omega = \frac{x\,\mathrm{d}\, y - y\,\mathrm{d}\, x}{x^2+y^2}.$$

- Le cercle C est une courbe fermée de l'ouvert $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,\ 0)\}$.
- La forme différentielle ω est de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet ouvert.
- L'intégrale curviligne de ω le long de C n'est pas nulle car :

$$\int_{\widehat{C}} \omega = 2\pi.$$

Donc, la forme différentielle ω n'est pas exacte sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,\ 0)\}$.

2.4. Formes différentielles fermées, le théorème de Poincaré

Le paragraphe précédent nous montre que le calcul d'une intégrale curviligne se simplifie lorsque la forme différentielle est exacte.

Mais comment déterminer si une forme différentielle est exacte ?

Soit $\omega = \sum_{i=1}^{p} P_i \, \mathrm{d}x_i$ une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert non vide U de $\mathbb{R}^p$. On dit que ω est une **forme différentielle fermée** sur U si :

$$\forall a \in U \quad \forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2 \qquad \frac{\partial P_i}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}(a).$$

Henri Poincaré (1854-1912), mathématicien français : Ses travaux dans de nombreux domaines des mathématiques pures et appliquées permettent de le qualifier de mathématicien universel. Hilbert et lui en sont sans doute les derniers spécimens.
Co-découvreur de la théorie de la relativité restreinte, nous devons à Poincaré cette phrase prémonitoire, datée de 1904 : « Peut-être [allons nous devoir] construire une mécanique nouvelle que nous ne faisons qu'entrevoir, où, l'inertie croissant avec la vitesse de la lumière deviendrait un obstacle infranchissable. »

Théorème 3

Soit $\omega = \sum_{i=1}^{p} P_i \, \mathrm{d}x_i$ une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert non vide U de $\mathbb{R}^p$.

Si ω est une forme exacte sur U, alors ω est fermée sur U.

Démonstration

On suppose ω exacte sur U. Soit f une primitive de ω sur U.

$$\omega = \sum_{i=1}^{p} P_i \, \mathrm{d}x_i = \mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i$$

Puisque ω est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, f est de classe $\mathcal{C}^2$ et :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2 \qquad \frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}.$$

La réciproque de ce *théorème* n'est pas vraie en général, comme le montre l'exemple ci-dessous. Poincaré a su prouver cette réciproque, moyennant une restriction géométrique sur l'ouvert U.

Exemple

Considérons à nouveau la forme :

$$\omega = \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2 + y^2}.$$

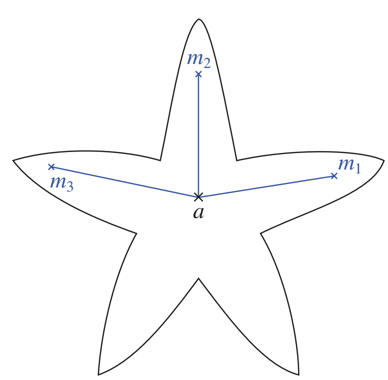
- Elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,\ 0)\}$.
- Ce n'est pas une forme exacte sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,\ 0)\}$ car son intégrale curviligne sur un cercle de centre (0, 0) n'est pas nulle.
- C'est une forme fermée sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,\ 0)\}$.

En effet, notons $\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$. Pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,\ 0)\}$:

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y).$$

La restriction géométrique utilisée par Poincaré est la suivante.

Un **ouvert** non vide U de $\mathbb{R}^p$ est dit **étoilé** s'il existe un point a de U tel que, pour tout point m de U, le segment $[a, m]$ soit contenu dans U (*doc.* 4).



Doc. 4.

Exemples

- Tout ouvert convexe de $\mathbb{R}^p$ est étoilé.
- Toute boule ouverte de $\mathbb{R}^p$ est un ouvert étoilé.
- $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) | x \leqslant 0\}$ est un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$.
- $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ n'est pas étoilé.

Théorème de Poincaré
Soit U un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^p$. Toute forme différentielle fermée sur U est exacte sur U.

Démonstration

Soit ω une forme différentielle fermée sur U.

• **Idée clé n° 1**

Soit a un point de l'ouvert étoilé U tel que, pour tout b de U, le segment de droite $[a, b]$ soit inclus dans U. L'application :

$$\varphi : \begin{cases} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^p \\ t \quad \longmapsto \varphi(t) = a + t(b - a) \end{cases}$$

fournit un paramétrage de classe $\mathcal{C}^1$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) de ce segment de droite.

• **Idée clé n° 2**

Si ω est une forme exacte sur U et si f est une primitive de ω, alors :

$$\int_{\overset{\frown}{ab}} \omega = f(b) - f(a).$$

Donc $f(b)$ est connu, à une constante près, si l'on connaît l'intégrale curviligne $\int_{\overset{\frown}{ab}} \omega$.

• **Idée clé n° 3**

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et k une constante ; f et $f + k$ ont la même différentielle en tout point de U. Pour prouver que la forme différentielle ω est exacte sur U, on pose donc, pour tout b de U :

$$f(b) = \int_{\overset{\frown}{ab}} \omega.$$

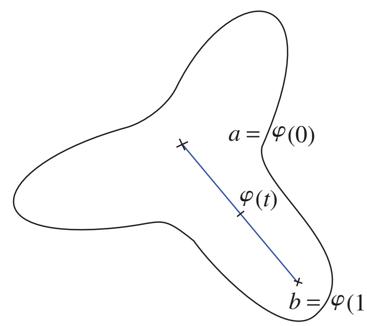
Il suffit de prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et que $\mathrm{d}f = \omega$.

Les plus brillants d'entre vous sauront bâtir la démonstration à l'aide de ces idées. Les autres se contenteront d'admettre ce théorème, ce qui ne sera pas du tout dommageable pour la préparation des concours.

■ La propriété « ω est une forme fermée sur U » est une propriété *locale*. Démontrer cette propriété se ramène à un simple calcul de dérivées partielles en chaque point de U.

■ La propriété « ω est une forme exacte sur U » est une propriété *globale*. Démontrer cette propriété demande, *a priori*, de trouver une fonction f définie sur tout l'ouvert U et telle que $\omega = \mathrm{d}f$, ce qui est moins simple que de calculer des dérivées partielles.

■ Le *théorème de Poincaré* simplifie ceci lorsque U est un ouvert étoilé.



Doc. 5.

Exemple

• La forme différentielle $\omega = \dfrac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2 + y^2}$ est exacte sur le demi-plan : $U = \{(x, y) | x > 0\}$. En effet :

– elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$;

– c'est une forme fermée sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$;

– U est un ouvert étoilé inclus dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Pour déterminer une primitive de ω sur U, utilisons la technique suivante :

Soit f une primitive de ω sur cet ouvert. On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

À $x > 0$ fixé, $(y \longmapsto f(x, y))$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $\left(y \longmapsto \dfrac{x}{x^2 + y^2}\right)$.

Connaissant ω, la formule :

$$f(b) = \int_{\overset{\frown}{ab}} \omega$$

fournit un moyen effectif de calculer une primitive de f.

Donc :

$$f(x,y) = \int \frac{x}{x^2+y^2}\, \mathrm{d}\, y = \operatorname{Arctan} \frac{y}{x} + H(x).$$

Ici, $H(x)$ est une constante par rapport à la variable d'intégration y.

Par construction, H est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et, à y fixé :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{Arctan} \frac{y}{x}\right) + H'(x).$$

On en déduit $H'(x) = 0$ et $f(x,y) = \operatorname{Arctan} \frac{y}{x} + k$, où k est une constante.

▶ ***Pour s'entraîner : ex. 2.***

2.5. Le point de vue du physicien

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$ et $\overrightarrow{V}$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^k$ sur U, noté $\overrightarrow{V}(a) = (P_1(a), \ldots, P_p(a))$. On peut lui associer la forme différentielle ω de classe $\mathcal{C}^k$ sur U définie par :

$$\omega(a) = \sum_{j=1}^{p} P_j(a)\, \mathrm{d}\, x_j\,.$$

Le physicien n'hésite pas à noter $\omega = \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\, x}$. Cette notation, purement symbolique, ne sera pas utilisée en mathématiques.

En revanche, il est mathématiquement correct d'écrire :

$$\forall a \in U \quad \forall \overrightarrow{h} \in \mathbb{R}^p \qquad \omega(a)(\overrightarrow{h}) = \overrightarrow{V}(a) \cdot \overrightarrow{h}\,.$$

où $\cdot$ désigne le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^p$. Il est immédiat que :

- Le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ dérive d'un potentiel scalaire sur U si, et seulement si, la forme différentielle associée, ω, est exacte sur U.
- La notion mathématique d'intégrale curviligne d'une forme différentielle correspond à la notion physique de **circulation d'un champ de vecteurs**.

La circulation du champ de vecteur $\overrightarrow{V}$ le long de l'arc orienté $\overset{\frown}{\Gamma}$ est l'intégrale curviligne de la forme associée le long de cet arc :

$$\int_{\overset{\frown}{\Gamma}} \omega = \int_{\overset{\frown}{\Gamma}} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\, x}.$$

Par exemple, la circulation d'un champ de forces $\overrightarrow{V}$ le long d'un arc allant du point A au point B représente le travail de cette force le long de cet arc.

- Les deux phrases suivantes signifient la même chose.

« L'intégrale curviligne d'une forme différentielle exacte le long d'une courbe fermée est nulle. »

« Un champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ qui dérive d'un potentiel scalaire est un champ conservatif. »

Dans $\mathbb{R}^3$, le *théorème de Poincaré* équivaut au résultat suivant : « Un champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert étoilé U de $\mathbb{R}^3$, dérive d'un potentiel scalaire si, et seulement si : $\forall a \in U \quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{V}(a) = \overrightarrow{0}$ ».

3 Calcul intégral

Dans le cadre de notre programme, l'intégration des fonctions n'a été étudiée que pour des fonctions d'une variable.

Le calcul des intégrales multiples de fonctions de plusieurs variables est un outil indispensable à de nombreuses branches de la Science. Développer une théorie cohérente de l'intégration de ces fonctions n'est pas du tout élémentaire et hors de notre propos. Ce n'est qu'à la fin du XIX^e et au début du XX^e siècle que les travaux de Jordan (Jordan Camille (1838-1922), mathématicien français), Borel (Borel Émile (1871-1956), mathématicien français), Lebesgue, et Radon ont permis de résoudre ce problème.

__Johann Radon__ (1887-1956), mathématicien autrichien. Les écrits de Borel et Lebesgue portaient sur les fonctions d'une variable. C'est Radon qui a vu que leurs travaux s'appliquaient aux fonctions de plusieurs variables.

Nous nous contenterons, conformément au programme, de développer quelques outils permettant, dans les cas les plus simples, le calcul des intégrales doubles de fonctions de deux variables et des intégrales triples de fonctions de trois variables.

3.1. Intégrales doubles

3.1.1 Compacts élémentaires de $\mathbb{R}^2$

Nous admettons la **formule de Fubini** pour les rectangles.

Soit $[a,b]$ et $[c,d]$ deux segments de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue de $[a,b]\times[c,d]$ dans $\mathbb{K}$. Alors :

$$\int_a^b\left(\int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t.$$

Cette égalité permet de définir l'intégrale double de la fonction continue f sur le rectangle $R=[a,b]\times[c,d]$.

Se limiter aux seuls rectangles comme domaines d'intégration des fonctions de deux variables est évidemment trop restrictif.

On appelle **compact élémentaire** de $\mathbb{R}^2$ un compact de $\mathbb{R}^2$ pouvant s'écrire comme réunion d'un nombre fini d'ensembles K tels que :

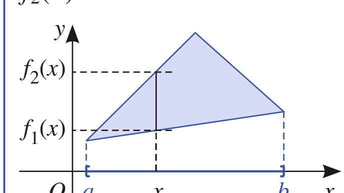
Il existe un segment $[a,b]$ et deux fonctions continues f_1 et f_2 de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f_1\leqslant f_2$ et :

$$K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\leqslant x\leqslant b \text{ et } f_1(x)\leqslant y\leqslant f_2(x)\},$$

ou bien il existe un segment $[c,d]$ et deux fonctions continues g_1 et g_2 de $[c,d]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $g_1\leqslant g_2$ et :

$$K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid c\leqslant y\leqslant d \text{ et } g_1(y)\leqslant x\leqslant g_2(y)\}.$$

■ La notation :
$K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\leqslant x\leqslant b \quad f_1(x)\leqslant y\leqslant f_2(x)\}$
sous-entend que, à x fixé entre a et b, y est entre $f_1(x)$ et $f_2(x)$.



Doc. 6.

■ La plupart des compacts élémentaires considérés dans la pratique sont directement de la forme K indiquée. La réunion finie de tels ensembles n'interviendra qu'exceptionnellement.

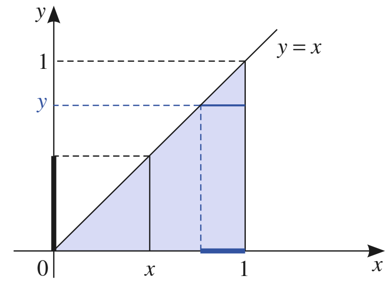
Exemples

■ Le triangle (*doc.* 7) :

$$\begin{aligned} T &= \{(x, y) \mid x \in [0,1] \text{ et } y \in [0,x]\} \\ &= \{(x, y) \mid y \in [0,1] \text{ et } x \in [y,1]\} \end{aligned}$$

■ Le quart de cercle (*doc.* 8) :

$$\begin{aligned} C &= \{(x, y) \mid x \geqslant 0 \text{ et } y \geqslant 0 \text{ et } x^2 + y^2 \leqslant R^2\} \\ &= \{(x, y) \mid x \in [0, R] \text{ et } y \in [0, \sqrt{R^2 - x^2}]\} \\ &= \{(x, y) \mid y \in [0, R] \text{ et } x \in [0, \sqrt{R^2 - y^2}]\} \end{aligned}$$



Doc. 7.

3.1.2 Le théorème de Fubini

Théorème 5 : Théorème de Fubini

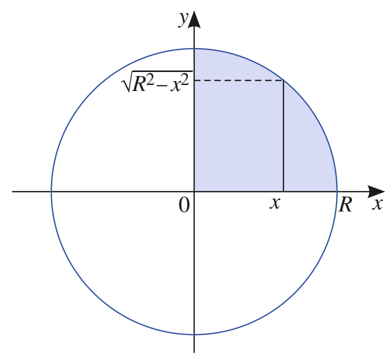
Soit un compact élémentaire K décrit des deux manières indiquées ci-dessous :

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b \text{ et } f_1(x) \leqslant y \leqslant f_2(x)\}$$

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leqslant y \leqslant d \text{ et } g_1(y) \leqslant x \leqslant g_2(y)\}$$

pour toute fonction f, continue de K dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$



Doc. 8.

Ce *théorème* est admis. Il permet de définir l'**intégrale double** de la fonction continue f sur le compact élémentaire K en posant :

$$\begin{aligned} \iint_K f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_c^d \left(\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Il est intéressant de noter que le *théorème de Fubini* pour les rectangles, est un cas particulier de ce théorème. Si $K = [a, b] \times [c, d]$, les fonctions f_1, f_2, g_1, g_2 sont constantes.

• La formule de Fubini permet le calcul d'une intégrale double en choisissant l'ordre d'intégration.

• Le cas particulier des rectangles, l'interprétation physique du terme $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ comme élément infinitésimal de surface, que nous n'abordons pas, incitent à admettre que l'aire du compact élémentaire K est :

$$\iint_K \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

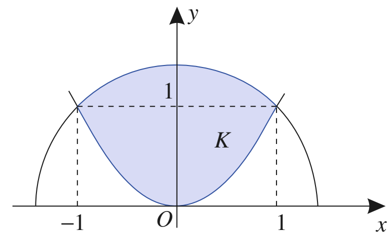
Exemples

■ Soit g et h deux fonctions continues respectivement de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ et de $[c, d]$ dans $\mathbb{R}$. On pose $f(x, y) = g(x)h(y)$ et $K = [a, b] \times [c, d]$. Alors :

$$\iint_K f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left(\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \right) \left(\int_c^d h(y)\,\mathrm{d}y \right).$$

***Guido Fubini** (1879-1943), mathématicien italien.*

Détermination de l'aire A du compact K du demi-plan d'équation $y \geqslant 0$ délimité par la parabole d'équation $y = x^2$ et l'arc de cercle d'équation $x^2 + y^2 = 2$. (*doc.* 9. ci-contre.)



Doc. 9.

Par raison de symétrie, A est le double de l'aire du compact L décrit par :

$$L = \{(x, y) \mid x \in [0, 1] \text{ et } y \in [x^2, \sqrt{2 - x^2}]\}.$$

$$A = 2 \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} \mathrm{d}\,y \right) \mathrm{d}\,x$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \text{ unités d'aire.}$$

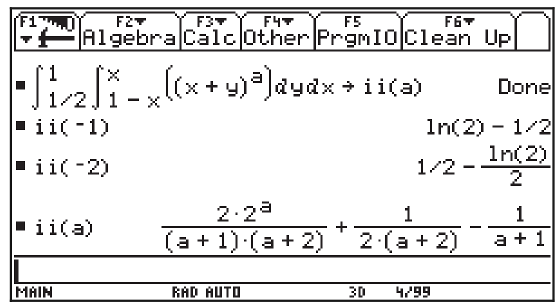
■ Soit α un réel et $K = \{(x, y) | y \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } x + y \geqslant 1\}$.

Calcul de : $I_\alpha = \displaystyle\iint_K (x + y)^\alpha \,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$.

Vous dessinerez K et trouverez :

$$K = \{(x, y) | x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \text{ et } y \in [1 - x, x]\}.$$

Votre calculette effectue l'intégrale double.



3.1.3 Quelques propriétés de l'intégrale double

Les propriétés suivantes sont admises.

• Soit K_1 et K_2 deux compacts élémentaires de $\mathbb{R}^2$, dont l'intersection ne contient aucune boule ouverte de $\mathbb{R}^2$. Alors, pour toute fonction f continue sur $K_1 \cup K_2$:

$$\iint_{K_1 \cup K_2} f(x, y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \iint_{K_1} f(x, y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y + \iint_{K_2} f(x, y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y.$$

• Soit f et g deux fonctions numériques continues sur le compact élémentaire K et (α, β) deux réels, alors :

$$\iint_K [\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)]\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \alpha \iint_K f(x, y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y + \beta \iint_K g(x, y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y.$$

• Soit f une fonction continue et positive sur le compact élémentaire K. Son intégrale sur K est positive :

$$0 \leqslant f \Rightarrow 0 \leqslant \iint_K f(x, y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y.$$

• Soit f une fonction continue et positive sur le compact élémentaire K. Son intégrale sur un compact élémentaire $L \subset K$ est plus petite que son intégrale sur K.

$$0 \leqslant f \quad \text{et} \quad L \subset K \Rightarrow \iint_L f(x, y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \leqslant \iint_K f(x, y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y.$$

3.1.4 Changement de variables.

Pour effectuer un **changement de variables** dans une intégrale double, il est utile de comprendre ce que devient l'élément infinitésimal de surface par cette transformation.

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$ et $\overrightarrow{\Phi}$ une application de U dans $\mathbb{R}^2$ notée :

$$\overrightarrow{\Phi} : \begin{cases} U & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (s,t) & \longmapsto \overrightarrow{\Phi}(s,t) = (x(s,t), y(s,t)) \end{cases}$$

On suppose que $\overrightarrow{\Phi}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, injective, et que de plus, son jacobien ne s'annule pas sur U.

Soit Δs un « petit accroissement » de la variable s et Δt un « petit accroissement » de la variable t. Dans U, le rectangle tramé a une aire de $\Delta s \Delta t$.

L'image par $\overrightarrow{\Phi}$ de ce rectangle est le « parallélogramme » dont les côtés sont :

$$\overrightarrow{\Phi}(s+\Delta s, t) - \overrightarrow{\Phi}(s,t) \approx \frac{\partial \overrightarrow{\Phi}}{\partial s}(s,t)\Delta s,$$

$$\overrightarrow{\Phi}(s, t+\Delta t) - \overrightarrow{\Phi}(s,t) \approx \frac{\partial \overrightarrow{\Phi}}{\partial t}(s,t)\Delta t.$$

Plus les accroissements Δs et Δt sont petits, plus le « parallélogramme image » est proche d'un véritable parallélogramme. Son aire est :

$$\left\| \left[\frac{\partial \overrightarrow{\Phi}}{\partial s}(s,t)\Delta s, \frac{\partial \overrightarrow{\Phi}}{\partial t}(s,t)\Delta t \right] \right\| = \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial x}{\partial s}(s,t)\Delta s & \dfrac{\partial x}{\partial t}(s,t)\Delta t \\ \dfrac{\partial y}{\partial s}(s,t)\Delta s & \dfrac{\partial y}{\partial t}(s,t)\Delta t \end{matrix} \right\| = \left| \frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(s,t)} \right| \Delta s \Delta t.$$

Ainsi, lorsque les variables s et t sont soumises à des accroissements Δs et Δt, les fonctions x et y subissent des accroissements Δx et Δy tels que :

$$\Delta x \Delta y = \left| \frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(s,t)} \right| \Delta s \Delta t.$$

Les arguments présentés ci-contre ne constituent pas une démonstration mathématique. Ils sont là pour expliquer la présence du jacobien dans la formule de changement de variables.

De là découle la formule fondamentale du changement de variables :

$$\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \left| \frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(s,t)} \right| \mathrm{d}\,s\,\mathrm{d}\,t.$$

Le théorème suivant est admis.

Théorème 6

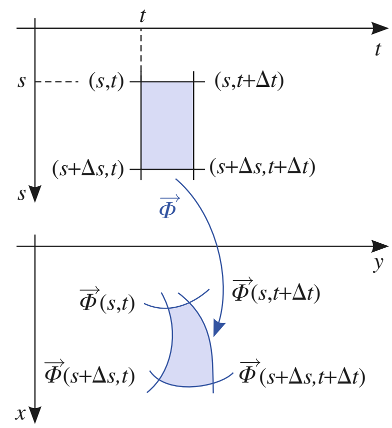
Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{\Phi} : (s,t) \longmapsto (x(s,t), y(s,t))$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}^2$, K un compact élémentaire inclus dans U et $\overset{\circ}{K}$ l'ensemble des points intérieurs à K.

Si les conditions suivantes sont réalisées :

- l'ensemble $D = \overrightarrow{\Phi}(K)$ est un compact élémentaire ;

Rapport ENS, 2000

« ...certains aspects, comme la maîtrise des intégrales doubles (en particulier pour la définition d'un nouveau domaine d'intégration après changement de variables ou lors de l'application du théorème de Fubini) [...] ont souvent laissé à désirer. »



Doc. 10.

Un point intérieur à K est un point M de K tel qu'il existe une boule de centre M incluse dans K.
Par exemple, si :
$K = [0, R] \times [-\pi, \pi]$, alors :

$$\overset{\circ}{K} =]0, R[\times]-\pi, \pi[.$$

- la restriction de $\overrightarrow{\Phi}$ à $\overset{\circ}{K}$ est injective ;
- le jacobien de $\overrightarrow{\Phi}$ ne s'annule pas sur $\overset{\circ}{K}$,

alors, pour toute fonction f continue de D dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_K f(x(s,t),y(s,t))\left|\frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(s,t)}\right|\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t.$$

Exemple fondamental : les coordonnées polaires

- L'application

$$\overrightarrow{\Phi} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta) \longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

- Soit le rectangle $K = [0,R]\times[-\pi,\pi]$ (avec $R>0$). Son image par $\overrightarrow{\Phi}$ est le disque D de centre $(0,0)$ et de rayon R :

$$D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant R^2\}.$$

- On a $\overset{\circ}{K} =]0,R[\times]-\pi,\pi[$. La restriction de $\overrightarrow{\Phi}$ à $\overset{\circ}{K}$ est injective et, pour tout (r,θ) de $\overset{\circ}{K}$:

$$\frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r \neq 0.$$

- Le *théorème* s'applique et permet d'écrire :

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^R f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

avec $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant R^2\}$.

Exemple : Aire d'une ellipse

Calcul de l'aire du domaine plan, noté E, délimité par l'ellipse (*doc.* 11) d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Le domaine E peut être paramétré par :

$$\overrightarrow{\Phi} : \begin{cases} [0,1]\times[0,2\pi] \longrightarrow E \\ \quad (r,t) \qquad \longmapsto (x,y) = (ar\cos(t), br\sin(t)) \end{cases}.$$

L'application $(r,t) \longmapsto (x,y) = (ar\cos(t), br\sin(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Par construction, sa restriction à $K = [0,1]\times[0,2\pi]$ a pour image E.

En tout point (r,t) de $\overset{\circ}{K} =]0,1[\times]0,2\pi[$ le jacobien de $\overrightarrow{\Phi}$ est :

$$\frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(r,t)} = abr \neq 0.$$

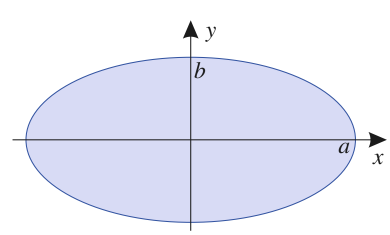
De plus, la restriction de $\overrightarrow{\Phi}$ à $\overset{\circ}{K}$ est injective.

Il est intéressant de noter que la restriction de $\overrightarrow{\Phi}$ à K n'est pas injective et que le jacobien de $\overrightarrow{\Phi}$ s'annule aux points de K tels que $r=0$. Cela n'empêche pas d'appliquer le *théorème* car les hypothèses concernant $\overset{\circ}{K}$ sont vérifiées.

Rapport TPE, 2002

« Les changements de variables dans les intégrales doubles ne sont pas maîtrisés. Le simple passage aux coordonnées polaires est une catastrophe. »

Cette formule du passage en coordonnées polaires est à utiliser directement sans reprendre les étapes exposées ci-dessus.
Pour un changement de variables moins courant, il faudra prendre soin de mettre en place les trois hypothèses permettant d'appliquer le *théorème*.



Doc. 11.

L'aire recherchée est :

$$\iint_E \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_K abr\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t = ab\int_0^1 r\,\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t = \pi ab \text{ unités d'aire.}$$

► ***Pour s'entraîner : ex. 3 et 4.***

Application 1

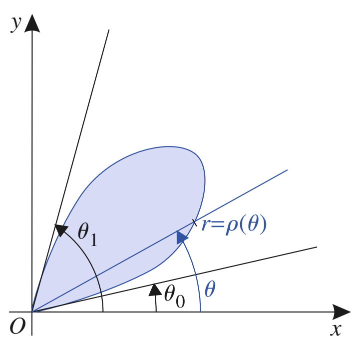
Calcul de l'aire d'une boucle délimitée par une courbe $r = \rho(\theta)$

Soit θ_0 et θ_1 deux réels tels que :

$$0 < \theta_1 - \theta_0 < 2\pi$$

et ρ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $[\theta_0, \theta_1]$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que :

$$\rho(\theta_0) = \rho(\theta_1) = 0.$$



Doc. 12.

Le but de cette application est de déterminer l'aire de la boucle B délimitée par la courbe d'équation polaire :

$$r = \rho(\theta)$$

lorsque θ varie de θ_0 à θ_1.

1) *Dans quel domaine les coordonnées polaires (r, θ) d'un point de la boucle B se trouvent-ils ?*

2) *Exprimer l'aire de la boucle B en fonction des coordonnées polaires.*

3) *Déterminer l'aire délimitée par la lemniscate de Bernoulli d'équation polaire :*

$$r = a\sqrt{\cos(2\theta)}.$$

1) Le *schéma* ci-avant indique que :

$$B = \{(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \mid \theta \in [\theta_0, \theta_1] \quad \text{et} \quad r \in [0, \rho(\theta)]\}.$$

2) Soit :

$$K = \{(r, \theta) \mid \theta \in [\theta_0, \theta_1] \quad \text{et} \quad r \in [0, \rho(\theta)]\}.$$

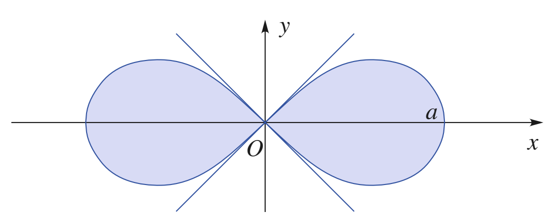
L'aire recherchée est :

$$\iint_B \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_K r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1}\left(\int_0^{\rho(\theta)} r\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1}\frac{\rho^2(\theta)}{2}\,\mathrm{d}\theta.$$

3) La lemniscate est symétrique par rapport aux deux axes de coordonnées.

Son aire, A, est deux fois l'aire de la partie du plan délimitée par θ dans $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

$$A = 2\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{a^2\cos(2\theta)}{2}\,\mathrm{d}\theta = a^2 \text{ unités d'aire.}$$



Doc. 13.

3.2. Intégrales triples

Calculer des *intégrales triples* suppose de définir d'abord sur quels compacts de $\mathbb{R}^3$ on va intégrer les fonctions continues.

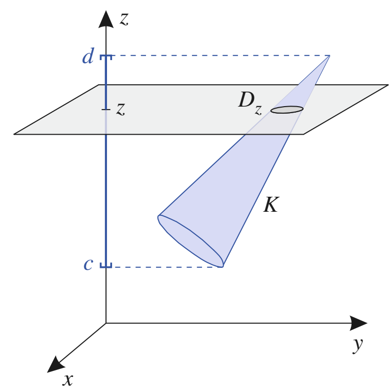
Ensuite, la formule de Fubini et la technique du changement de variables permettront d'effectuer certains calculs d'intégrales triples.

3.2.1 Compacts de $\mathbb{R}^3$ découpés en tranches

Soit K un compact de $\mathbb{R}^3$ possédant la propriété suivante.

« Il existe un segment $[c, d]$ et pour tout z de $[c, d]$, il existe un compact élémentaire D_z de $\mathbb{R}^2$ tels que :

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in [c, d] \quad \text{et} \quad (x, y) \in D_z\}. \text{ »}$$



Doc. 14.

De façon imagée, le compact K est découpé en « tranches ». Ici, les « tranches » sont parallèles au plan (xOy). On peut aussi utiliser des tranches parallèles aux autres plans de coordonnées.

Pour toute fonction f continue de K dans $\mathbb{R}$, il est possible de calculer :

$$\int_c^d \left(\iint_{D_z} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z.$$

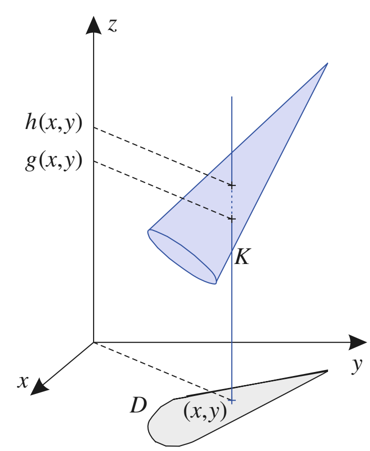
Si la fonction $\left(z \longmapsto \iint_{D_z} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \right)$ est continue (par morceaux) sur le segment $[c, d]$, ce qui sera toujours le cas dans la pratique, cette quantité a un sens.

3.2.2 Compacts de $\mathbb{R}^3$ découpés en piles

Soit K un compact de $\mathbb{R}^3$ possédant la propriété suivante.

« Il existe un compact élémentaire D de $\mathbb{R}^2$ et, pour tout (x, y) de D, il existe un segment $[g(x, y), h(x, y)]$, où g et h sont deux fonctions continues sur D, tels que :

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D \quad \text{et} \quad z \in [g(x, y), h(x, y)]\}. \text{ »}$$



Doc. 15.

De façon imagée, le compact K est découpé en « piles ». Ici, les « piles » sont parallèles à l'axe (Oz). On peut aussi utiliser des piles parallèles aux autres axes de coordonnées.

Pour toute fonction f continue de K dans $\mathbb{R}$, il est possible de calculer :

$$\iint_D \left(\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Un compact de $\mathbb{R}^3$ vérifiant une des deux propriétés ci-dessus sera appelé un compact élémentaire de $\mathbb{R}^3$

3.2.3 Formule de Fubini

Soit K un compact de $\mathbb{R}^3$ dont on connaît deux décompositions :

$$\begin{aligned} K &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in [c, d] \quad \text{et} \quad (x, y) \in D_z\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D \quad \text{et} \quad z \in [g(x, y), h(x, y)]\}. \end{aligned}$$

Dans ce cas, pour toute fonction continue f de K dans $\mathbb{R}$:

$$\int_c^d \left(\iint_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z = \iint_D \left(\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Cette quantité est l'intégrale triple de f sur le compact K, que l'on note aussi :

$$\iiint_K f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

L'égalité ci-dessus est la **formule de Fubini** pour les intégrales triples.

Exemple fondamental.

Le volume d'un compact élémentaire K de $\mathbb{R}^3$ est :

$$V = \iiint_K \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

3.2.4 Changement de variables

On procède de façon similaire au cas de la dimension 2.

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^3$ et $\overrightarrow{\Phi}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ et injective de U dans $\mathbb{R}^3$ notée :

$$\overrightarrow{\Phi} : \begin{cases} U & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (s,t,u) & \longmapsto \overrightarrow{\Phi}(s,t,u) = (x(s,t,u), y(s,t,u), z(s,t,u)) \end{cases}$$

On suppose que le jacobien de $\overrightarrow{\Phi}$ n'est jamais nul :

$$\operatorname{Det} \mathrm{J}\overrightarrow{\Phi}(s,t,u) = \frac{\mathrm{D}(x,y,z)}{\mathrm{D}(s,t,u)} \neq 0.$$

Le même principe qu'en dimension 2 permet de voir que, lorsque les variables s,t et u sont soumis à des accroissements $\Delta s, \Delta t$ et Δu, les fonctions x, y et z subissent des accroissements $\Delta x, \Delta y$ et Δz tels que :

$$\Delta x \Delta y \Delta z = \left| \frac{\mathrm{D}(x,y,z)}{\mathrm{D}(s,t,u)} \right| \Delta s \Delta t \Delta u.$$

De là découle la formule fondamentale du changement de variables :

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \left| \frac{\mathrm{D}(x,y,z)}{\mathrm{D}(s,t,u)} \right| \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u.$$

Théorème 7
Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^3$,

$$\overrightarrow{\Phi} : (s,t,u) \longmapsto (x(s,t,u), y(s,t,u), z(s,t,u))$$

une application de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}^3$, K un compact de $\mathbb{R}^3$ inclus dans U et $\overset{\circ}{K}$ l'ensemble des points intérieurs à K.

On suppose que K et $D = \overrightarrow{\Phi}(K)$ ont chacun une description analogue à celle indiquée au début du § 3.2.3.

Si les conditions suivantes sont réalisées :

- la restriction de $\overrightarrow{\Phi}$ à $\overset{\circ}{K}$ est injective,
- le jacobien de $\overrightarrow{\Phi}$ ne s'annule pas sur $\overset{\circ}{K}$,

alors, pour toute fonction f continue de $D = \overrightarrow{\Phi}(K)$ dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
$$= \iiint_K f(x(s,t,u), y(s,t,u), z(s,t,u)) \left|\frac{\mathrm{D}(x,y,z)}{\mathrm{D}(s,t,u)}\right| \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u.$$

Le *théorème* 7 n'est pas au programme. Nous l'avons inclus dans le cours car il permet de justifier mathématiquement le passage en coordonnées cylindriques ou sphériques dans une intégrale triple.
Il est le prolongement naturel du *théorème* 6 au cas de la dimension 3.

3.2.5 Les coordonnées cylindriques

Les **coordonnées cylindriques** s'utilisent de la manière suivante.

- L'application

$$\overrightarrow{\Phi} : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r,\theta,z) & \longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta, z) \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$.

- Soit le parallélépipède rectangle $K = [0,R]\times[-\pi,\pi]\times[a,b]$. Son image par $\overrightarrow{\Phi}$ est la portion de cylindre C d'axe Oz, de rayon R :

$$C = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \leqslant R^2 \text{ et } z \in [a,b]\}.$$

- On a $\overset{\circ}{K} =]0,R[\times]-\pi,\pi[\times]a,b[$. La restriction de $\overrightarrow{\Phi}$ à $\overset{\circ}{K}$ est injective et, pour tout (r,θ,z) de $\overset{\circ}{K}$:

$$\frac{\mathrm{D}(x,y,z)}{\mathrm{D}(r,\theta,z)} = r \neq 0.$$

Il est intéressant de noter que la restriction de $\overrightarrow{\Phi}$ à K n'est pas injective et que le jacobien de $\overrightarrow{\Phi}$ s'annule aux points de K tels que $r=0$. Cela n'empêche pas d'appliquer le *théorème* car les hypothèses concernant $\overset{\circ}{K}$ sont vérifiées.

- Pour toute fonction f continue sur le cylindre C :

$$\iiint_C f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_a^b \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^R f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z,$$

avec $C = \{(x,y,z) | x^2+y^2 \leqslant R^2 \text{ et } z \in [a,b]\}$.

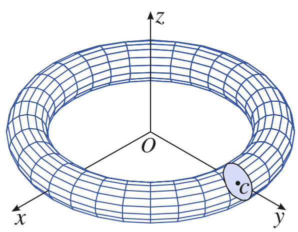
Application 2

Volume d'un tore de révolution

Soit a, b, c trois réels strictement positifs et tels que $a < c$. Calculer le volume du tore de révolution T obtenu en faisant tourner l'ellipse d'équation :

$$\frac{(y-c)^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, x = 0$$

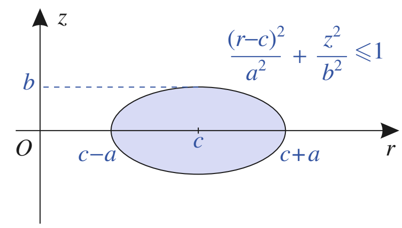
autour de l'axe (Oz).



Doc. 16.

Le tore T est décrit à l'aide des coordonnées cylindriques par :

$$T = \{(x, y, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z) \mid \frac{(r-c)^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leqslant 1 \text{ et } \theta \in [0, 2\pi]\}.$$



Doc. 17.

Notons :

$$E = \{(r, z) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{(r-c)^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leqslant 1\}$$

et :

$$K = \{(r, \theta, z) \mid (r, z) \in E \text{ et } \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

Le volume du tore T est :

$$\iiint_T \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \left(\iint_E r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}\theta.$$

Pour calculer l'intégrale double sur l'ellipse E, vous utiliserez le changement de variables :

$$u = \frac{r-c}{a}, \quad v = \frac{z}{b}.$$

Vous obtiendrez $\iint_E r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z = \pi abc$.

Finalement, le volume du tore est :

$$\iiint_T \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 2\pi^2 abc \text{ unités de volume.}$$

3.2.6 Les coordonnées sphériques

Les **coordonnées sphériques** s'utilisent de la manière suivante.

- L'application

$$\overrightarrow{\Psi} : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \theta, \varphi) & \longmapsto (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$.

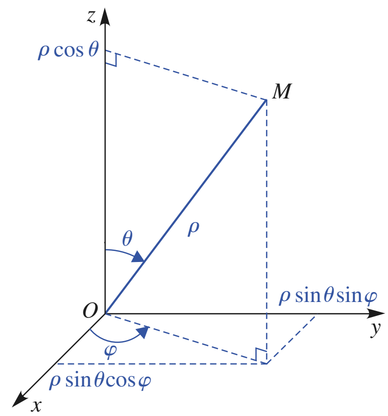
- Soit le parallélépipède rectangle $K = [0, R] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ (avec $R > 0$). Son image par $\overrightarrow{\Psi}$ est la sphère $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2\}$.

• On a $\overset{\circ}{K} =]0, R[\times]0, \pi[\times]0, 2\pi[$. La restriction de $\overrightarrow{\Psi}$ à $\overset{\circ}{K}$ est injective et, pour tout (r, θ, φ) de $\overset{\circ}{K}$:

$$\frac{\mathrm{D}(x, y, z)}{\mathrm{D}(r, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta \neq 0.$$

• Pour toute fonction f continue sur la sphère S :

$$\iiint_S f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi.$$



Doc. 18.

Exemple

Considérons la sphère S de centre O et de rayon R. La formule de changement de variable pour le passage en coordonnées sphériques donne :

$$\iiint_S \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = \frac{4\pi R^3}{3} \text{ unités de volume.}$$

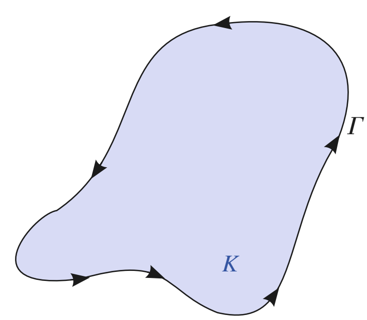
► ***Pour s'entraîner : ex. 5 et 6.***

3.3. Formule de Green-Riemann

Théorème 8

Soit K un compact élémentaire du plan, dont la frontière est un arc Γ, orienté dans le sens trigonométrique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Soit P et Q deux applications de classe $\mathcal{C}^1$ d'un ouvert U contenant K dans $\mathbb{R}$.

$$\int_{\overset{\frown}{\Gamma}} (P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y) = \iint_K \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$



Doc. 19.

Ce théorème est admis. Voici comment l'interpréter et l'utiliser.

On introduit un paramétrage $\gamma : t \longmapsto (x(t), y(t))$ de l'arc orienté Γ, l'intervalle de variation du paramètre étant noté $[a, b]$.

■ En section *PC*

$$\int_{\overset{\frown}{\Gamma}} [P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y] = \int_a^b [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]\,\mathrm{d}t$$

est l'intégrale du champ de vecteurs $(x, y) \longmapsto (P(x, y), Q(x, y))$ le long de la courbe Γ.

■ En section *PSI*

$$\int_{\overset{\frown}{\Gamma}} [P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y] = \int_a^b [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]\,\mathrm{d}t$$

est l'intégrale curviligne de la forme différentielle $\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ le long de la courbe Γ.

Exemple

Calculer l'aire du compact élémentaire K, c'est calculer :

$$A = \iint_K \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Si l'on choisit P et Q de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert contenant K tels que :

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 1,$$

on ramène le calcul d'aire par intégrale double sur K à une intégrale curviligne le long du bord de K, orienté dans le sens direct et noté Γ.

Voici trois solutions possibles :

- $Q(x,y) = \frac{1}{2}x$ et $P(x,y) = -\frac{1}{2}y$;
- $Q(x,y) = x$ et $P(x,y) = 0$;
- $Q(x,y) = 0$ et $P(x,y) = -y$.

La formule de Green-Riemann prouve que :

George Green (1793-1841), mathématicien anglais.

$$A = \int_{\overset{\frown}{\Gamma}} \frac{1}{2}(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x) = \int_{\overset{\frown}{\Gamma}} x\,\mathrm{d}y = \int_{\overset{\frown}{\Gamma}} -y\,\mathrm{d}x.$$

Lorsque K est une boucle délimitée par une courbe polaire :

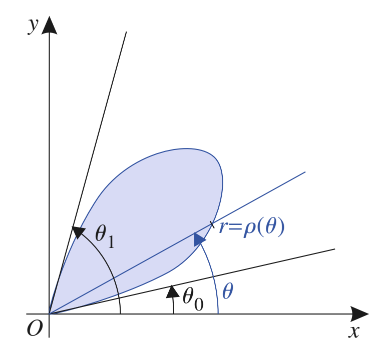
$$\begin{cases} [\theta_0, \theta_1] \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \quad\theta \quad\longmapsto \rho(\theta) \end{cases}$$

cette intégrale curviligne donne l'aire de la boucle (*doc.* 20). En effet :

$$\int_{\overset{\frown}{\Gamma}} \frac{1}{2}(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{1}{2}[x(\theta)y'(\theta) - y(\theta)x'(\theta)]\,\mathrm{d}\theta.$$

Avec $x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta$ et $y(\theta) = \rho(\theta)\sin\theta$, on retrouve :

$$\iint_K \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\overset{\frown}{\Gamma}} \frac{1}{2}(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\rho^2(\theta)}{2}\,\mathrm{d}\theta.$$



Doc. 20.

► ***Pour s'entraîner : ex. 7 et 8.***

3.4. Calcul d'aire d'une portion de surface paramétrée

Soit une surface de $\mathbb{R}^3$ paramétrée par la fonction $\overrightarrow{f}$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$:

$$\overrightarrow{f} : (u,v) \longmapsto (x(u,v), y(u,v), z(u,v)).$$

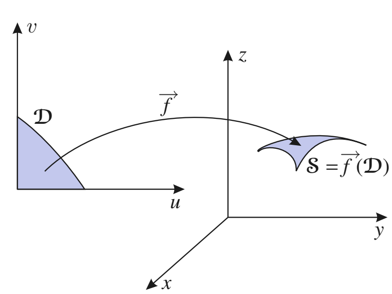
La norme euclidienne usuelle de $\mathbb{R}^3$ est notée $\|\ \|$ et $\overrightarrow{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

On admet que l'aire d'une partie compacte $\mathcal{S}$ de cette surface, définie par :

$$\mathcal{S} = \overrightarrow{f}(\mathcal{D}),$$

où $\mathcal{D}$ est un compact élémentaire de $\mathbb{R}^2$ (*doc.* 21), est donnée par :

$$\text{Aire}(\mathcal{S}) = \iint_{(u,v)\in\,\mathcal{D}} \left\| \frac{\partial \overrightarrow{f}}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \overrightarrow{f}}{\partial v}(u,v) \right\| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$



Doc. 21.

Exemples

■ La sphère de centre O et de rayon R est paramétrée, à l'aide des coordonnées sphériques, par :

$$\overrightarrow{f} : (\theta, \varphi) \longmapsto \big(R\sin(\theta)\cos(\varphi), R\sin(\theta)\sin(\varphi), R\cos(\theta)\big)$$

avec $(\theta, \varphi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$.

Les calculs donnent :

$$\frac{\partial \overrightarrow{f}}{\partial \theta}(\theta, \varphi) = \big(R\cos(\theta)\cos(\varphi), R\cos(\theta)\sin(\varphi), -R\sin(\theta)\big),$$

$$\frac{\partial \overrightarrow{f}}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) = \big(-R\sin(\theta)\sin(\varphi), R\sin(\theta)\cos(\varphi), 0\big),$$

$$\left\| \frac{\partial \overrightarrow{f}}{\partial \theta}(\theta, \varphi) \wedge \frac{\partial \overrightarrow{f}}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) \right\| = R^2 \sin(\theta).$$

Donc, l'aire de la sphère de rayon R est :

$$A = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\pi} R^2 \sin(\theta)\,\mathrm{d}\,\theta \right] \mathrm{d}\,\varphi = 4\pi R^2.$$

■ Soit une surface connue par une représentation cartésienne explicite :

$$z = g(x, y).$$

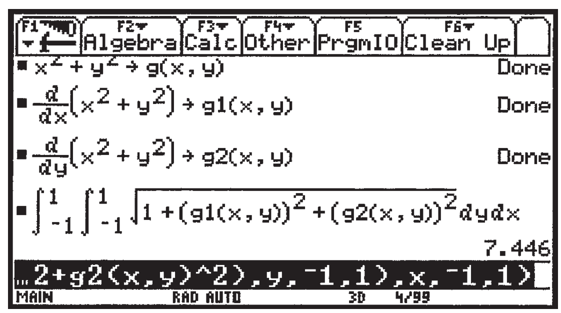
Cette surface est paramétrée par la fonction :

$$\overrightarrow{f} : (x, y) \longmapsto \overrightarrow{f}(x, y) = \big(x, y, g(x, y)\big).$$

On obtient :

$$\left\| \frac{\partial \overrightarrow{f}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{f}}{\partial y} \right\| = \sqrt{1 + \frac{\partial g}{\partial x}^2 + \frac{\partial g}{\partial y}^2}.$$

L'écran ci-contre montre le calcul de l'aire de la portion de paraboloïde de révolution d'équation $z = x^2 + y^2$ délimitée par $(x, y) \in [-1, 1]$.



4 Généralités sur les équations différentielles non linéaires

4.1. Définitions

Soit E l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3, U$ un ouvert de $\mathbb{R} \times E$ et F une application de U dans E.

On appelle solution de l'équation différentielle d'ordre 1 :

$$X' = F(t, X) \qquad \textbf{(1)}$$

toute application φ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide, telle que φ soit dérivable sur I et :

$$\forall t \in I \quad (t, \varphi(t)) \in U \quad \text{et} \quad \varphi'(t) = F(t, \varphi(t)).$$

Rapport Centrale, 1997

« Au rang des notions mal digérées, nous mettrons : le calcul différentiel, les équations différentielles... »

De même que pour le cas linéaire, une solution de **(1)** définie sur l'intervalle I est appelée une ***I*-solution** de **(1)**.

Une ***I*-solution** φ de l'équation différentielle **(1)** est dite **maximale** s'il n'existe pas d'intervalle J contenant strictement I et de J-solution ψ de l'équation différentielle **(1)** telle que : $\psi_{|I} = \varphi$.

4.2. Propriétés élémentaires

Théorème 9

Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times E$ et F une application de U dans E. Lorsque l'application F est continue sur U, toute solution φ de l'équation différentielle : $X' = F(t, X)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son intervalle de définition.

4.3. Le théorème de Cauchy-Lipschitz

Conformément au programme, nous admettons le *théorème* suivant.

Théorème 10 : Théorème de Cauchy-Lipschitz

Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times E$ et F une application de U dans E, de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

Pour tout (t_0, X_0) de U, le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} X'(t) = F(t, X(t)) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

admet une unique solution maximale, définie sur un intervalle ouvert.

Rapport X-CACHAN, 2000

« Le théorème de Cauchy-Lipschitz est bien connu et appliqué dans la majorité des copies. »
Eh, oui, il n'y a pas que du négatif dans les rapports ! Hélas :
« Enfin, après avoir annoncé que le théorème de Cauchy-Lipschitz ne s'appliquait pas (1.3), *beaucoup se contentent de l'appliquer pour résoudre* 2.5, *montrant par là même qu'ils n'avaient pas compris le raisonnement que l'on attendait d'eux. »*

Application 3

Étude qualitative d'une équation de Ricatti

(D'après X 95)

On considère l'équation différentielle (E_1) : $y' = x^2 + y^2$, *où y désigne une fonction inconnue de la variable* x.

1) *Combien existe-t-il de solutions maximales impaires ?*

2) *Soit* φ *une solution maximale de* (E_1) *et* I *son intervalle ouvert de définition.*

a) *Montrer que* φ *est strictement croissante sur* I.

b) *On suppose* I *borné. Montrer que* $\varphi(I) = \mathbb{R}$.

1) L'application F définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$F(x, y) = x^2 + y^2,$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Le *théorème de Cauchy-Lipschitz* s'applique en tout point.

Toute solution maximale impaire est solution de :

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Donc (E_1) a, au plus, une solution maximale impaire.

Soit y la solution du problème de Cauchy ci-dessus.

On définit z en posant $z(x) = -y(-x)$.

Vous prouverez que cette fonction est solution du même problème de Cauchy. Donc $z = y$ et y est impaire.

(E_1) a une unique solution impaire.

2) a) Pour tout x de $I, \varphi'(x) \geqslant x^2$.

Donc φ est continue, strictement croissante sur I.

b) Puisque I est borné, $I =]a, b[$ avec a et b réels.

Or, φ est continue, strictement croissante sur I.

Donc $\varphi(I) =]\lim\limits_{x \to a} \varphi(x), \lim\limits_{x \to b} \varphi(x)[$.

Si $\lim\limits_{x \to b} \varphi(x) = c \neq +\infty$, alors $c \in \mathbb{R}$ et l'on peut prolonger φ par continuité en b. Ceci permet de prouver que φ n'est pas une solution maximale. C'est faux, donc $\lim\limits_{x \to b} \varphi(x) = +\infty$. On montre de même que $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = -\infty$ et ainsi $\varphi(I) = \mathbb{R}$.

5 Équations différentielles à variables séparables

Une équation différentielle à variables séparables est une équation différentielle scalaire du premier ordre qui admet une forme résolue en y' telle que :

$$y' = a(x)\, b(y) \qquad \textbf{(1)}$$

avec a et b deux fonctions d'une variable, de classe $\mathcal{C}^1$, définies respectivement sur des intervalles ouverts I et J.

Préliminaire théorique

On note : $U = I \times J$ et $f(x, y) = a(x)b(y)$. La fonction de deux variables f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique en chacun des points de cet ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Méthode pratique

• On commence par déterminer les zéros de la fonction b.

Si $b(y_0) = 0$, la fonction constante $x \longmapsto y(x) = y_0$ est solution de **(1)**.

• On restreint y à des intervalles $]\, y_0, y_1 [$ où b ne s'annule pas. L'équation **(1)** est alors équivalente à :

$$\frac{y'}{b(y)} = a(x) \qquad \textbf{(2)}$$

que l'on intègre de la façon suivante.

Soit A une primitive de a sur l'intervalle I et G une primitive de $\dfrac{1}{b}$ sur $]\, y_0, y_1 [$. Une fonction y, solution de **(2)** est telle que :

$G(y) = A(x) + c$, où c est une contante.

• Si l'expression explicite de y en fonction de x est demandée, on déterminera la bijection réciproque de G.

Exemple : L'équation différentielle $x' = \sqrt{x}$

Il s'agit d'une équation incomplète.

L'application $x \longmapsto \sqrt{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]\, 0, +\infty [$.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique en tout point (t_0, x_0) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$. La solution nulle est une solution particulière de l'équation.

Rapport ENS, 2000

« Un exemple sur ce point : considérant une équation différentielle ordinaire non linéaire $u' = C - u^2$, comme il s'agit d'une interrogation de mathématiques, plusieurs candidats commencent par écrire l'équation « homogène » associée (qui n'existe pas puisqu'il s'agit d'un problème non linéaire) [...]. En revanche, lorsqu'on leur demande : " Si vous étiez en Physique, quelle méthode emploieriez-vous ? ", ils proposent la méthode de séparation des variables et effectuent le calcul correctement. »

Lorsque $a(x) = 1$ pour tout x, l'équation est de la forme :

$$y' = b(y).$$

Elle est qualifié d'**équation incomplète**. La méthode exposée ci-contre s'applique parfaitement.
On aboutit à :

$$x = G(y) + k,$$

où G est une primitive de $y \longmapsto 1/b(y)$.

De plus, toute solution de l'équation différentielle est croissante.

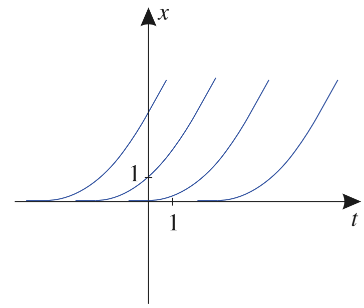
Soit x une solution ne s'annulant pas sur un intervalle I.

Écrivons : $\dfrac{x'}{\sqrt{x}} = 1$.

$$\frac{x'}{\sqrt{x}} = 1 \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} \quad \forall t \in I \qquad 2\sqrt{x(t)} = t - C.$$

Les solutions ne s'annulant pas sont les fonctions $t \longmapsto x(t) = \dfrac{1}{4}(t-C)^2$ avec $t \in]C, +\infty[$

Elles se prolongent en $\mathbb{R}$-solutions de l'équation en posant, pour $t \leqslant C$, $x(t) = 0$.



Doc. 22. *Les solutions maximales de l'équation* $x' = \sqrt{x}$.

► ***Pour s'entraîner : ex. 9.***

Application 4

Une équation différentielle à variables séparables

Résoudre l'équation différentielle :

$$y'(4-x^2)^2 + 8xy^2 = 0 \qquad (\boldsymbol{E})$$

Sur chacun des intervalles :

$I_1 =]-\infty, -2[$, $I_2 =]-2, 2[$ et $I_3 =]2, +\infty[$,

l'équation a une forme résolue en y' :

$$y' = -8\frac{x}{(4-x^2)^2}y^2 \qquad (\boldsymbol{R})$$

C'est une équation à variables séparables.

L'application :

$$(x, y) \longmapsto -8\frac{x}{(4-x^2)^2}y^2$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur chacun des ouverts D_1, D_2, D_3,

avec $D_1 = I_1 \times \mathbb{R}$, $D_2 = I_2 \times \mathbb{R}$ et $D_3 = I_3 \times \mathbb{R}$.

En particulier, la fonction nulle est solution de $(\boldsymbol{R})$. C'est la seule qui s'annule sur son domaine de définition.

Pour une solution qui ne s'annule pas, on a :

$$\frac{y'}{y^2} = -\frac{8x}{(4-x^2)^2}$$

$$-\frac{1}{y} = -\int \frac{8x\,\mathrm{d}x}{(4-x^2)^2} + c.$$

Avec Maple :

```
> int(8*x/(4-x^2)^2,x) ;
```

$$-\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2}$$

$$y = \frac{4-x^2}{4+c(x^2-4)} = \frac{4-x^2}{cx^2+4(1-c)}.$$

• Pour $c = 0$, $y = 1 - \dfrac{x^2}{4}$. Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$. C'est une solution maximale de $(\boldsymbol{E})$.

• Pour c dans $]0, 1[$, on obtient des fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Ce sont des solutions maximales de $(\boldsymbol{E})$.

• Pour $c = 1$, $y = \dfrac{4}{x^2} - 1$. Les restrictions de cette fonction à $\mathbb{R}^{-*}$ et $\mathbb{R}^{+*}$ sont des solutions maximales de $(\boldsymbol{E})$.

• Pour c dans $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$, Les restrictions de :

$$y = \frac{4-x^2}{cx^2+4(1-c)}$$

aux intervalles $\left]-\infty, -\sqrt{\dfrac{4(c-1)}{c}}\right[$,

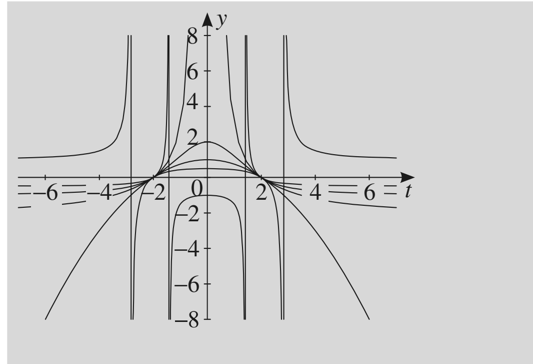
$\left]-\sqrt{\dfrac{4(c-1)}{c}}, \sqrt{\dfrac{4(c-1)}{c}}\right[$ et $\left]\sqrt{\dfrac{4(c-1)}{c}}, +\infty\right[$

sont des solutions maximales de $(\boldsymbol{E})$.

Avec Maple :

```
> restart:
  L:=[];
  for k from -1 to 2 do
  L:=L,plot((-t^2+4)/(k*t^2+4*(1-k)),
  t=-7..7,y=-8..8) od:
  L:=L,plot((-t^2+4)/(.5*t^2+4*(.5)),
  t=-7..7,y=-8..8):
> with(plots):display(L);
```

$$L := []$$



6 Systèmes autonomes en dimension 2 (*PC*)

6.1. Définition

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et F une application de U dans $\mathbb{R}^2$.

• Le système différentiel $X' = F(X)$ **(2)**

est appelé un **système différentiel autonome**.

• Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une I-solution de ce système est une fonction X, définie et dérivable sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, et telle que :

$$\forall t \in I \quad X'(t) = F(X(t)).$$

• La courbe paramétrée par une I-solution de **(2)** est appelée une trajectoire de ce système.

En général, on note $X = (x, y)$. La fonction F est à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Soit (f, g) ses fonctions composantes. Le système $X' = F(X)$ équivaut à :

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

Il est important de noter que la variable t, qui désigne le temps dans les représentations cinématiques, n'intervient pas dans l'écriture du système.

6.2. Interprétation géométrique

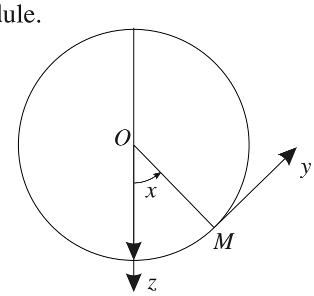
Soit $\overrightarrow{V} : \begin{cases} U & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (f(x, y), g(x, y)) \end{cases}$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et φ une I-solution du système autonome $\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$.

La fonction φ est telle que :

$$\forall t \in I \quad \varphi'(t) = \overrightarrow{V}(\varphi(t)).$$

L'ensemble $\varphi(I)$ est appelé une **trajectoire du champ de vecteurs** $\overrightarrow{V}$. On parle aussi de **ligne de champ**, de **courbe intégrale** ou d'**orbite** du champ $\overrightarrow{V}$.

Le pendule rigide, sans frottement, situé dans un plan vertical fournit un exemple simple de système autonome. En effet, le mouvement du pendule est parfaitement déterminé par sa position et sa vitesse à l'instant initial. Supposons le pendule de longueur l et appelons x l'angle de (Oz) et de $\overrightarrow{OM}$, y la vitesse angulaire du pendule. L'ensemble des couples (x, y) est appelé l'espace de phase du pendule.



L'équation fondamentale de la dynamique nous donne :

$$-mg \sin x = mlx''.$$

En posant : $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$,

on obtient : $x'' = -\omega^2 \sin x$.

Puis $\begin{cases} x'(t) = y \\ y'(t) = -\omega^2 \sin x \end{cases}$

À chaque instant t, le vecteur $(x'(t), y'(t))$ ne dépend que de x et de y. Il est indépendant de t. Il s'agit d'un système différentiel autonome (d'ordre 1). Il sera étudié plus loin.

Application 5

Le pendule rigide, sans frottement

Cet exemple vérifie le système différentiel autonome d'ordre 2 $\begin{cases} x'(t) = y \\ y'(t) = -\omega^2 \sin x \end{cases}$

Le pendule étudié étant sans frottement, il conserve son énergie initiale.

Calculer cette énergie en prenant $m = 1\,\text{kg}$. *En déduire les orbites des solutions.*

L'énergie totale du pendule à l'instant t est :

$$E(x, y) = \frac{y^2}{2} + \omega^2(1 - \cos x).$$

Le système s'écrit $\begin{cases} x'(t) = \dfrac{\partial E}{\partial y}(x, y) \\ y'(t) = -\dfrac{\partial E}{\partial x}(x, y) \end{cases}$

La conservation de l'énergie entraîne que les orbites du mouvement sont contenues dans les lignes de niveau de E, d'équations $E(x, y) = C$, avec $C \in \mathbb{R}^+$. Cette courbe est notée Γ_C.

• Si $C = 0, \Gamma_C = \{(2k\pi, 0)\}$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Le pendule est immobile.

• Si $C > 0$, les axes (Ox) et (Oy) sont axes de symétrie de Γ_C qui, de plus, est conservée par toute translation de vecteur $2k\pi\,\vec{i}$, avec k dans $\mathbb{Z}$.

Effectuons l'étude pour $x \in [0, \pi]$ et $y \geqslant 0$.

Si $0 < C < 2\omega^2$, les courbes sont définies sur :

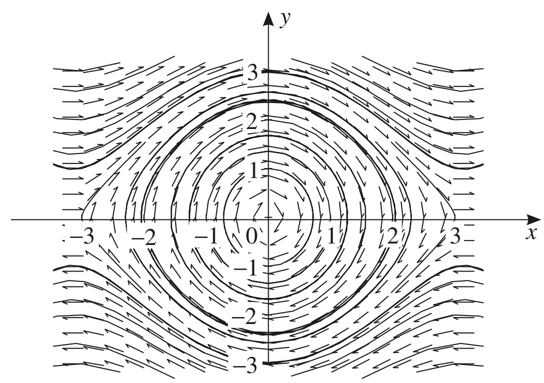
$$\left]-\text{Arccos}\left(1 - \frac{C}{\omega^2}\right) + 2k\pi, \text{Arccos}\left(1 - \frac{C}{\omega^2}\right) + 2k\pi\right[.$$

x	0	$\text{Arccos}\left(1 - \frac{C}{\omega^2}\right)$
y	$\sqrt{2C}$ ↘	0

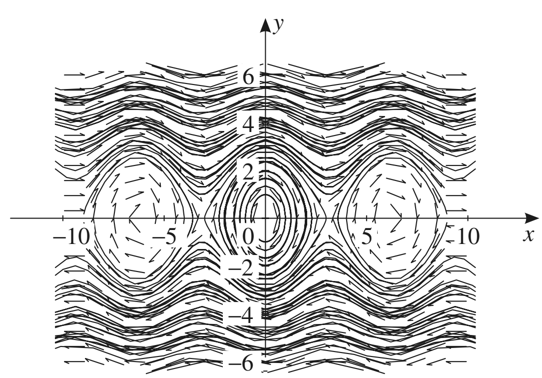
Si $C \geqslant 2\omega^2$, les courbes sont définies sur $\mathbb{R}$.

x	0	π
y	$\sqrt{2C}$ ↘	$\sqrt{2C - 4\omega^2}$

Toute orbite d'une solution maximale est contenue dans une de ces courbes. Réciproquement, chacune de ces courbes est l'orbite d'une solution. L'ensemble de ces courbes est appelé portrait de phases du pendule sans frottement.



Doc. 23. *Portrait de phases du pendule sans frottement.*



Doc. 24. *Portrait de phases du pendule sans frottement à une autre échelle.*

Algorithmique, TD 2

Courbes intégrales d'une équation différentielle polaire

Partie mathématique

Le problème de Cauchy pour une équation différentielle du premier ordre de la forme $y' = f(x, y)$ consiste à déterminer les solutions vérifiant la condition initiale : $y_0 = y(x_0)$, où x_0, y_0 sont donnés.

Les deux méthodes suivantes permettent de calculer une table de valeurs numériques :

a) *Méthode d'Euler* : $y_{i+1} = y_i + h\, f(x_i, y_i)$.

b) *Méthode de Runge-Kutta* : $y_{i+1} = y_i + k_0$, avec :

$$k_0 = \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\ ; \qquad k_1 = f(x_i, y_i)\ ; \qquad k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + k_1\frac{h}{2}\right)\ ;$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + k_2\frac{h}{2}\right)\ ; \qquad k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3 h)\ .$$

Nous allons appliquer ces méthodes à la résolution approchée d'une équation différentielle polaire.

Partie informatique

Écrire les procédures mettant en œuvre ces deux méthodes.

Puis appliquer ces procédures à la résolution approchée des équations différentielles :

- $r' = r\ \tan(5\arctan(\sin\theta)^2)$, $r(-\pi) = 0,2$ (équation de M.G.Gyllström)
- $r' = r\ \sin(3r\theta)$, $r(0) = 1$;

Pour les deux équations suivantes, nous vous laissons la joie de réaliser leur tracé.

- $r' = \tan(8\arctan(\sin\theta))$, $r(-\pi) = 1$;
- $r' = r\ \sin(\theta)$, $r(0) = 0,5$;

```
> restart:with(plots):
> Euler:=proc(f,h,t0,r0,t1)
  local t,r,s;
  s:=NULL;
  r:=r0;
  for t from t0 to t1 by h do
  s:=s,[r,t];
  r:=r+h*f(t,r);
  od;
  plot([s],coords=polar);
  end;
```

Euler := **proc**(*f*, *h*, *t0*, *r0*, *t1*)

local *t*, *r*, *s*;

s := *NULL*;

r := *r0*;

for *t* **from** *t0* **by** *h* **to** *t1* **do** *s* := *s*, [*r*, *t*]; *r* := *r* + *h***f*(*t*, *r*) **od**;

plot([*s*], *coords* = *polar*)

end

```
> RungeKutta:=proc(f,h,t0,r0,t1)
  local t,r,s,k0,k1,k2,k3,k4;
  s:=NULL;
  r:=r0;
  for t from t0 to t1 by h do
    s:=s,[r,t];
    k1:=f(t,r);
    k2:=f(t+h/2,r+k1*h/2);
    k3:=f(t+h/2,r+k2*h/2);
    k4:=f(t+h,r+k3*h);
    k0:=(h/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);
    r:=r+k0;
  od;
  plot([s],coords=polar);
  end;
```

RungeKutta := **proc**(*f*, *h*, *t0*, *r0*, *t1*)

local *t*, *r*, *s*, *k0*, *k1*, *k2*, *k3*, *k4*;

s := *NULL*;

r := *r0*;

for *t* **from** *t0* **by** *h* **to** *t1* **do**

$s := s, [r, t]$;

$k1 := f(t, r)$;

$k2 := f(t + 1 / 2*h, r + 1 / 2*k1*h)$;

$k3 := f(t + 1 / 2*h, r + 1 / 2*k2*h)$;

$k4 := f(t + h, r + k3*h)$;

$k0 := 1 / 6*h*(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)$;

$r := r + k0$

od;

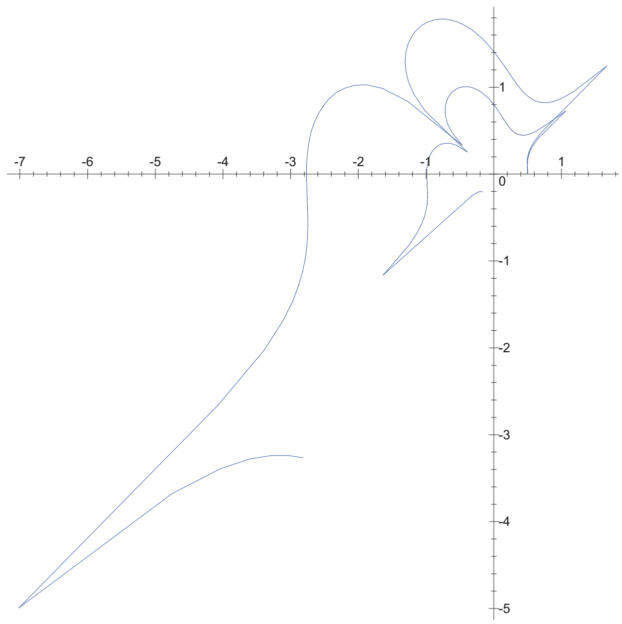
plot([*s*], *coords* = *polar*)

end

```
> f:=(t,r)->r*tan(5*arctan(sin(t)^2));
```

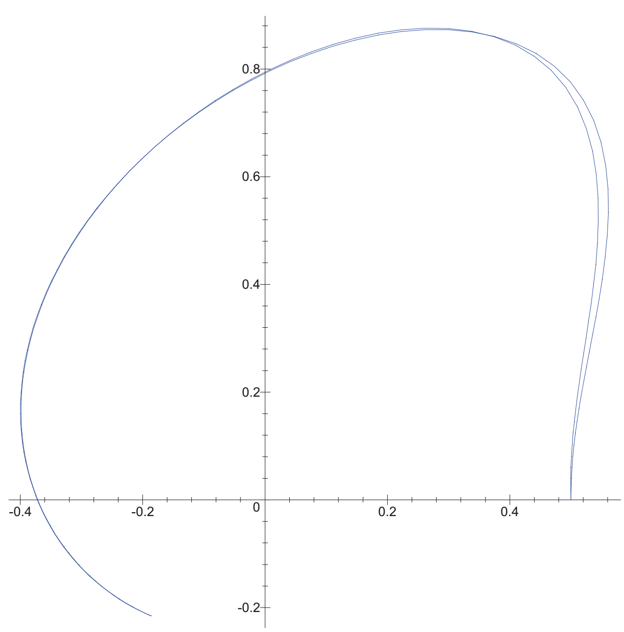
$$f := (t, r) \to r*\tan(5*\arctan(\sin(t)^2))$$

```
> G1:=Euler(f,0.04,0,0.5,4):
  G2:=RungeKutta(f,0.04,0,0.5,4):display({G1,G2});
```




```
> f:=(t,r)->r*sin(3*r*t);
> G1:=Euler(f,0.04,0,0.5,4):
  G2:=RungeKutta(f,0.04,0,0.5,4):display({G1,G2});
```

$$f := (t, r) \to r \sin(3\, r\, t)$$



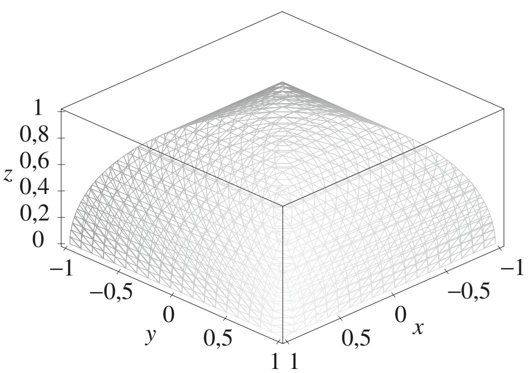
Exercice résolu

Voûte en arc de cloître et voûte d'arête

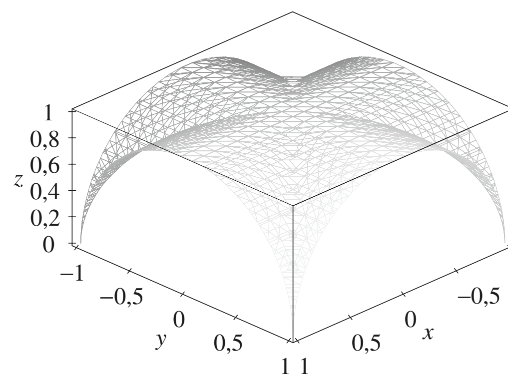
ÉNONCÉ

Pour Piero della Francesca (environ 1410-1492, peintre italien), la voûte en arc de cloître et la voûte d'arête sont des surfaces délimitées par l'intersection à angle droit de deux demi-cylindres de même rayon r. La voûte en arc de cloître est la surface intérieure et la voûte d'arête est la surface extérieure.

voûte en arc de cloître



voûte d'arête



Par des considérations intuitives qu'il justifie, Piero della Francesca calcule le volume contenu sous la voûte en arc de cloître et trouve $\dfrac{8r^3}{3}$. Il calcule également la surface de la voûte d'arête $4r^2(\pi - 2)$.

On trouve le détail de sa démarche dans *Pour la science*, n ° 224.

Vérifions ses résultats en prenant $r = 1$ unité de longueur.

1) Calculer le volume contenu sous la voûte en arc de cloître.

2) Calculer le volume contenu sous la voûte d'arête.

CONSEILS

Le volume étudié est, par raison de symétries, huit fois le volume décrit comme suit.
On se place :
- au dessus du plan d'équation $z = 0$,
- sous le cylindre d'équation $y^2 + z^2 = 1$,
- entre les plans verticaux d'équations $x = 0$ et $x = y$.

Utiliser un descriptif du volume étudié similaire à celui de la question précédente.

SOLUTION

1) Soit $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leqslant x \leqslant 1, x \leqslant y \leqslant 1\}$,
et $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y) \in K$ et $z \in [0, \sqrt{1 - y^2}]\}$
Le volume contenu sous la voûte en arc de cloître est :

$$8 \iiint_W \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 8 \iint_K \left(\int_0^{(1-y^2)^{1/2}} \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{8}{3} \text{ unités de volume.}$$

2) Soit $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant x\}$,
et $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y) \in L$ et $z \in [0, \sqrt{1 - y^2}]\}$
Le volume contenu sous la voûte d'arête est :

$$8 \iiint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 8 \iint_L \left(\int_0^{(1-y^2)^{1/2}} \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= 2\pi - \frac{8}{3} \text{ unités de volume.}$$

Exercices

1 Soit Γ, l'arc d'hélice paramétré par $t \in [0, 2\pi]$ et

$$x = R\cos t, y = R\sin t, z = ht.$$

Calculer $I = \displaystyle\int_{\overset{\frown}{\Gamma}} (y-z)\,\mathrm{d}x + (z-x)\,\mathrm{d}y + (x-y)\,\mathrm{d}z.$

2 Soit ω la forme différentielle :

$$\omega = (3x^2y + z^3)\,\mathrm{d}x + (3y^2z + x^3)\,\mathrm{d}y + (3xz^2 + y^3)\,\mathrm{d}z.$$

Montrer que cette forme différentielle est fermée.

Trouver ses primitives dans $\mathbb{R}^3$.

3 Tracer la strophoïde d'équation polaire :

$$r = \frac{\cos(2\theta + \frac{\pi}{4})}{\cos\theta}.$$

Déterminer l'aire de la boucle.

4 Soit a et b deux réels strictement plus grands que 1.

Déterminer l'aire du compact D du quart de plan $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$ délimité par les droites d'équations $y = ax$ et $y = \dfrac{1}{a}x$ et les hyperboles d'équations $y = \dfrac{b}{x}$ et $y = \dfrac{1}{bx}$.

5 Déterminer les coordonnées du centre de gravité d'une demi-sphère homogène.

6 Déterminer le volume intérieur à l'ellipsoïde d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

où a, b et c désignent trois réels strictement positifs.

7 Calculer :

$$\iint_K (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

avec $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \geqslant 0, y \geqslant 0, x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ par trois méthodes : calcul direct, changement de variables, formule de Green-Riemann.

8 Déterminer l'aire du triangle ABC, où les points A, B et C ont pour coordonnées $(-1, 0)$, $(1, -1)$ et $(3, 1)$.

9 Résoudre l'équation différentielle $y' = \operatorname{sh} y$.

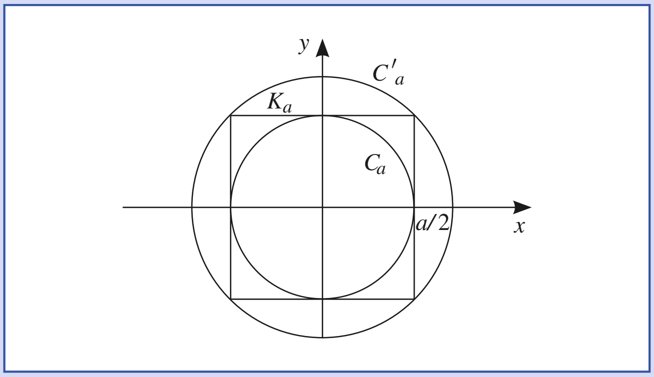
10 Calcul de l'intégrale de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Soit $a > 0$ fixé, K_a le carré de centre O et de côté a, $C_{a/2}$ le cercle de centre O et de rayon $\dfrac{a}{2}$, C'_a le cercle de centre O et de rayon $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

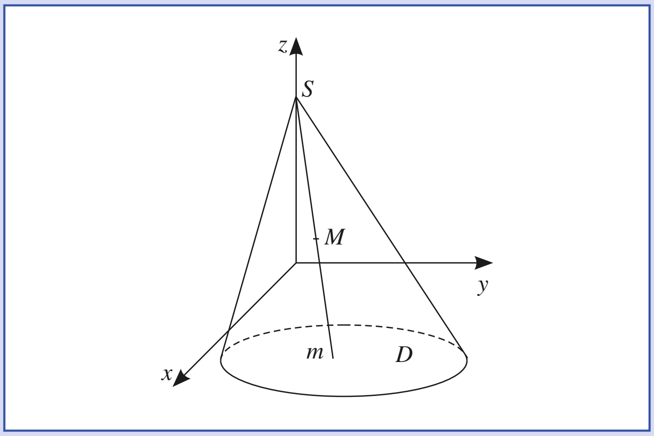
Comparer les intégrales sur ces domaines de la fonction :

$$(x, y) \mapsto \mathrm{e}^{-x^2-y^2}.$$

En déduire $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.



11 **1)** Déterminer une représentation paramétrique du cône C de base D, compact élémentaire du plan xOy, et de sommet $S(0, 0, h)(h \neq 0)$ situé sur (Oz).



2) Calculer le volume de ce cône.

12 Résoudre l'équation différentielle $y' = \sin y$.

13 Soit f la solution maximale de l'équation différentielle $y' = \mathrm{e}^{-xy}$ telle que $f(0) = 0$.

1) Montrer que f est impaire.

2) Montrer qu'elle est définie sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que f possède en $+\infty$ une limite ℓ appartenant à $\left[1, 1 + \dfrac{1}{e}\right]$.

14* Le point matériel M se déplace sur un axe $(y'\,Oy)$ en étant soumis à une force d'attraction newtonienne :

$$\overrightarrow{F} = -\omega^2 \frac{\overrightarrow{OM}}{||\overrightarrow{OM}||^2}.$$

On note $y(t)$ la position du point M à l'instant $t \geqslant 0$.

On suppose que $y(0) = y_0 > 0$ et on note $y'(0) = y_0'$.

Étudier le mouvement du point M.

15** On considère l'équation différentielle :

$$x'(t) = \sin(tx) \qquad \textbf{(1)}.$$

1) Montrer que les solutions maximales de **(1)** sont définies sur $\mathbb{R}$.

2) Pour tout réel b, on note x_b la solution maximale de l'équation vérifiant $x(0) = b$.

Étudier la parité de x_b. Quelle relation lie x_b et x_{-b} ?

Dans toute la suite, on suppose $b > 0$.

3) Montrer que, pour tout t réel, on a : $x_b(t) > 0$.

4) Pour k dans $\mathbb{N}$, on note :

$$\Gamma_k = \{(t, x) \in (\mathbb{R}^+)^2 ; xt = k\pi\}.$$

On définit l'application f_b de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, continue et affine par morceaux de la manière suivante :

$$f_b(0) = b\ ;$$

entre Γ_{2k} et Γ_{2k+1}, le graphe de f_b est un segment parallèle à la première bissectrice ; entre Γ_{2k+1} et Γ_{2k+2}, le graphe de f_b est un segment parallèle à l'axe des t.

Montrer que : $\forall\, t \geqslant 0 \quad x_b(t) \leqslant f_b(t)$.

5) Montrer que le graphe de f_b rencontre la première bissectrice. En déduire qu'il existe $t_0 > 0$ tel que : $x_b(t_0) = t_0$. Montrer que :

$$(\forall\, t < t_0 \quad x_b(t) > t) \quad \text{et} \quad (\forall\, t > t_0 \quad x_b(t) < t).$$

$\mathcal{TD}$: indications et réponses

Chapitre 4

1) On a vu en algèbre que :

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \prod_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \neq j}} \left(\frac{x - x_k}{x_j - x_k} \right).$$

A) 1) La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a, b]$ et s'annule en $n+2$ points distincts de $[a, b]$, x et les $n+1$ points x_j. Appliquons le *théorème de Rolle* à φ. Sa dérivée φ' s'annule en $n+1$ points distincts de $[a, b]$. Une récurrence simple permet alors d'établir que, pour tout k de $[\![0, n+1]\!]$, la dérivée k-ième de φ, $\varphi^{(k)}$, s'annule en $n+2-k$ points distincts de $[a, b]$. Il existe donc v dans $[a, b]$ tel que $\varphi^{(n+1)}(v) = 0$. Or :

$$\varphi^{(n+1)}(v) = f^{(n+1)}(v) - P_n^{(n+1)}(v) - \frac{f(x) - P_n(x)}{q_n(x)} q_n^{(n+1)}(v).$$

De plus, le polynôme $P_n^{(n+1)}$ est nul car P_n est un polynôme de degré n, et $q_n^{(n+1)} = (n+1)!$.
On obtient :

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(v)}{(n+1)!} q_n(x).$$

2) D'après la question précédente, on peut écrire, pour tout x de $[a, b]$:

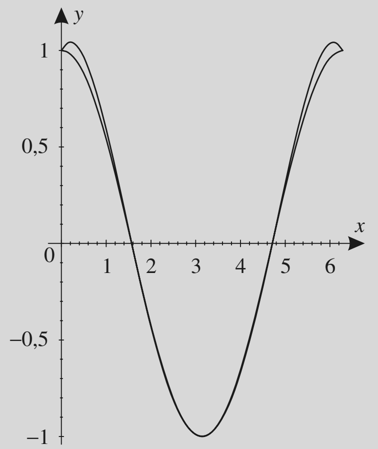
$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!} |q_n(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}.$$

On remarque que $\dfrac{M}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$ ne dépend pas de x et que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{M}{(n+1)!} (b-a)^{n+1} = 0.$$

La suite de fonctions (P_n) approche donc uniformément f sur $[a, b]$. La fonction cosinus fournit un exemple. Prenons $[a, b] = [0, 2\pi]$.

Avec Maple




```
>restart :with(plots) :
>Lagrange :=proc(f,a,b,N)
local absc,k,P ;
absc :=[seq(a+k*(b-a)/(N+1),k=0..N)] ;
P :=interp(absc,[seq(subs(x=k,f),k=absc)],x) ;
plot({f,P},x=a..b) ;
end ;
```

$Lagrange :=$ proc(f, a, b, N)
local $absc, k, P$;
$absc := [seq(a + k * (b-a)/(N+1), k = 0..(N+1))]$;
$P :=$ interp$(absc, [$seq(subs$(x = k, f), k = absc)], x)$;
plot$(\{f, P\}, x = a..b)$;
end

```
>Lagrange(cos(x),0,2*Pi,3) ;
```

B) 1) Effectuons une récurrence sur q.
Pour $q = 1$, on a $p = 0$ et la propriété est vérifiée.
Supposons que, pour un certain $q \geqslant 1$ fixé, la relation **(1)** soit vérifiée pour tout p de $[\![0, q-1]\!]$.
Établissons cette propriété au rang $q+1$ fixé. Dans ce but, on va faire une récurrence sur p.
Au rang $q+1$, la relation **(1)** est vérifiée pour $p = 0$.
Supposons que, pour un certain $p-1$ de $[\![0, q]\!]$, on ait :

$$\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \binom{q+1}{k} \frac{q-2k}{k+1} = 1 + (-1)^{p-1} \binom{q}{p-1} \frac{q-2p+1}{p}.$$

En déduire la relation au rang p.

2) Notons, pour tout j de $[\![0, n]\!]$, L_j le polynôme défini par :

$$L_j(x) = \prod_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \neq j}} \frac{(x - x_k)}{(x_j - x_k)}.$$

Alors :

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} |x_j| \, L_j(x).$$

De plus, pour tout j de $[\![0, m]\!]$, $|x_j| = 1 - \dfrac{2j}{n+1}$ et, pour tout j de $[\![m+1, n]\!]$: $|x_j| = \dfrac{2j}{n+1} - 1$. On en déduit :

$$P_n(1) = \sum_{j=0}^{m} \left(1 - \frac{2j}{n+1}\right) L_j(1) - \sum_{j=m+1}^{n} \left(1 - \frac{2j}{n+1}\right) L_j(1).$$

$$L_j(1) = (-1)^{n-j} \binom{n+1}{j}.$$

Donc :

$$P_n(1) = \sum_{j=0}^{m}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}\frac{n+1-2j}{n+1-j}$$
$$- \sum_{j=m+1}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}\frac{n+1-2j}{n+1-j}.$$

Posons $k = n - j$. En distinguant le cas n pair et le cas n impair, vérifier que :

$$P_n(1) = A(n) - B(n).$$

3) $A(n) + B(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{n-2k-1}{k+1}$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{n-2k-1}{k+1} + (-1)^n\binom{n}{n}\frac{n-2n-1}{n+1}$$

Or, la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{n-2k-1}{k+1}$ peut être calculée en utilisant la question **1)**.

$$A(n) + B(n) = 1.$$

Le système $\begin{cases} A(n) - B(n) = P_n(1) \\ A(n) + B(n) \ = 1 \end{cases}$ donne :

$$P_n(1) = 2A(n) - 1.$$

En utilisant la formule **(1)**, on obtient :

$$P_n(1) = 1 + (-1)^m 2\binom{n-1}{m}\frac{n-2m-2}{m+1}.$$

4) Si n est pair, $n = 2k$, $m = k$ et :

$$P_n(1) = 1 + (-1)^k 2\binom{2k-1}{k}\frac{-2}{k+1}$$
$$= 1 + 2(-1)^{k+1}\frac{(2k)!}{k!(k+1)!}.$$

5) Si n est impair, $n = 2k+1$, $m = k$ et :

$$P_n(1) = 1 + 2(-1)^k\binom{2k}{k}\frac{-1}{k+1} = 1 + 2(-1)^{k+1}\frac{(2k)!}{k!(k+1)!}.$$

Dans tous les cas :

$$|f(1) - P_n(1)| = 2\frac{(2k)!}{k!(k+1)!}.$$

Utilisons la formule de Stirling.

$$|f(1) - P_n(1)| = 2\frac{(2k)!}{k!(k+1)!} \sim \frac{2^{2k+1}}{\sqrt{\pi}\,k^{3/2}}.$$

6) Puisque $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\frac{2^{2k+1}}{\sqrt{\pi}\,k^{3/2}} = +\infty$, la suite $(P_n(1))$ diverge et la suite (P_n) n'est pas simplement convergente sur $[-1, 1]$.

Avec Maple

```
> restart :with(plots) :Lagrange :=proc(f,a,b,N)
local absc,k,P ;
absc :=[seq(a+k*(b-a)/(N+1),k=0..(N))] ;
P :=interp(absc,[seq(subs(x=k,f),k=absc)],x) ;
plot({f,P},x=a..b) ;
end ;
>
> Lagrange(abs(x),-1,1,5) ;
```

Lagrange := **proc**(f, a, b, N)

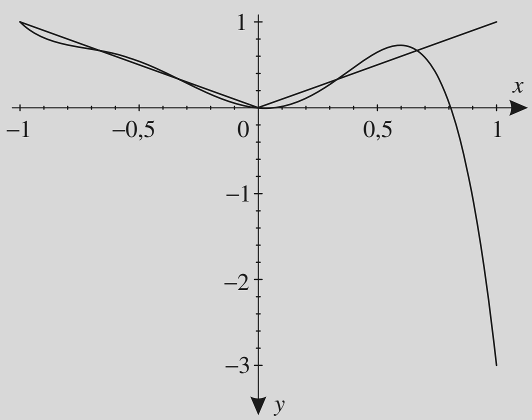
local *absc*, k, P;

absc := [seq($a + k \times (b-a)/(N+1)$, $k = 0..N$)];

P := interp(*absc*, [seq(subs($x = k$, f), k = *absc*)], x);

plot($\{f, P\}$, $x = a..b$)

end



Chapitre 5

I.1) $((.,.))$ est une forme bilinéaire symétrique sur E.

Pour tout f de E, $((f, f)) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f^2(x)\,w(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

Supposons que $((f, f)) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f^2(x)\,w(x)\,\mathrm{d}x = 0$. L'application $(x \mapsto f^2(x)\,w(x))$ est continue et positive sur $[-1, 1]$ et $w > 0$; donc $f = 0$.

Ceci prouve que $((.,.))$ est un produit scalaire sur E.

I.2) Supposons l'existence de deux suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant **(a)** et **(b)**.

D'après **(a)** $p_0 = q_0 = 1$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, l'orthogonal de P_{n-1} dans P_n est une droite, car $\dim(P_n) - \dim(P_{n-1}) = 1$. D'après **(b)**, les polynômes p_n et q_n sont dans cet orthogonal, donc ils sont liés. On déduit alors de **(a)** que $p_n = q_n$. Donc la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si elle existe, est unique.

I.3) On a déjà montré que $p_0 = 1$.

Si p_1 existe, d'après **(a)**, $p_1(x) = x + b$ et, d'après **(b)**,

$0 = ((p_0, p_1))$. Donc :

$$0 = \int_{-1}^{1} (x+b)\, w(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} x\, w(x)\,\mathrm{d}x + b\int_{-1}^{1} w(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= ((p_0, x)) + b\,((p_0, p_0)).$$

On en déduit $b = -\dfrac{((p_0, x))}{((p_0, p_0))}$.

I.4) Supposons connus, pour $m \leqslant n-1$, les polynômes p_m et posons :

$$p = (x - \alpha_n)\, p_{n-1} - \beta_n\, p_{n-2}$$

Le polynôme p_m est unitaire de degré m, donc p est un polynôme unitaire de degré n.
Il reste à prouver que, pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $((p, p_k)) = 0$.
Or $((p, p_k)) = ((xp_{n-1}, p_k)) - \alpha_n\,((p_{n-1}, p_k)) - \beta_n\,((p_{n-2}, p_k))$.
Vous vérifierez que $((xp_{n-1}, p_k)) = ((p_{n-1}, xp_k))$.
Pour $k \leqslant n-3$, $((x\,p_{n-1}, p_k)) = ((p_{n-1}, x\,p_k)) = 0$ car $\deg(x\,p_k) < n-1$ et $((p_{n-1}, p_k)) = ((p_{n-2}, p_k)) = 0$.
Donc $((p, p_k)) = 0$.
Pour $k = n-2$:

$$\begin{aligned}((p, p_{n-2})) &= ((x\,p_{n-1}, p_{n-2})) - \alpha_n\,((p_{n-1}, p_{n-2})) \\ &\qquad - \beta_n\,((p_{n-2}, p_{n-2})) \\ &= ((p_{n-1}, x\,p_{n-2})) - \frac{((p_{n-1}, p_{n-1}))}{((p_{n-2}, p_{n-2}))}((p_{n-2}, p_{n-2}))\end{aligned}$$

Or, $x\,p_{n-2}$ est un polynôme unitaire de degré $n-1$. Donc :

$$x\,p_{n-2} = p_{n-1} + q_{n-2}, \quad \text{avec} \quad \deg(q_{n-2}) < n-1.$$

Ainsi : $((p_{n-1}, x\,p_{n-2})) = ((p_{n-1}, p_{n-1})) + ((p_{n-1}, q_{n-2}))$
$= ((p_{n-1}, p_{n-1}))$.

Donc $((p, p_{n-2})) = 0$.
Pour $k = n-1$,

$$\begin{aligned}((p, p_{n-1})) &= ((x\,p_{n-1}, p_{n-1})) - \alpha_n\,((p_{n-1}, p_{n-1})) \\ &\qquad - \beta_n\,((p_{n-2}, p_{n-1})) \\ &= ((xp_{n-1}, p_{n-1})) - \frac{((x\,p_{n-1}, p_{n-1}))}{((p_{n-1}, p_{n-1}))}((p_{n-1}, p_{n-1})) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Donc $((p, p_{n-1})) = 0$.
On a prouvé que p vérifie **(a)** et **(b)**. D'où $p = p_n$.
On connaît p_0 et p_1, la formule **(2)** permet de construire la suite (p_n) par récurrence.

I.5) Quelques calculs d'intégrales vous permettront de dresser le tableau suivant :

$p_0(x) = 1$	$((p_0, p_0)) = 2$		$((x\,p_0, p_0)) = 0$
$p_1(x) = x$	$((p_1, p_1)) = \frac{2}{3}$	$\beta_2 = \frac{1}{3}$	$((x\,p_1, p_1)) = 0$
$p_2(x) = x\,p_1(x) - \frac{1}{3}\,p_0(x) = x^2 - \frac{1}{3}$	$((p_2, p_2)) = \frac{8}{45}$	$\beta_3 = \frac{4}{15}$	$((x\,p_2, p_2)) = 0$
$p_3(x) = x\,p_2(x) - \frac{4}{15}\,p_1(x) = x^3 - \frac{3}{5}\,x$	$((p_3, p_3)) = \frac{8}{175}$	$\beta_4 = \frac{9}{35}$	$((x\,p_3, p_3)) = 0$
$p_4(x) = x\,p_3(x) - \frac{9}{35}\,p_2(x) = x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}$			

I.6) Pour tout $n \geqslant 1$, $((p_n, p_0)) = 0 = \displaystyle\int_{-1}^{1} p_n(x)\, w(x)\,\mathrm{d}x$. La fonction $p_n\,w$ change de signe sur $]-1, 1[$. Or $w > 0$, donc p_n s'annule et change de signe sur $]-1, 1[$.
Vous vérifierez aisément que, si le polynôme p_n s'annule et change de signe en α, c'est que α est un zéro de multiplicité impaire de p_n. D'où le résultat.

I.7) Par construction de π, $m = \deg \pi \leqslant n$.
De plus, le polynôme $p\,\pi$ n'a pas de zéro de multiplicité impaire sur $]-1, 1[$. Il est donc de signe constant sur cet intervalle et :

$$((p_n, \pi)) = \int_{-1}^{1} p_n(x)\,\pi(x)\,w(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$$

$\deg \pi < n$, entraîne $((p_n, \pi)) = 0$. On a donc $\deg \pi = n$ et p_n admet n zéros distincts dans $]-1, 1[$. Il ne peut pas en avoir d'autres.

II.1) La linéarité de Δ est immédiate à vérifier.
Conseil : relire le *chapitre* 3 d'*Analyse* où l'étude de la continuité des applications linéaires est traitée.
• Pour tout f de E, on a :

$$|\Delta(f)| \leqslant \|f\|_\infty \left(\int_{-1}^{1} w(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{i=0}^{k} |\lambda_i|\right).$$

On note $c = \left(\displaystyle\int_{-1}^{1} w(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{i=0}^{k} |\lambda_i|\right)$. La linéarité de Δ permet de conclure que cette application est c-lipschitzienne.

II.2) Supposons la formule **(3)** (formule d'intégration approchée à $k+1$ points) d'ordre m, avec $m \geqslant 2k+2$ et trouvons une contradiction.
Pour tout polynôme p de degré $d \leqslant 2k+2$, l'égalité :

$$\sum_{i=0}^{k} \lambda_i\, p(x_i) = \int_{-1}^{1} p(x)\,w(x)\,\mathrm{d}x$$

est vérifiée.

Notons $L = \displaystyle\prod_{i=0}^{k} (x - x_i)$. On a $\deg L^2 = 2k+2$; donc :

$$\sum_{i=0}^{k} \lambda_i\, L^2(x_i) = \int_{-1}^{1} L^2(x)\,w(x)\,\mathrm{d}x$$

Or $L(x_i) = 0$, donc $\displaystyle\int_{-1}^{1} L^2(x)\,w(x)\,\mathrm{d}x = 0$, d'où la contradiction.
L'ordre m d'une formule d'intégration approchée à $k+1$ points est nécessairement inférieur ou égal à $2k+1$.

II.3) Par construction, $\deg\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{k} f(x_i)\,l_i\right) \leqslant k$. De plus :

$$\forall\, j \in \{0, \dots, k\} \quad l_i(x_j) = \delta_{i,j} \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{k} f(x_i)\,l_i(x_j) = f(x_j)$$

C'est la définition du polynôme d'interpolation de Lagrange aux points $x_0, \dots, x_k$. Donc :

$$p(f) = \sum_{i=0}^{k} f(x_i)\,l_i$$

II.4) $$\int_{-1}^{1} p(f)(x)\,w(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{k} f(x_i)\int_{-1}^{1} l_i(x)\,w(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i\, f(x_i).$$

II.5) On sait que, pour tout polynôme f de P_k, $f = p(f)$. Donc, dans ce cas et d'après la *question* **II.4**, on a :
$$\int_{-1}^{1} f(x)\,w(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i\, f(x_i)$$
Ceci prouve que la formule **(3)** est au moins d'ordre k.

II.6) Dans la fin de cette partie, on fixe p dans P_{2k+1}.
Effectuons la division euclidienne de p par l : $p = q\,l + r$.
On sait que $\deg r < \deg l = k+1$, donc $r \in P_k$. De plus $\deg p \leqslant 2k+1$. Ceci entraîne que $q \in P_k$.

II.7) $$\int_{-1}^{1} p(x)\,w(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} r(x)\,w(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} q(x)\,l(x)\,w(x)\,\mathrm{d}x.$$

Or $\int_{-1}^{1} q(x)\,l(x)\,w(x)\,\mathrm{d}x = ((q,l))$ et, par définition des x_i, l et p_{k+1} sont deux polynômes unitaires de même degré et ayant les mêmes racines. Donc $l = p_{k+1}$ et $((q, p_{k+1})) = 0$, car $q \in P_k$.
On a bien : $\int_{-1}^{1} p(x)\,w(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} r(x)\,w(x)\,\mathrm{d}x$.

II.8) Puisque r est de degré $\leqslant k$, $\int_{-1}^{1} r(x)\,w(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i\, r(x_i)$ d'après la *question* II.5.
De plus, pour tout i de $\{0, \ldots, k\}$, $l(x_i) = 0$ et $r(x_i) = p(x_i)$.
Donc :
$$\int_{-1}^{1} p(x)\,w(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} r(x)\,w(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i\, p(x_i)$$
On a prouvé que, pour tout p de P_{2k+1} :
$$\int_{-1}^{1} p(x)\,w(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i\, p(x_i).$$

Pour le choix indiqué des $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant k}$ (les racines de p_{k+1}) et des $(\lambda_i)_{0\leqslant i\leqslant k}$ ($\lambda_i = \int_{-1}^{1} l_i(x)\,w(x)\,\mathrm{d}x$), la formule **(3)** est d'ordre $2k+1$.

III.1) Sachant que $p_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x$, on a $x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$, $x_1 = 0$ et $x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}$. On en déduit :

$$l_0(x) = \frac{5}{6}\left(x^2 - \sqrt{\frac{3}{5}}\,x\right),\ \lambda_0 = \int_{-1}^{1} \frac{5}{6}\left(x^2 - \sqrt{\frac{3}{5}}\,x\right)\mathrm{d}x = \frac{5}{9}$$
$$l_1(x) = -\frac{5}{3}\left(x^2 - \frac{3}{5}\right),\quad \lambda_1 = \int_{-1}^{1} -\frac{5}{3}\left(x^2 - \frac{3}{5}\right)\mathrm{d}x = \frac{8}{9}$$
$$l_2(x) = \frac{5}{6}\left(x^2 + \sqrt{\frac{3}{5}}\,x\right),\ \lambda_2 = \int_{-1}^{1} \frac{5}{6}\left(x^2 + \sqrt{\frac{3}{5}}\,x\right)\mathrm{d}x = \frac{5}{9}$$

La formule théorique **(9)** devient alors **(10)** :
$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{9}\left[5\,f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + 8\,f(0) + 5\,f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right]$$

III.2) En remplaçant k par 2 dans **(9)**, on trouve :
$$|\Delta(f)| \leqslant \frac{1}{15750}\| f^{(6)}\|_\infty.$$

III.3) On trouve : $\int_{-1}^{1} \sqrt{2+x}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}$. (Poser $u = \sqrt{2+x}$ pour faire le calcul « à la main ».)

III.4) Le calcul de $f^{(6)}$ nous donne : $\| f^{(6)}\|_\infty = \frac{945}{64}$. Donc :
$$|\Delta(f)| \leqslant \frac{3}{3\,200} = 9{,}375\,10^{-4}.$$

III.5) Le nombre de chiffres significatifs se trouve grâce à l'erreur relative.
$$\left|\frac{\Delta(f)}{\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x}\right| \approx 3{,}5\,10^{-4}.$$
On se contentera de donner le second membre de **(10)** avec 4 chiffres significatifs.

III.6) On trouve :
$$\frac{1}{9}\left[5\,f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + 8\,f(0) + 5\,f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right] \approx 2{,}797$$
et
$$\Delta(f) \approx -2{,}8\,10^{-5}.$$
L'approximation est meilleure que la majoration théorique **(9)**.

III.7) On a :
$$\frac{1}{3}[\,f(-1) + 4f(0) + f(1)] \approx 2{,}976$$
et :
$$\left|\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}[\,f(-1) + 4\,f(0) + f(1)]\right| \approx 0{,}001.$$
La formule de Simpson **(11)** est une formule à trois points d'ordre 3 seulement. En effet :
$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}[\,f(-1) + 4\,f(0) + f(1)]$$
pour $f = 1, x, x^2$ et x^3 mais pas pour x^4.
La formule **(10)** est aussi une formule à 3 points, mais elle est d'ordre 5.
On constate, sur l'exemple utilisé, que la formule d'ordre 5 est meilleure que la formule d'ordre 3.
Dans **(10)**, on a optimisé le choix des points d'interpolation et des coefficients. Cette formule est une égalité pour les polynômes de degré $\leqslant 5$. Il est logique de penser que, plus le degré de l'interpolation possible est élevé, meilleure est l'approximation de l'intégrale.

Chapitre 6

TD 1

A. 1) La construction par récurrence de la suite (u_n) est possible car, pour tout x de F, $f(x)$ est dans F.

2) On remarque que, pour tout entier i :

$$\|u_i - u_{i+1}\| = \|f(u_{i-1}) - f(u_i)\| \leqslant k\|u_{i-1} - u_i\|.$$

On en déduit par récurrence que :

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \|u_i - u_{i+1}\| \leqslant k^i\|u_0 - u_1\| \qquad \textbf{(2)}$$

Si n et p sont deux entiers, alors :

$$\|u_n - u_{n+p}\| = \left\|\sum_{i=n+1}^{n+p}(u_{i-1} - u_i)\right\| \leqslant \frac{k^n}{1-k}\|u_0 - u_1\| \qquad \textbf{(3)}$$

(u_n) est une suite de Cauchy de $(E, \| \ \|)$.
La suite (u_n) est donc une suite d'éléments de F qui converge dans $(E, \| \ \|)$. Sa limite est dans F car F est un fermé de $(E, \| \ \|)$.

3) L'application f est continue sur F car lipschitzienne. La suite récurrente (u_n) converge vers ℓ, donc $\ell = f(\ell)$. ℓ est un point fixe de f.
Si ℓ et m sont deux points fixes de f, alors :

$$\|\ell - m\| = \|f(\ell) - f(m)\| \leqslant k\|\ell - m\| < \|\ell - m\|.$$

On en déduit $\ell = m$.

4) $$\|u_n - u_{n+p}\| \leqslant \frac{k^n}{1-k}\|u_0 - u_1\|.$$

Cette inégalité est valable pour tout n et tout p. Il suffit de fixer n et de faire tendre p vers $+\infty$ pour obtenir :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|u_n - l\| \leqslant \frac{k^n}{1-k}\|u_0 - u_1\| \qquad \textbf{(4)}$$

B. 1) Immédiat, car $f(\ell) = \ell$.

2) On a $|f'(l)| = \gamma < 1$ et f est de classe $\mathcal{C}^1$. Donc il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout y de $[\ell-\alpha, l+\alpha] \cap I$, $|f'(y)| \leqslant \dfrac{\gamma+1}{2}$.

• On peut choisir α pour que $J = [\ell - \alpha, \ell + \alpha] \cap I$ soit un fermé de $\mathbb{R}$.
• On note $k = \dfrac{\gamma+1}{2}$. D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout x de $[l - \alpha, l + \alpha] \cap I$, on a :

$$|f(x) - l| = |f(x) - f(l)| \leqslant k|x - l| \leqslant k\alpha$$

On en déduit que l'intervalle J est stable par f.
La restriction de f à J est k-lipschitzienne car, sur J, $|f'|$ est bornée par k et $k < 1$.
Donc la restriction de f à J est une application contractante de J et, d'après **A.**, ℓ est un point fixe attractif de f.

3) On suppose que $|f'(\ell)| = \gamma > 1$; on note $r = \dfrac{\gamma+1}{2}$.
Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall y \in [\ell - \alpha, l + \alpha] \cap I \quad |f'(y)| \geqslant r.$$

Si la suite récurrente (u_n) converge vers ℓ, alors il existe un entier n_0 tel que :

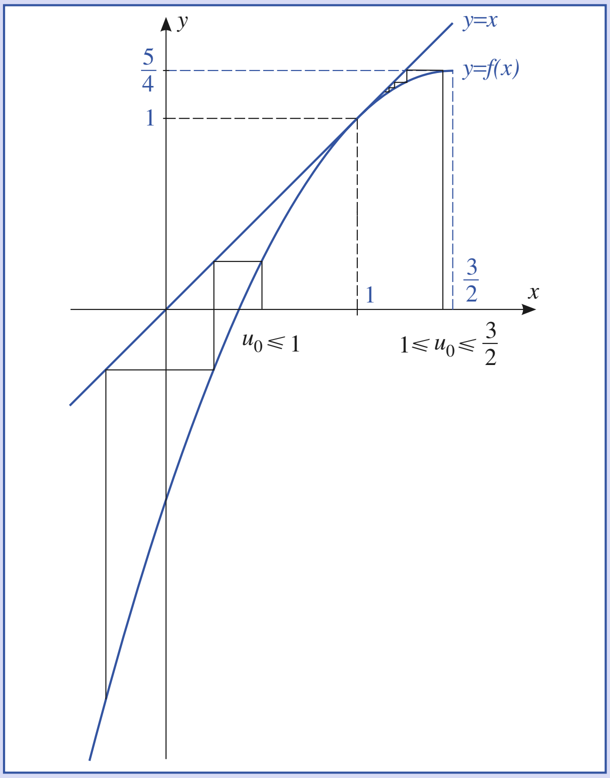
$$n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \alpha.$$

L'égalité des accroissements finis vous permettra de prouver par récurrence que :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad |u_{n_0+p} - \ell| \geqslant r^p|u_{n_0} - \ell|.$$

Or $\lim\limits_{p\to+\infty} |u_{n_0+p} - \ell| = 0$ et $\lim\limits_{p\to+\infty} r^p = +\infty$, donc $|u_{n_0} - \ell| = 0$ et la suite (u_n) est constante à partir de n_0.

4) a) $f(x) = -x^2 + 3x - 1$ et $l = 1$.

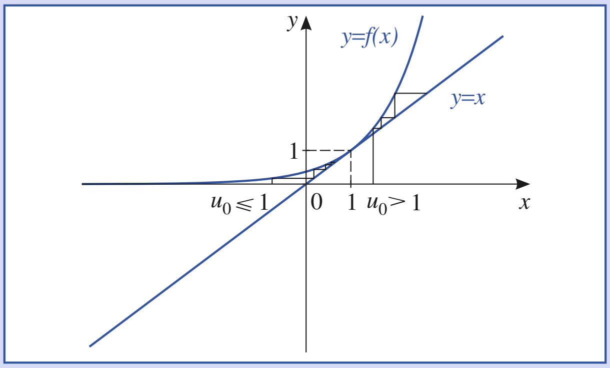


$f\left(\left]-\infty, \dfrac{3}{2}\right]\right) \subset \left]-\infty, \dfrac{3}{2}\right]$ et, sur cet intervalle, $f(x) \leqslant x$.

Donc, si $u_0 \in \left]-\infty, \dfrac{3}{2}\right]$, la suite récurrente (u_n) est décroissante. Elle converge si $u_0 \in \left[1, \dfrac{3}{2}\right]$ et diverge si $u_0 \in \left]-\infty, 1\right[$.

Le point fixe $\ell = 1$ n'est ni attractif ni répulsif.

b) $f(x) = e^{(x-1)}$ et $\ell = 1$.



Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) \geqslant x$, donc la suite récurrente (u_n) est toujours croissante. Elle converge si $u_0 \in]-\infty, 1]$ et diverge si $u_0 \in]1, +\infty[$.

Le point fixe $\ell = 1$ n'est ni attractif ni répulsif.

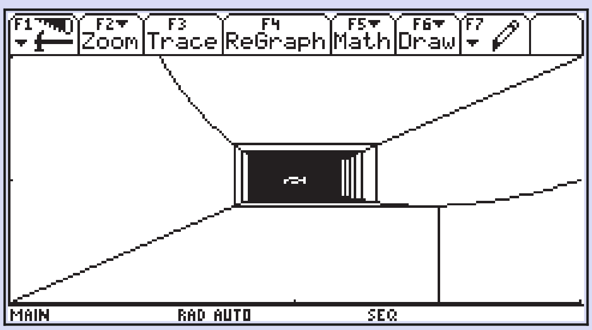
c) $f(x) = \text{Arctan}\,(x)$ et $\ell = 0$.

Le point fixe $\ell = 0$ est attractif.

d) $f(x) = x^3 + x$ et $\ell = 0$.

Le point fixe $l = 0$ est répulsif.

e) $f(x) = \dfrac{1}{x} + 0{,}5(x-1)^2$ et $\ell = 1$.

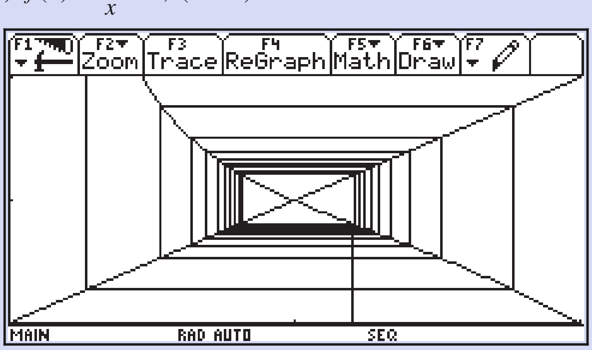


L'étude expérimentale semble indiquer un point fixe attractif. La fenêtre utilisée est $(x, y) \in [0, 2] \times [0, 2]$.
Vérifier que :

$$f(x) =_1 1 - (x-1) + 1{,}5(x-1)^2 - (x-1)^3 + o(x-1)^3$$
$$f \circ f(x) =_1 1 + (x-1) - 2{,}5(x-1)^3 + o(x-1)^3.$$

Montrer que 1 est un point fixe attractif de $f \circ f$, puis de f.

f) $f(x) = \dfrac{1}{x} - 0{,}5(x-1)^2$ et $\ell = 1$.



L'étude expérimentale semble indiquer un point fixe répulsif, ce qu'il faudra prouver.

C.1) • $|f'(l)| = \gamma$ et f' est continue en ℓ, donc il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall x \in [\ell - \delta, \ell + \delta] \quad \gamma - \varepsilon \leqslant |f'(x)| \leqslant \gamma + \varepsilon.$$

• La suite récurrente (u_n) converge vers ℓ, donc il existe un entier n tel que :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad u_{n+p} \in [\ell - \delta, \ell + \delta].$$

• D'après l'égalité des accroissements finis, il existe un élément y de $[l - \delta, l + \delta]$ tel que :

$$|u_{n+p+1} - \ell| = |f'(y)||u_{n+p} - \ell|.$$

• Ceci permet de montrer par récurrence :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad (\gamma - \varepsilon)^p |u_n - \ell| \leqslant |u_{n+p} - \ell| \leqslant (\gamma + \varepsilon)^p |u_n - \ell|$$

2) a) Si $M = 0$, alors f est constante sur J et $u_n = l$ pour $\ell \geqslant 1$.
b) Sachant que $|f'(\ell)| = 0$, l'inégalité des accroissements finis prouve que, pour tout n :

$$|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{M}{2} |u_n - \ell|^2.$$

On en déduit par récurrence que :

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2 \quad |u_{n+p} - \ell| \leqslant \frac{2}{M} \left(\frac{M}{2} |u_n - \ell|\right)^{2^p}.$$

Or, la suite (u_n) converge vers ℓ. Donc, il existe n tel que :

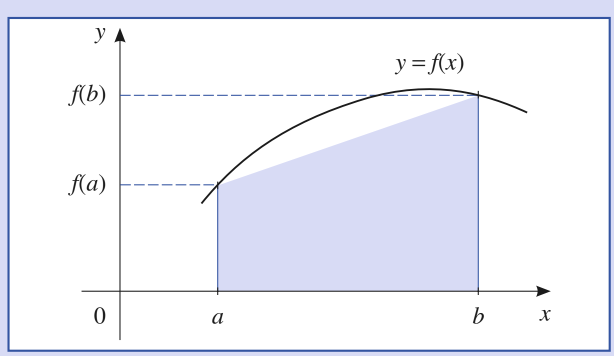
$$\frac{M}{2} |u_n - l| \leqslant \frac{1}{10}.$$

L'inégalité précédente prouve qu'alors :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad |u_{n+p} - l| \leqslant \frac{2}{M} \left(\frac{\ell}{10}\right)^{2^p}.$$

TD 2

A.1)a) $\dfrac{(b-a)(f(a) + f(b))}{2}$ est l'aire du trapèze indiqué dans le *schéma* ci-dessous.



b) $\displaystyle\int_a^b \frac{(t-a)(t-b)}{2} f''(t)\,\mathrm{d}t$

$$= \left[\frac{(t-a)(t-b)}{2} f'(t) - \left(t - \frac{a+b}{2}\right) f(t)\right]_a^b + \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

En développant le crochet, on arrive au résultat souhaité :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{(b-a)(f(a)+f(b))}{2} = \int_a^b \frac{(t-a)(t-b)}{2} f''(t)\,\mathrm{d}t.$$

c) À vous de majorer.

2) Soit $n > 0$. Pour tout k de $[\![0,n]\!]$, on note :

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n}.$$

On applique ce qui précède à chaque segment $[x_{k-1}, x_k]$.

3) La tangente au graphe de f au point d'abscisse $\dfrac{a+b}{2}$ a pour équation :

$$y = f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Donc : $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - (b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$

$$\leqslant \int_a^b \left| f(t) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(t - \frac{a+b}{2}\right)\right| \mathrm{d}t$$

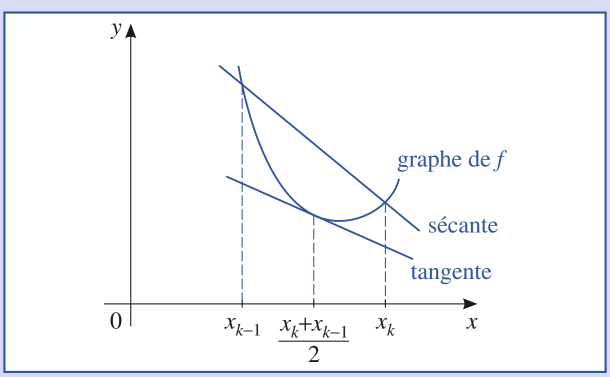
$$\leqslant \frac{M_2}{2}\int_a^b \left(t - \frac{a+b}{2}\right)^2 \mathrm{d}t$$

$$\leqslant \frac{M_2(b-a)^3}{24}.$$

en utilisant l'*inégalité de Taylor-Lagrange* à l'ordre 2.

4) On procède comme à la question **2)**.

5) Si f est convexe sur $[a,b]$, alors, entre les points x_{k-1} et x_k, le graphe de f est en dessous de la sécante aux points d'abscisse x_{k-1} et x_k, et au dessus de la tangente au point d'abscisse $\dfrac{x_k + x_{k-1}}{2}$.



On en déduit :

$\forall k \in [\![1,n]\!]$

$$\frac{(b-a)}{n} f\left(\frac{x_k + x_{k-1}}{2}\right) \leqslant \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{(b-a)}{n}\left[\frac{f(x_{k-1})}{2} + \frac{f(x_k)}{2}\right].$$

En sommant ces inégalités, on obtient l'encadrement.

Cet encadrement a une longueur inférieure à $\dfrac{M_2(b-a)^3}{8n^2}$.

Si f est concave, les inégalités sont inversées.

B.1) On trouve $\Delta(P_k) = 0$ pour k dans $\{0,1,2,3\}$. De plus, Δ est une application linéaire. On en déduit que $\Delta(P) = 0$ pour tout polynôme P de degré $\leqslant 3$.

2)a) La *formule de Taylor* avec reste intégrale appliquée à f en $\dfrac{a+b}{2}$ nous apprend que :

$$f = P + R_4$$

où P est un polynôme de degré $\leqslant 3$. La question **1)** permet alors de conclure que :

$$\Delta(f) = \Delta(R_4).$$

b) Si $x \in \left[\dfrac{a+b}{2}, b\right]$, alors :

$$|R_4(x)| \leqslant \int_{\frac{a+b}{2}}^{x} \frac{(x-t)^3}{3!} M_4\,\mathrm{d}t = \frac{M_4}{4!}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^4.$$

Si $x \in \left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$, alors :

$$|R_4(x)| \leqslant \int_x^{\frac{a+b}{2}} \frac{(t-x)^3}{3!} M_4\,\mathrm{d}t = \frac{M_4}{4!}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^4.$$

Le calcul de $|\Delta(f)| = |\Delta(R_4)|$ permet de terminer.

3) On procède comme aux questions **2)** et **4)** de **A**.

Conclusion

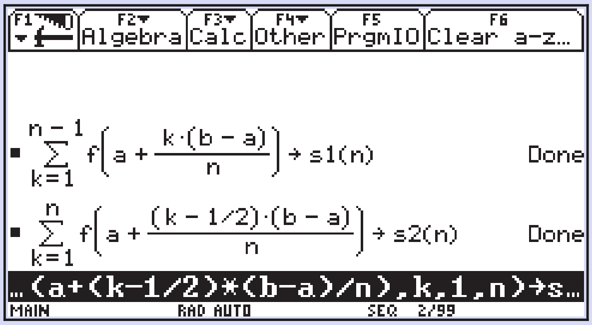
Pour chacune des trois méthodes exposées, on peut dire que l'on approche la valeur moyenne de f sur :

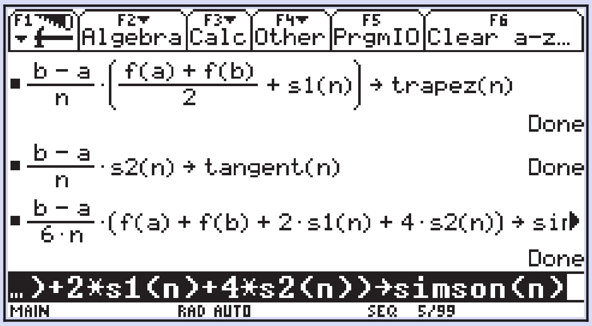
$$[a,b]\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

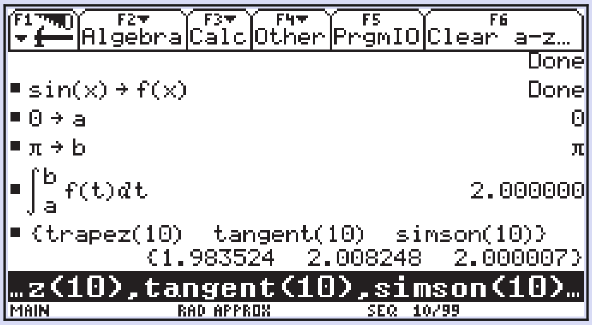
par une moyenne pondérée de valeurs de f :

$$\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i\, f(y_i) \text{ avec } \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1\right).$$

Les trois copies d'écrans ci-après vous permettent de comparer les trois méthodes et d'expérimenter l'ensemble avec d'autres fonctions.







Remarque : Dans les trois méthodes exposées, le choix des points d'interpolation est simple et imposé. Le TD du chapitre 5 expose la méthode de Gauss de calcul approché des intégrales. Dans cette méthode, les points d'interpolation sont les zéros de certains polynômes. La précision de la méthode est plus grande, mais elle comporte plus de calculs intermédiaires.

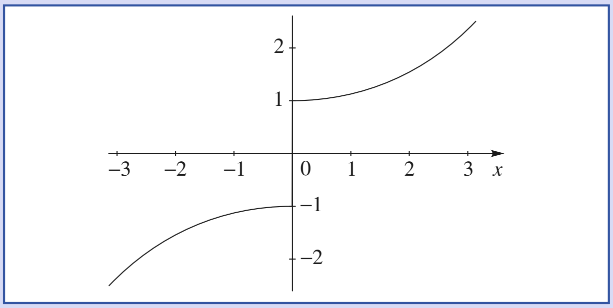
Il faut aussi noter que, plus le nombre de points utilisés pour le calcul approché est grand et plus l'erreur d'arrondi est importante.

Chapitre 9

Partie I

1) a) Immédiat en utilisant les propriétés de f, 2π-périodique et impaire.

b)



2) La fonction f_t est impaire, les $a_n(f_t)$ sont nuls.
Pour tout $n > 0$:

$$\begin{aligned} b_n(f_t) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{ch}(tx)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_0^{\pi}\left(\mathrm{e}^{tx}+\mathrm{e}^{-tx}\right)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\left(\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{(t+\mathrm{i}n)x}+\mathrm{e}^{(-t+\mathrm{i}n)x}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{2n}{\pi\left(n^2+t^2\right)}\left(1+(-1)^{n+1}\operatorname{ch}(t\pi)\right). \end{aligned}$$

3) a) La fonction f_t est 2π-périodique, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer le *théorème de convergence simple de Dirichlet*. La série de Fourier de f_t converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction régularisée de f_t, qui est f_t, et : $\forall x \in [-\pi, \pi]$

$$f_t(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{\pi\left(n^2+t^2\right)}\left(1+(-1)^{n+1}\operatorname{ch}(t\pi)\right)\sin nx.$$

b) En particulier :

$$\operatorname{ch}\left(t\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}(1+\operatorname{ch}(t\pi))\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p(2p+1)}{(2p+1)^2+t^2}.$$

4) a) On sait que :

$$1+\operatorname{ch}(t\pi) = 2\operatorname{ch}^2\left(t\frac{\pi}{2}\right).$$

D'où :

$$\frac{1}{\operatorname{ch}\left(t\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p(2p+1)}{(2p+1)^2+t^2}.$$

b) Pour $t = 0$, on obtient :

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1}.$$

Partie II

1) La fonction f est continue et paire sur $\mathbb{R}$. De plus, sur $\mathbb{R}^+$:

$$0 \leqslant f(t) \leqslant 2\mathrm{e}^{-t}.$$

La fonction $t \mapsto 2\mathrm{e}^{-t}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. La fonction f est donc intégrable sur $\mathbb{R}$.
On en déduit que la fonction $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.

De plus, montrer que :

$$F(x)=\int_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,xt}\,\mathrm{d}t = F(-x)=\overline{F(x)}.$$

On en déduit que :

$$F(x)=\mathrm{Re}(F(x))=\int_{\mathbb{R}}\frac{\cos(tx)}{\operatorname{ch} t}\,\mathrm{d}t = 2\int_{\mathbb{R}^+}\frac{\cos(tx)}{\operatorname{ch} t}\,\mathrm{d}t.$$

2) a) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^+}\frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch} t}\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}^{+*}}\cos(xt)\frac{2\mathrm{e}^{-t}}{1+\mathrm{e}^{-2t}}\,\mathrm{d}t$

$$= \int_0^{\infty}\sum_0^{\infty} 2\cos(xt)(-1)^p\mathrm{e}^{-(2p+1)t}\,\mathrm{d}t.$$

b) Considérons la suite de fonctions $\displaystyle\sum_0^n 2\cos(xt)(-1)^p\mathrm{e}^{-(2p+1)t}$ définies et continues sur $\mathbb{R}^{+*}$.

• Cette suite de fonctions converge simplement, sur $\mathbb{R}^{+*}$, vers la fonction continue et intégrable :

$$t\mapsto\frac{\cos(tx)}{\operatorname{ch} t}.$$

• De plus, pour tout réel x fixé et tout $t>0$:

$$\sum_{p=0}^{n} 2\cos(ct)(-1)^p\mathrm{e}^{-(2p+1)t} = 2\cos(xt)\mathrm{e}^{-t}\frac{1-(-1)^{n+1}\mathrm{e}^{-2(n+1)t}}{1+\mathrm{e}^{-2t}}$$

$$\left|\sum_{p=0}^{n} 2\cos(xt)(-1)^p\mathrm{e}^{-(2p+1)t}\right| \leqslant 4\mathrm{e}^{-t}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-2t}}\leqslant 4\mathrm{e}^{-t}.$$

La fonction $t\mapsto 2\mathrm{e}^{-t}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Le *théorème de convergence dominée* s'applique et :

$$\int_0^{\infty}\sum_0^{\infty} 2\cos(xt)(-1)^p\mathrm{e}^{-(2p+1)t}\,\mathrm{d}t$$

$$=\sum_0^{\infty}\int_0^{\infty} 2\cos(xt)(-1)^p\mathrm{e}^{-(2p+1)t}\,\mathrm{d}t$$

$$=2\sum_0^{\infty}\frac{(-1)^p(2p+1)}{(2p+1)^2+x^2}$$

$$=\frac{\pi}{2\operatorname{ch}\left(x\dfrac{\pi}{2}\right)}.$$

Et :

$$F(x)=\frac{\pi}{\operatorname{ch}\left(x\dfrac{\pi}{2}\right)}.$$

3) On note F_1 la transformée de Fourier de la fonction :

$$f_1 : t\mapsto\frac{1}{\operatorname{ch}\left(t\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\right)}.$$

En utilisant, sur un segment $[0,A]$ contenu dans $\mathbb{R}^+$, le changement de variable défini par $u=t\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$, on obtient :

$$F_1(x)=2\int_0^{\infty}\cos(xt)\frac{1}{\operatorname{ch}\left(t\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\right)}\,\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{2}{\pi}}F\left(x\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right).$$

Et :

$$F_1=\sqrt{2\pi}\,f_1.$$

Exercices : indications et réponses

Chapitre 1

1 **1)** Pour $x \neq -1$ et $x \neq 1$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x-1}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x+1}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{x^2}\right) + k\pi.$$

Ici $x > 1$, donc $k = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $S_n = \sum_1^n \operatorname{Arctan} \frac{2}{k^2}$

$$S_n = \operatorname{Arctan} 2 + \operatorname{Arctan} 1 + \operatorname{Arctan} \frac{1}{2} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{n} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{n+1}.$$

On en déduit :

$$\sum_1^\infty \operatorname{Arctan} \frac{2}{k^2} = 3\frac{\pi}{4}.$$

2) $$\frac{n}{n^4+n^2+1} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{(n+1)^2-(n+1)+1} + \frac{1}{n^2-n+1}\right).$$

$$\sum_0^\infty \frac{n}{n^4+n^2+1} = \frac{1}{2}.$$

2 $$\sum_1^N \frac{20^n}{(5^{n+1}-4^{n+1})(5^n-4^n)}$$

$$= \sum_1^N \frac{4^n}{5^{n+1}\left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}\right)\left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right)}$$

$$= \sum_1^N \left(\frac{1}{1-\left(\frac{4}{5}\right)^n} - \frac{1}{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}}\right).$$

3 **1)** $$\sum_0^n \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \sum_0^n \left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right).$$

La série diverge.

2) $$S_n = \ln\left(\prod_1^n \cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\sin(a)}{2^n \sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}\right).$$

La série converge et $\sum_1^\infty \ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right) = \ln\left(\frac{\sin(a)}{a}\right)$.

4

$$S_n = \int_0^{\pi/2}\left(\sum_0^n (-1)^k \cos^k x\right) \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x + (-1)^n \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{n+1} x\,\mathrm{d}x}{1+\cos x}.$$

Avec Maple :

```
> int(1/(1+cos(x)),x=0..Pi/2) ;
                         1
```

De plus, $\left|\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{n+1} x\,\mathrm{d}x}{1+\cos x}\right| \leqslant \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1} x\,\mathrm{d}x$ qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Il s'agit d'une intégrale de Wallis. Elles ont été étudiées en Première année et on les retrouvera en d'autres occasions.

La série converge et $\sum_0^\infty (-1)^k \int_0^{\pi/2} \cos^k x\,\mathrm{d}x = 1$.

5 Il existe N dans $\mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant N \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

6 Par récurrence, pour tout n :

$$0 \leqslant u_{2n} \leqslant \frac{u_0}{v_0} v_{2n} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant u_{2n+1} \leqslant \frac{u_1}{v_1} v_{2n+1}.$$

7 Pour $n \geqslant 3$, $0 \leqslant n^{1/n} - 1 = \exp\left(\frac{1}{n}\ln(n)\right) - 1 \leqslant \frac{1}{2}$.

Pour $n \geqslant 3$:

$$0 \leqslant (n^{1/n}-1)^n \leqslant (1/2)^n.$$

La série converge.

8 La série, bien qu'alternée, ne vérifie pas le critère spécial des séries alternées.

$$u_n \sim \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{et} \quad u_n - \frac{(-1)^n}{n} = -\frac{1}{n\,(\ln(n)+(-1)^n)}.$$

La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge et la série :

$\sum \frac{1}{n\,(\ln(n)+(-1)^n)}$ est à termes positifs, divergente, car :

$$\frac{1}{n\,(\ln(n)+(-1)^n)} \sim \frac{1}{n\ln(n)}.$$

La série $\sum u_n$ diverge.

9 **1)** $\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{n}$ et $\dfrac{1}{n} > 0$.

2) $u_n = \text{Arccos}\left(\left(1-\dfrac{1}{n^3}\right)^{1/2}\right)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, donc :

$$u_n \sim \sin(u_n).$$

Or $\sin u_n = \dfrac{1}{n^{3/2}}$. La série converge.

10 **1)** $\dfrac{1}{n^{3/4}} = o\left(\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)$. La série diverge.

2) $\dfrac{\ln n}{n^2} = o\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$. La série converge.

3) $\dfrac{(\ln n)^3}{n^2} = o\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$. La série converge.

11 **1)** La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est positive, continue et décroissante sur $[1,+\infty[$.

On a donc $\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} = \displaystyle\int_k^{k+1} \dfrac{\mathrm{d}t}{t^2} \leqslant \dfrac{1}{k^2}$, puis $\dfrac{1}{n+1} \leqslant u_n$.

La série $\sum u_n$ diverge.

2) En procédant de manière analogue, montrer la convergence de la série.

12 **1)** Si $|a| > 1$, la série est grossièrement divergente.
Si $a \in [-1, 0[$, la série converge, car elle vérifie le critère spécial des séries alternées.
Si $a = 1$, elle diverge.
Si $a \in]0,1[$, le critère de d'Alembert s'applique, la série converge, ainsi, bien sûr, que pour $a = 0$.
2) La série est à termes strictement positifs. Le critère de d'Alembert donne la convergence de la série lorsque $|a| < 1$, sa divergence lorsque $|a| > 1$. Si $|a| = 1$, la série est grossièrement divergente.
3) On utilise la règle de d'Alembert.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n}\,\frac{1}{1+b^{n+1}}.$$

Si $b \geqslant 1$, la série converge.

Soit b dans $]0,1[$. On a $\ln\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+b^k)\right) = \displaystyle\sum_1^n \ln(1+b^k)$.

Or, la série $\sum \ln(1+b^k)$ converge, car $\ln(1+b^k) \sim b^k$.

La suite $\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+b^k)\right)$ a donc une limite $L > 0$.

On en déduit $u_n \sim \dfrac{n}{L}$. La série $\sum u_n$ diverge.

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = r$.

Par conséquent, si $r < 1$, la série est absolument convergente, donc convergente.
Si $r > 1$, la série diverge.
Si $r = 1$, $u_n \sim \dfrac{\mathrm{e}}{n}$. La série diverge.

13 $0 \leqslant u_n = \dfrac{1}{3^{2n+1} + 2n + 1} \leqslant \dfrac{1}{3^{2n+1}}$.

La série géométrique $\sum \dfrac{1}{3^{2n+1}}$ converge, donc $\sum u_n$ converge. De plus :

$$0 \leqslant S - S_N = R_N \leqslant \sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{3^{2n+1}} = \frac{1}{24\ 9^N}.$$

Il suffit ensuite de calculer N pour obtenir $\dfrac{1}{24\ 9^N} < 10^{-4}$.

Maple vient en aide et fournit $N = 3$, $S_3 = 0,2878\ldots$

14 **1)** $x = 0,123\,456\,456\,456\ldots$
$= 0,123 + y$

Et $10^3\, y = 0,456\,456\,456\ldots = \dfrac{456}{1\,000} + y$.

D'où : $$x = \frac{41\,111}{333\,000}.$$

2) La calculatrice indique $\dfrac{4}{7} = 0,571\,428\,571\,4$.
Vérifier ensuite par le procédé développé ci-dessus que :

$$\frac{4}{7} = 0,\overline{571\,428}.$$

3) On remarque qu'un nombre décimal est rationnel et que sa représentation décimale propre vérifie la condition indiquée.
Soit $x = \dfrac{p}{q}$ un rationnel de $]0,1[$, sous forme irréductible, avec $q \in \mathbb{N}^*$ et $x = \displaystyle\sum_1^{\infty} \dfrac{a_k}{10^k}$ son développement décimal.

$10 \times p = q \times b_1 + r_1$ et $r_1 \in [\![0, q-1]\!]$, d'où $b_1 = a_1$.

$10 \times r_1 = q \times b_2 + r_2$ et $r_2 \in [\![0, q-1]\!]$, d'où $b_2 = a_2$.

Puis, par récurrence :

$10 \times r_i = q \times b_{i+1} + r_{i+1}$ et $r_{i+1} \in [\![0, q-1]\!]$,

Montrer que, pour tout i : $b_i = a_i$.
Les restes r_i appartiennent à $[\![0, q-1]\!]$. Il existe donc i et j, distincts, tels que $r_i = r_j$. Ensuite, pour tout $k \geqslant 1$, $a_{i+k} = a_{j+k}$.

Réciproquement, soit $x = \displaystyle\sum_1^{\infty} \dfrac{a_k}{10^k}$ tel que la suite (a_k) soit périodique, de période p. Alors :

$$x = \left(\sum_{j=1}^{p} a_j 10^{-j}\right) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{10^{ip}} = \frac{10^p}{10^p - 1} \sum_{j=1}^{p} (a_j 10^{-j}).$$

Si x est périodique à partir du rang m, alors :

$10^{m-1}\left(x - \displaystyle\sum_1^{m-1} \dfrac{a_k}{10^k}\right)$ est périodique. x est donc rationnel.

15 **1)** On fixe $\varepsilon > 0$ et on applique le critère de Cauchy. Il existe N dans $\mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$:

$$0 \leqslant \sum_{n+1}^{2n} u_k < \varepsilon. \qquad \textbf{(1)}$$

Or, $\displaystyle\sum_{n+1}^{2n} u_k \geqslant n u_{2n}$. Donc, pour tout $n \geqslant N$, on a :

$$0 \leqslant 2\,n\,u_{2n} \leqslant 2\varepsilon.$$

De plus, pour un tel n :

$(2n+1)\,u_{2n+1} \leqslant (2n+1)\,u_{2n} \leqslant 2\varepsilon + u_{2n} \leqslant 3\varepsilon$ (en utilisant **(1)**)

Donc, pour tout $m \geqslant 2N$, $m u_m \leqslant 3\varepsilon$. D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} n\,u_n = 0.$$

2) La réciproque est fausse. Considérer la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n\ln(n)}$.

16 Chacune de ces séries vérifie le critère spécial des séries alternées. On connaît alors la relation $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$.

1) $|u_{n+1}| \leqslant 10^{-2}$ dès que $n \geqslant 49$.

$$0,780\,3 \leqslant S_{49} \leqslant S \leqslant S_{50} \leqslant 0,790\,3.$$

Avec Maple :

```
> evalf(sum((-1)^n/(2*n+1),n=0..49)) ;
  evalf(sum((-1)^n/(2*n+1),n=0..50)) ;
                    .7803986631
                    .7902996532
```

2) $|u_{n+1}| \leqslant 10^{-2}$ dès que $n \geqslant 4$.

$$0{,}71 \leqslant S_5 \leqslant S \leqslant S_4 \leqslant 0{,}72.$$

Avec Maple :

```
> evalf(sum((-1)^n/(2*n^3+1),n=0..4)) ;
  evalf(sum((-1)^n/(2*n^3+1),n=0..5)) ;
                    .7150603159
                    .7110762521
```

17 La suite (a_n) converge vers 0, donc, pour n assez grand, on a $|a_n^2| \leqslant |a_n| \leqslant 1$.

18 **1)**

Avec Maple :

```
> exp1 :=(1+1/(n+1))^(3*n) :
> exp2 :=(1+3/(n+a))^(n) :
>series(exp1-exp2,n=infinity,3) ;
```

$$\left(-\frac{9}{2}\,e^3 - e^3\left(-3\,a - \frac{9}{2}\right)\right)\frac{1}{n}$$

$$+\left(-e^3\left(\frac{45}{2}\,a + \frac{15}{2}\,a^2 + \frac{153}{8}\right) + \frac{137}{8}\,e^3\right)\left(\frac{1}{n}\right)^2 + O\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2\right).$$

Si $a \neq 0$, $\dfrac{1}{n} = O(u_n)$ et la série diverge.

Si $a = 0$, $u_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et la série converge.

2) Si $|z| < 1$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$. La série est grossièrement divergente.

Si $|z| > 1$, alors $|u_n| = O\left(\dfrac{1}{|z|^n}\right)$. La série converge.

Si $|z| = 1$, alors $\operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{1+z^n}\right) = \dfrac{1}{2}$. La série diverge grossièrement.

19 On pose $a_0 = 0$, et, pour $p \geqslant 1$, $a_p = \dfrac{1}{p^2}$, ainsi que, pour tout p, $b_p = \dfrac{1}{p!}$.

On reconnaît le terme général du produit de Cauchy des séries $\sum a_p$ et $\sum b_p$. Ces deux séries sont absolument convergentes. La série $\sum w_p$ converge. De plus :

$$\sum_1^{\infty} w_p = \left(\sum_1^{\infty} \frac{1}{p^2}\right)\left(\sum_0^{\infty} \frac{1}{p!}\right) = \frac{\pi^2}{6}\,e.$$

20 On pose $v_n = \ln\left(\sqrt{n}\,u_n\right)$.

$$v_n - v_{n-1} = -\frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

La série $\sum(v_n - v_{n-1})$ converge car elle est la somme d'une série alternée convergente et d'une série absolument convergente. La suite (v_n) converge donc vers un réel ℓ. On en déduit $u_n \sim \dfrac{e^{\ell}}{\sqrt{n}}$. La série $\sum u_n$ diverge.

21 **1)** On remarque que $v_0 = \dfrac{u_0}{1+u_0}$ et, pour $n \geqslant 1$:

$$v_n = \frac{1}{(1+u_0)(1+u_1)\ldots(1+u_{n-1})} - \frac{1}{(1+u_0)(1+u_1)\ldots(1+u_n)}.$$

Or, la suite $\left(\displaystyle\prod_{k=0}^{n} \frac{1}{1+u_k}\right)$ est décroissante, positive.

Elle converge vers ℓ.

Donc, la série $\sum v_n$ converge et :

$$\sum_0^{\infty} v_n = \frac{u_0}{1+u_0} + \frac{1}{1+u_0} - \ell = 1 - \ell.$$

2) On en déduit :

$$\sum_0^{\infty} v_n = 1 \Leftrightarrow \ell = 0$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} (1+u_0)(1+u_1)\dots(1+u_n) = +\infty$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \sum_0^n \ln(1+u_k) = +\infty\,.$$

• Si (u_n) ne tend pas vers 0, la suite $(\ln(1+u_n))$ ne converge pas vers 0. Dans ce cas, les deux séries $\sum u_n$ et $\sum \ln(1+u_n)$ divergent et $\lim_{n\to+\infty} \sum_0^n \ln(1+u_k) = +\infty$.

• Si (u_n) tend vers 0, pour n assez grand, on a :

$$\frac{1}{2} u_n \leqslant \ln(1+u_n) \leqslant u_n.$$

Les séries $\sum u_n$ et $\sum \ln(1+u_n)$ sont de même nature.
D'où le résultat.

22 **1)** On note $T_n = \sum_0^n \frac{a_k}{S_k}$. Alors :

$$T_{n+k} - T_n = \sum_{i=1}^k \frac{a_{n+i}}{S_{n+i}} \geqslant \frac{\sum_{i=1}^k a_{n+i}}{S_{n+k}} = 1 - \frac{S_n}{S_{n+k}}.$$

Or, pour tout n fixé, on a $\lim_{k\to+\infty} \frac{S_n}{S_{n+k}} = 0$. Donc, il existe $k > 0$ tel que $T_{n+k} - T_n \geqslant \frac{1}{2}$.

La suite (T_n) ne satisfait pas le critère de Cauchy, donc diverge.

2) Sachant que $a_n = S_n - S_{n-1}$, on a :

$$0 \leqslant \frac{a_n}{S_n^2} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^2} \leqslant \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n S_{n-1}} = \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n} \qquad \textbf{(1)}$$

La suite $\left(\frac{1}{S_n}\right)$ converge, donc la série $\sum \left(\frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}\right)$ converge.
La majoration **(1)** prouve que la série $\sum \frac{a_n}{S_n^2}$ converge.

23 **1)** On remarque que, lorsque $x = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, les séries $\sum \frac{e^{inx}}{n}$ et $\sum \frac{\cos nx}{n}$ divergent.

Soit $x \in]0, 2\pi[$.

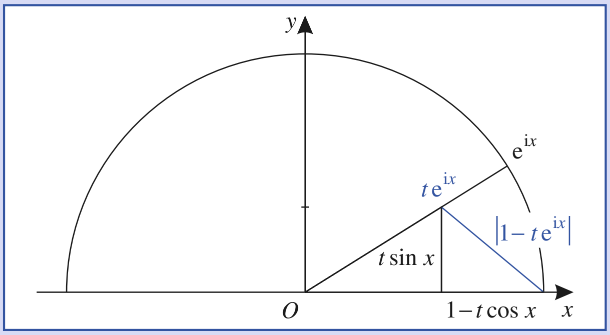
On calcule les sommes partielles de la série $\sum \frac{e^{inx}}{n}$:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{e^{ikx}}{k} = \sum_{k=1}^n \int_0^1 e^{ikx} t^{k-1}\,dt = \int_0^1 \sum_{k=1}^n (e^{ikx} t^{k-1})\,dt$$
$$= \int_0^1 \frac{e^{ix}}{1 - e^{ix} t}\,dt - \int_0^1 \frac{(e^{ix} t)^n}{1 - e^{ix} t} e^{ix}\,dt.$$

On montre que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{(e^{ix}t)^n}{1 - e^{ix}t}\,dt = 0$.

$$0 \leqslant \left| \int_0^1 \frac{(e^{ix}t)^n}{1 - e^{ix}t}\,dt \right| \leqslant \int_0^1 \frac{t^n}{|1 - e^{ix}t|}\,dt.$$

Or $|1 - e^{ix}t| \geqslant \sup((1 - t\cos x), t\sin x)$.



De plus, la fonction : $t \mapsto 1 - t\cos x$ est continue sur $[0,1]$ et à valeurs strictement positives.
$[0, 1]$ est un compact de $\mathbb{R}$. Cette fonction admet donc sur $[0, 1]$ une borne inférieure $a > 0$.

$$0 \leqslant \left| \int_0^1 \frac{(e^{ix}t)^n}{1 - e^{ix}t}\,dt \right| \leqslant \int_0^1 \frac{1}{a} t^n\,dt = \frac{1}{(n+1)a}.$$

La série converge et :

$$\sum_1^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k} = \int_0^1 \frac{e^{ix}}{1 - e^{ix}t}\,dt.$$

2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{ix}}{1 - e^{ix}t}\,dt$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2t - 2\cos x}{t^2 - 2t\cos x + 1}\,dt + i\int_0^1 \frac{\sin x}{(t - \cos x)^2 + \sin^2 x}\,dt$$
$$= -\frac{1}{2}\left[\ln(t^2 - 2t\cos x + 1)\right]_0^1 + i\left[\operatorname{Arctan}\frac{(t - \cos x)}{\sin x}\right]_0^1 \quad (\text{si } x \neq \pi)$$
$$= -\frac{1}{2}\left[\ln(t^2 - 2t\cos x + 1)\right]_0^1 + i\left[\operatorname{Arctan}\left(\tan\frac{x}{2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)\right].$$

• $x \in]0, \pi[$

$$\int_0^1 \frac{e^{ix}}{1 - e^{ix}t}\,dt = -\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right) + i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right).$$

Si $x = \pi$, le calcul de la seconde intégrale n'est plus correct. Toutefois, elle est nulle. Le résultat est encore valable.

• $x \in]\pi, 2\pi[$

$$\int_0^1 \frac{e^{ix}}{1 - e^{ix}t}\,dt = -\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right) + i\left[\left(\frac{x}{2} - \pi\right) + \left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right)\right]$$
$$= -\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right) + i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right).$$

3) On en déduit, en considérant les parties réelles et imaginaires de la série $\sum \frac{e^{inx}}{n}$, que les séries $\sum \frac{\cos nx}{n}$ et $\sum \frac{\sin nx}{n}$ convergent, pour x fixé dans $]0, \pi]$. De plus :

$$\sum_1^\infty \frac{\cos nx}{n} = -\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right) \quad \text{et} \quad \sum_1^\infty \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}.$$

24 La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc :

$$\frac{u_k - u_{k-1}}{u_k} = \int_{u_{k-1}}^{u_k} \frac{dt}{u_k} \leqslant \int_{u_{k-1}}^{u_k} \frac{dt}{t} \leqslant \int_{u_{k-1}}^{u_k} \frac{dt}{u_{k-1}} = \frac{u_k - u_{k-1}}{u_{k-1}}.$$

En additionnant :

$$\sum_1^n \frac{u_k - u_{k-1}}{u_k} \leqslant \ln(u_n) - \ln(u_0) \leqslant \sum_1^n \frac{u_k - u_{k-1}}{u_{k-1}}.$$

On note M un majorant des $u_{n+1} - u_n$. La conclusion souhaitée découle alors de :

$$\sum_1^n \frac{u_k - u_{k-1}}{u_{k-1}} - \sum_1^n \frac{u_k - u_{k-1}}{u_k} \leqslant M \sum_1^n \left(\frac{1}{u_{k-1}} - \frac{1}{u_k}\right) \leqslant M \times \frac{1}{u_0}.$$

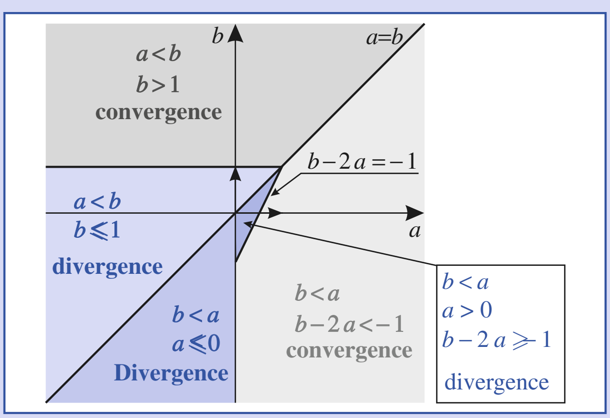
25 • Si $a = b$, la série n'est pas définie.

• Si $a < b$, alors $u_n \sim \frac{1}{n^b}$.
La série est alors absolument convergente si $b > 1$, et divergente si $b \leqslant 1$.

• Si $b < a$, alors : $u_n \sim \frac{(-1)^n}{n^a}$. Donc, pour $a \leqslant 0$, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
Pour $a > 0$, cet équivalent ne permet pas de conclure car la suite (u_n) n'est pas de signe constant.

$$u_n - \frac{(-1)^n}{n^a} = -\frac{n^b}{n^a[n^a + (-1)^n n^b]} \sim -n^{b-2a}.$$

On écrit $u_n = \frac{(-1)^n}{n^a} + v_n$, avec $v_n \sim -n^{b-2a}$.
La série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $b - 2a < -1$.



26 **1)** $0 \leqslant \sum_1^n k\,u_k = \sum_0^{n-1} R_k - n\,R_n \leqslant \sum_0^{n-1} R_k.$

Si la série $\sum R_n$ converge, la série $\sum n\,u_n$ converge aussi.
On suppose la série $\sum n\,u_n$ convergente. Alors :

$$\sum_0^{n-1} R_k = \sum_0^n k\,u_k + n\,R_n \leqslant \sum_0^n k\,u_k + n\sum_{n+1}^\infty u_k \leqslant \sum_0^\infty k\,u_k$$

Donc, la série $\sum R_n$ converge.

2) Lorsque ces séries convergent, les relations établies :

$$\sum_0^n k\,u_k \leqslant \sum_0^{n-1} R_k \quad \text{et} \quad \sum_0^{n-1} R_k \leqslant \sum_0^\infty k\,u_k$$

donnent l'égalité des limites.

27 **1)** $\sum_0^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)} = \int_0^1 \frac{1 - (-t^2)^{n+1}}{1+t^2}\,dt.$

Puis :

$$\left|\int_0^1 \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}\right| \leqslant \int_0^1 t^{2n+2}\,dt \leqslant \frac{1}{2n+3}$$

D'où :

$$\sum_0^\infty \frac{(-1)^k}{(2k+1)} = \frac{\pi}{4}.$$

2) On écrit :

$$u_n = \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} - R_n\right)\right), \quad \text{avec} \quad R_n = \sum_{n+1}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k+1)}$$

$$= \ln\left(\frac{1 - \tan R_n}{1 + \tan R_n}\right) = -2\tan R_n + o(\tan^2 R_n)$$

La série $\sum \frac{(-1)^k}{(2k+1)}$ vérifie le critère spécial des séries alternées, donc $\frac{1}{2n+5} \leqslant |R_n| \leqslant \frac{1}{2n+3}$.

Soit $|R_n| \sim \frac{1}{2n}$.
Puis $u_n + 2\tan R_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, la série $\sum(u_n + 2\,R_n)$ est donc absolument convergente.
De plus, la série $\sum R_n$ est une série alternée. On montre qu'elle vérifie le critère spécial.

$$R_n = \sum_{n+1}^\infty \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

Donc :

$$|R_n| - |R_{n+1}| = \left|\lim_{N\to\infty} \sum_{n+1}^N \int_0^1 (-t^2)^k\,dt\right| - \left|\lim_{N\to\infty} \sum_{n+2}^N \int_0^1 (-t^2)^k\,dt\right|$$

Soit :

$$|R_n| - |R_{n+1}| = \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{t^{2n+4}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t > 0$$

La série $\sum u_n$ est donc convergente.

28 **1)** On peut écrire :

$$\frac{(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}\sqrt{n}} = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Par conséquent, somme de deux séries convergentes et d'une série absolument convergente, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}\sqrt{n}}$ converge.

2) On approche la somme S par une somme partielle. Pour accroître la précision et travailler avec des termes de signe constant, on regroupe deux par deux les termes de la série.

$$S_{2N+1} = \sum_{n=2}^{2N+1} u_n = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{(2n)-\sqrt{2n}} - \frac{1}{(2n+1)+\sqrt{2n+1}}\right).$$

On pose, pour $x \geqslant 1$:

$$g(x) = \left(\frac{1}{(2x)-\sqrt{2x}} - \frac{1}{(2x+1)+\sqrt{2x+1}}\right).$$

La fonction g est positive. On fait appel à *Maple* pour étudier les variations de g.

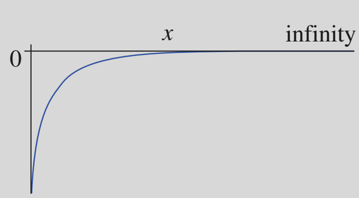
Avec Maple :

```
> restart :g :=x->1/((2*x)-sqrt(2*x))
-1/(2*x+1+sqrt(2*x+1)) ;
> h*=x->diff(g(x),x) ;
h(x) ;plot(h(x),x=1..infinity) ;
simplify(h(x)) ;
```

$$g := \to \frac{1}{2x-\sqrt{2x}} - \frac{1}{2x+1+\sqrt{2x+1}}$$

$$h := x \to \operatorname{diff}(g(x), x)$$

$$-\frac{2-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}}{\left(2x-\sqrt{2}\sqrt{x}\right)^2} + \frac{2+\frac{1}{\sqrt{2x+1}}}{\left(2x+1+\sqrt{2x+1}\right)^2}$$



On appelle R le numérateur de $g'(x)$ avec :

$$\begin{aligned}-R(x) &= 3\sqrt{2}\sqrt{2x+1}\,x\,(x-1) + \sqrt{2}\sqrt{2x+1}\,(x^2-1)\\ &+4\sqrt{x}\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x}\right) + \sqrt{2}\left(2x^2\sqrt{2x+1}-1\right)\\ &+8\sqrt{2x+1}\,x^{3/2} + 12\,x^{5/2} + 14\,x^{3/2} + 4\sqrt{x}.\end{aligned}$$

La fonction g est donc décroissante. On en déduit :

$$\sum_{N+1}^{\infty}\left(\int_n^{n+1} g(t)\,\mathrm{d}t\right) \leqslant |S - S_{2N+1}| = |\sum_{N+1}^{\infty} g(n)| = \sum_{N+1}^{\infty} g(n)$$
$$\leqslant \sum_{N+1}^{\infty}\left(\int_{n-1}^{n} g(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

On note G une primitive de g.

Avec Maple :

```
> assume(x>1) :int (g(x),x) ;
```

$$\frac{1}{2}\ln(2x\sim -1) - \operatorname{Arctanh}\left(\sqrt{2}\sqrt{x\sim}\right) - \frac{1}{2}\ln(x\sim)$$
$$-\operatorname{Arctanh}\left(\sqrt{2x\sim+1}\right)$$

On en déduit :

$$G(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{2x-1}{x}}\right) - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2x+1}}{1-\sqrt{2x+1}}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2x}}{1-\sqrt{2x}}\right|$$

et :

$$\lim_{x\to+\infty} G(x) = \frac{1}{2}\ln(2).$$

Par conséquent $0 \leqslant |S - S_{2N+1}| \leqslant \frac{1}{2}\ln(2) - G(N)$.

On remarque que $\frac{1}{2}\ln(2) - G(N) \sim \frac{\sqrt{2}}{n}$.

Avec Maple :

```
> G :=x->ln(sqrt((2*x-1)/(x)))
-1/2*ln((sqrt(2*x)+1)
/(sqrt(2*x)-1))-1/2*ln((sqrt(2*x+1)+1)
/(sqrt(2*x+1)-1)) ;
>limit(G(x),x=infinity) ;
> series(G(x),x=infinity,2) ;
```

$$G := x \to \ln\left(\sqrt{\frac{2x-1}{x}}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2x}+1}{\sqrt{2x}-1}\right)$$
$$-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2x+1}+1}{\sqrt{2x+1}-1}\right)$$

$$\frac{1}{2}\ln(2)$$

$$\frac{1}{2}\ln(2) - \sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{x}} - \frac{1}{4}\frac{1}{x} - \frac{1}{24}\sqrt{2}\,\frac{1}{x}^{3/2} + O\left(\frac{1}{x}^2\right)$$

La convergence est lente. Plus précisément, $\frac{1}{2}\ln(2) - G(N)$ décroît vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$. Pour avoir $\frac{1}{2}\ln(2) - G(N) \leqslant 10^{-2}$, il suffit de prendre $N = 20\,051$.

Avec Maple :

```
> equa :=(2*x-1)*(sqrt(2*x)-1)*(sqrt(2*x+1)-1)
/((x)*(sqrt(2*x)+1)*(sqrt(2*x+1)+1)) ;
> solve(equa=2**exp(-2*10^(-2)),x) :
> evalf(") ;
```

$$\text{equa} := \frac{(2\,x\sim -1)\left(\sqrt{2}\,\sqrt{x\sim}-1\right)\left(\sqrt{2\,x\sim+1}-1\right)}{x\sim\left(\sqrt{2}\,\sqrt{x\sim}+1\right)\left(\sqrt{2\,x\sim+1}+1\right)}$$

20020.05257

```
> evalf((1/2)*ln(2)-G(20050)) ;
> evalf((1/2)*ln(2)-G(20051)) ;
```

.01000001282
.009999763822

3) Puisque *Maple* calcule avec une précision supérieure à 10^{-7}, on obtient $S = 2,86$ à $2 \cdot 10^{-2}$ près.

Avec Maple :

```
> S :=sum(evalf(G(n)),n=1..20051) ;
```

$S := 2.867156968$

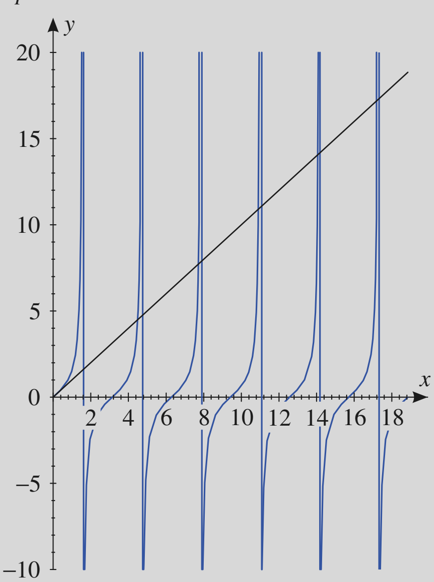
29 **1)** La fonction $\left]-\dfrac{\pi}{2}+n\,\pi, \dfrac{\pi}{2}+n\,\pi\right[\;\longrightarrow\; \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan x - x$, est strictement croissante et continue.

De plus : $\displaystyle\lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}+n\,\pi\right)^+} (\tan x - x) = -\infty$

et : $\displaystyle\lim_{x\to\left(+\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^-} (\tan x - x) = +\infty.$

Elle réalise donc une bijection de $\left]-\dfrac{\pi}{2}+n\,\pi, \dfrac{\pi}{2}+n\,\pi\right[$ sur $\mathbb{R}$. D'où l'existence et l'unicité de x_n.

Avec Maple :




```
> restart :plot({tan(x),x},x=0..6*Pi,
y=-10..20) ;
```

2) On a $-\dfrac{\pi}{2}+n\,\pi < x_n < \dfrac{\pi}{2}+n\,\pi$, donc :

$$x_n \sim n\,\pi, \quad \text{soit} \quad x_n = n\,\pi + o(n).$$

On pose alors $y_n = x_n - n\,\pi$. La suite $\tan(y_n) = x_n$ tend vers $+\infty$ et y_n tend vers $\dfrac{\pi}{2}$. D'où :

$$x_n = n\,\pi + \frac{\pi}{2} + o(1).$$

Un développement asymptotique à trois termes est demandé et nécessite de préciser $z_n = x_n - n\,\pi - \dfrac{\pi}{2}$.

On a $\tan(x_n) = -\text{cotan}(z_n) = n\,\pi + \dfrac{\pi}{2} + z_n$.

Puis $\tan(z_n) = -\dfrac{1}{n\,\pi + \dfrac{\pi}{2} + z_n} \sim -\dfrac{1}{n\pi}$.

Et enfin $x_n = n\,\pi + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{n\,\pi} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Pour obtenir le développement asymptotique avec *Maple*, on pose :

$$u = \frac{2}{(2\,n+1)\,\pi}.$$

Avec Maple :

```
> restart :z :=solve(u=series(1/(tan(Pi/2+z)
-z),z),z) ;
> asympt(subst(u=2/(Pi*(2*n+1)),1/u+z),n) ;
```

$$z := -u - \frac{2}{3}u^3 - \frac{13}{15}u^5 + O(u^6)$$

$$\pi\,n + \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{\pi\,n} + \frac{1}{2}\frac{1}{\pi\,n^2} + \frac{-\frac{1}{4}\frac{1}{\pi} - \frac{2}{3}\frac{1}{\pi^3}}{n^3} + \frac{\frac{1}{8}\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^3}}{n^4} + \frac{-\frac{1}{16}\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi^3} - \frac{13}{15}\frac{1}{\pi^5}}{n^5} + O\left(\frac{1}{n^6}\right)$$

3) On a $u_n^a \sim \dfrac{1}{(n\,\pi)^a}$. La série $\sum u_n^a$ converge si, et seulement si, $a > 1$.

De plus, $\tan u_n = \dfrac{1}{\tan x_n}$.

Puisque $\tan x_{n+1} = x_{n+1} > \tan x_n = x_n > 0$, on a :

$$u_{n+1} < u_n.$$

La suite (u_n^a) est donc décroissante, de limite nulle. Le critère spécial des séries alternées permet d'affirmer la convergence de la série $\sum (-1)^n u_n^a$.

Enfin :

$$\cos^m(x_n) = (-1)^{m\,n}\sin^m(u_n) \sim (-1)^{m\,n}\,u_n^m.$$

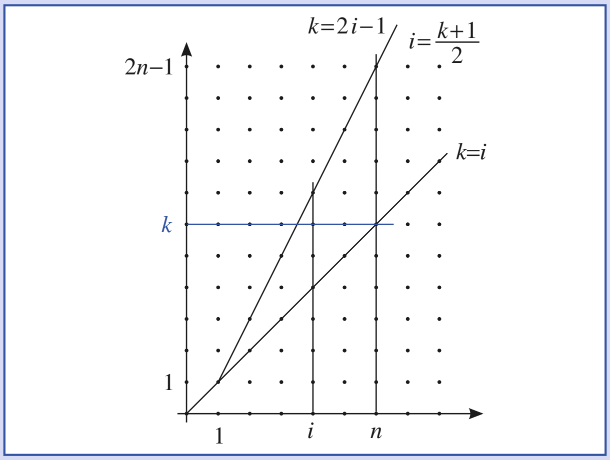
Si $m > 1$, la série est absolument convergente.

Si $m = 1$, le critère spécial des séries alternées s'applique pour la série $\sum (-1)^{m\,n}\sin^m(u_n)$. La série converge.

30 **1)** $S_n(v) = \sum_{i=1}^{n} v_i = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\sum_{k=i}^{2i-1} u_k}{i} = \sum_{k=1}^{2n-1} \alpha_{k,n}\, u_k$.

De plus, on a :

$$\alpha_{k,n} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{(k+1)/2 \leqslant i \leqslant k} \frac{1}{i} & \text{si } k \in [\![1, n]\!] \\ \displaystyle\sum_{(k+1)/2 \leqslant i \leqslant n} \frac{1}{i} & \text{si } k \in [\![n+1, 2n-1]\!] \end{cases}.$$



Dans tous les cas :

$$0 \leqslant \alpha_{k,n} \leqslant \sum_{(k+1)/2 \leqslant i \leqslant k} \frac{1}{i} \leqslant \sum_{(k+1)/2 \leqslant i \leqslant k} \frac{2}{k+1}.$$

La somme comportant exactement $\mathrm{E}\left(\dfrac{k+2}{2}\right)$ termes, on en déduit :

$$\alpha_{k,n} \in [0, 1].$$

La convergence de la série $\sum u_n$ entraîne donc celle de la série $\sum v_n$.

2) On minore $S_n(v)$.

$$S_n(v) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,n}\, u_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{(k+1)/2 \leqslant i \leqslant k} \frac{1}{i} \right) u_k.$$

Or $\displaystyle\sum_{(k+1)/2 \leqslant i \leqslant k} \frac{1}{i} \geqslant \frac{1}{k}\frac{k}{2} = \frac{1}{2}$.

Par conséquent, $S_n(v) \geqslant \dfrac{1}{2} S_n(u)$. La divergence de la série $\sum u_n$ entraîne celle de la série $\sum v_n$.

31 **1) a)** On fixe $\varepsilon > 0$. Il existe N dans $\mathbb{N}$ tel que :

$$k \geqslant N \Rightarrow |b_k| \leqslant \varepsilon\, a_k.$$

Donc, pour tout $n \geqslant N$, on a :

$$\left| \sum_{k=N}^{n} b_k \right| \leqslant \sum_{k=N}^{n} |b_k| \leqslant \varepsilon \sum_{k=N}^{n} a_k \leqslant \varepsilon S_n(a).$$

De plus, la somme $\sum_{0}^{N-1} b_k$ est fixée et $\lim_{n \to +\infty} \sum_{0}^{n} a_k = +\infty$. Il existe donc M dans $\mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant M \quad \left| \sum_{0}^{N-1} b_k \right| \leqslant \varepsilon\, S_n(a).$$

Donc, pour tout $n \geqslant M$, on a :

$$|S_n(b)| \leqslant 2\,\varepsilon\, S_n(a).$$

b) L'hypothèse $a_n \sim b_n$ se traduit par $a_n - b_n = o(a_n)$, et on applique le **a)**.

c) On pose $a_n = \dfrac{1}{n}$ et $b_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

2) a) On calcule $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

$$\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n} + v_n\right) = -\frac{\lambda}{n} + v_n + K_n\left(-\frac{\lambda}{n} + v_n\right)^2.$$

La suite (K_n) est bornée. On note K un majorant de cette suite et on pose :

$$w_n = v_n + K_n\left(-\frac{\lambda}{n} + v_n\right)^2.$$

$|w_n|$ est majoré par la somme de termes généraux de séries positives convergentes.
La série $\sum w_n$ converge absolument.

b) $\displaystyle\sum_{1}^{n} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_1) = -\lambda \sum_{1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{1}^{n} w_k.$

On sait que $\displaystyle\sum_{1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

On pose $\gamma_n = \displaystyle\sum_{1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_1) = -\lambda\,(\gamma_n + \ln(n)) + \sum_{1}^{n} w_k.$$

Puis $u_{n+1} = u_1\, n^{-\lambda} \exp\left(-\lambda\,\gamma_n + \displaystyle\sum_{1}^{n} w_k\right)$.

On note $w = \displaystyle\sum_{1}^{\infty} w_k$ et $A = u_1 \exp(-\lambda\,\gamma + w)$.

Alors $u_n \sim A\, n^{-\lambda}$.

c) Ici, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{3}{2\,n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Donc, il existe $A > 0$ tel que :

$$u_n \sim A\, n^{-3/2}.$$

La série $\sum u_n$ converge.

32 **1)** Si $S \neq 0$, alors $\sum_1^n u_k \sim S$ et $v_n \sim \frac{S}{n}$.

Donc la série $\sum v_n$ diverge.

Si la série $\sum v_n$ converge, $S = 0$.

2) $\sum_1^N w_n = \sum_{k=1}^N k\,u_k \sum_{n=k}^N \frac{1}{n\,(n+1)} = \sum_{k=1}^N k\,u_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{N+1}\right)$

$$= S_N - \frac{1}{N+1}\left(\sum_{k=1}^N k\,(S_k - S_{k-1})\right)$$

$$= \frac{1}{N+1} S_N + \frac{N}{N+1}\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} S_k\right).$$

Le terme $\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} S_k$ tend vers S lorsque N tend vers $+\infty$, car il s'agit d'une moyenne de Césaro d'une suite de limite S.

Donc, la série $\sum w_n$ converge et $\sum_1^\infty w_n = S$.

3) $\prod_1^n \frac{(k+1)^k}{k^{k-1}} = (n+1)^n$ et $(n+1)\,x_n = \sqrt[n]{\prod_1^n \frac{(k+1)^k}{k^{k-1}}\,u_k}$.

La moyenne géométrique de n réels positifs est inférieure à leur moyenne arithmétique, donc :

$$x_n \leqslant \frac{1}{n\,(n+1)} \sum_1^n \frac{(k+1)^k}{k^{k-1}}\,u_k \leqslant \frac{1}{n\,(n+1)} \sum_1^n \mathrm{e}\,k\,u_k.$$

Donc $0 \leqslant x_n \leqslant \mathrm{e}\,w_n$. La série $\sum x_n$ converge et $\sum_1^\infty x_n \leqslant \mathrm{e}\,S$.

Chapitre 2

1 L'inégalité découle des propriétés de la norme.

2 La linéarité de f permet d'établir trois des quatre propriétés de la définition d'une norme. L'égalité $N(x) = 0$ équivaut à $f(x) = 0_E$. Donc N est une norme si, et seulement si, f est injective.

3 Il suffit de remarquer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leqslant \frac{\sqrt{u_n}}{n} \leqslant \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{n^2}\right).$$

4 Il suffit d'appliquer l'*inégalité de Cauchy-Schwarz* à u et à v, définie par $v_n = \frac{1}{n}$:

$$\left|\sum_0^\infty \frac{u_n}{n}\right| \leqslant N_2(u)\,N_2(v) = \frac{\pi}{\sqrt{6}} N_2(u).$$

5 La forme de l'expression de $N(x)$ (racine carrée de carrés et produits) suggère de montrer que N est la norme associée à un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

L'égalité de polarisation impose, pour $x = (a,b)$ et $x' = (a',b')$:

$$\varphi(x,x') = \frac{N(x+x')^2 - N(x)^2 - N(x')^2}{2}.$$
$$= aa' + ab' + a'b + 5\,bb'.$$

On justifie ensuite sans difficulté que φ définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

6 La seule propriété définissant une norme qui ne soit pas vérifiée avec toute fonction positive et continue f est $N_f(P) = 0 \Rightarrow P = 0$.

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ tel que $N_f(P) = 0$. Alors :

$$\forall t \in [0,1] \qquad P(t) = 0 \text{ ou } f(t) = 0.$$

Si f n'est pas nulle sur [0,1], il existe un intervalle $[a,b]$, avec $a < b$, contenu dans [0,1] sur lequel elle ne s'annule pas car elle est continue. P devra alors s'annuler sur $[a,b]$ et P sera donc le polynôme nul.

La condition nécessaire et suffisante recherchée est donc $f \neq 0$.

7 **1)** Il s'agit de prouver l'égalité de deux ensembles. On procède par double inclusion :

• $\forall z \in x + B(y,r) \quad \exists u \in B(y,r) \qquad z = x + u$

Donc :

$$\|z - (x+y)\| = \|u - y\| < r.$$

On en déduit que $z \in B(x+y,r)$.

• Réciproquement. Soit z dans $B(x+y,r)$.

Alors $\|z - (x+y)\| < r$, donc $z - x \in B(y,r)$. Puis $z \in x + B(y,r)$.

2) Immédiat en utilisant la définition d'une boule.

8 Si x est un vecteur de E différent de a, le vecteur $a + \frac{r}{2}\frac{x-a}{\|x-a\|}$ appartient à $BO(a,r)$, donc à F. F est un sous-espace vectoriel de E. $x - a$, puis x, appartiennent à F. Donc $F = E$.

9 Si $O = \varnothing$, alors $A + O = \varnothing$. C'est un ouvert de E. On suppose $O \neq \varnothing$.

Soit (a,b) dans $A \times O$. O étant un ouvert de E, il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte $BO(b,r)$ soit contenue dans O. Alors $BO(a+b,r) = a + BO(b,r)$ est contenue dans $A + O$, qui est donc un ouvert de E.

10 Soit x un point de E. On a $d(x,A) = 0$ si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, la boule $BO(x,\varepsilon)$ contient des points de A.

11 **1)**(*PSI*) F étant un sous-espace vectoriel de E et x un point adhérent à F, on considère une suite (x_n) de points de F convergeant vers x et une base $(e_i)_{i\in[\![1,\,p]\!]}$ de F. On écrit x_n dans la base $(e_i)_{i\in[\![1,\,p]\!]}$. La convergence de la suite (x_n) entraîne les convergences des p suites de coordonnées dans $\mathbb{K}$ et l'appartenance de x à F. Donc F est fermé.

(*PC*) On considère une base $(e_i)_{i\in[\![1,\,p]\!]}$ de F, complétée en une base $(e_i)_{i\in[\![1,\,n]\!]}$ de E. L'espace E est muni de la norme $\|\|$:

$$\|\sum_1^p x_i e_i\| = \sum_1^p |x_i|.$$

Si x n'appartient pas à F, alors : $x = \sum_1^p x_i e_i + u$, et $u \neq 0$ n'est pas dans F. Alors, pour tout vecteur a de F : $\|x-a\| \geqslant \|u\|$.

On pose : $r = \dfrac{\|u\|}{2} > 0$. Alors :

$$BO(x,r) \subset \complement_E F.$$

Le complémentaire de F est ouvert.

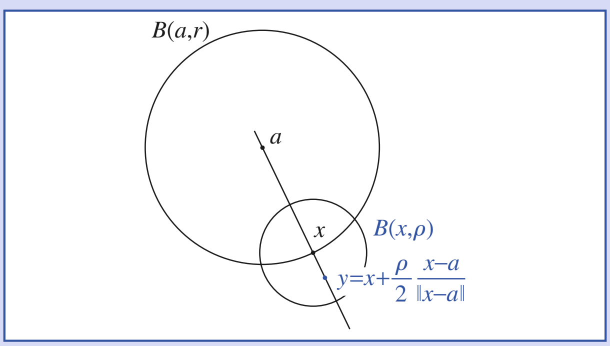
2) Il suffit d'utiliser l'*exercice* 8 pour conclure que E est le seul sous-espace vectoriel ouvert de E.

12 Soit a dans E et $r > 0$.

1) On note $BF(\overset{\circ}{a},r)$ l'ensemble des points intérieurs à $BF(a,r)$.

• $BO(a,r)$ est un ouvert contenu dans $BF(a,r)$, donc tout point de $BO(a,r)$ est intérieur à $BF(a,r)$. D'où $BO(a,r) \subset BF(\overset{\circ}{a},r)$.

• Soit x tel que $\|x-a\| = r$ et $\rho > 0$.



On montre que x ne peut être intérieur à $BF(a,r)$, c'est-à-dire que $BO(x,\rho)$ n'est pas incluse dans $BF(a,r)$. En effet :

$$y = x + \frac{\rho}{2}\frac{x-a}{\|x-a\|} \in BO(x,\rho)$$

et $\|y-a\| = r + \dfrac{\rho}{2} > r$.

L'ensemble des points intérieurs à $BF(a,r)$ est $BO(a,r)$.

2) On note $\overline{BO(a,r)}$ l'ensemble des points adhérents à $BO(a,r)$.

• $BF(a,r)$ est un fermé, donc tout point adhérent à $BF(a,r)$ est dans $BF(a,r)$. Tout point adhérent à $BO(a,r)$ est donc aussi dans $BF(a,r)$. On en déduit $\overline{BO(a,r)} \subset BF(a,r)$.

• Soit x tel que $\|x-a\| = r$. x est limite de la suite (x_n) de $BO(a,r)$ définie par $x_n = a + \dfrac{n-1}{n}(x-a)$. Donc $BF(a,r) \subset \overline{BO(a,r)}$. L'ensemble des points adhérents à $BO(a,r)$ est $BF(a,r)$.

13 Montrer que λA est un fermé borné de E.

14 **1)** • La fonction N est une norme classique, souvent notée N_1.

• On suppose $N'(f) = 0$, alors :

$$|f(0)| = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 |f'(x)|\,\mathrm{d}x = 0.$$

Or l'application $|f'|$ est continue, positive sur [0,1], donc $|f'|$ est la fonction nulle, et f est constante. De plus, $|f(0)| = 0$, donc $f = 0_E$.

• Pour N'', constater que $N''(f) = |f(0)| + N'(f')$.

2) Pour tout t de [0, 1], $f(t) = f(0) + \int_0^t f'(x)\,\mathrm{d}x$, donc :

$$|f(t)| = |f(0) + \int_0^t f'(x)\,\mathrm{d}x| \leqslant |f(0)| + \int_0^1 |f'(x)|\,\mathrm{d}x.$$

On en déduit : $N(f) \leqslant N'(f)$.

Puis :

$$N'(f) = |f(0)| + N(f') \leqslant |f(0)| + N'(f') = N''(f).$$

3) On note $f_n(x) = x^n$. Il est aisé de constater que, pour $n \geqslant 2$:

$$N(f_n) = \frac{1}{n+1},\quad N'(f_n) = 1 \quad \text{et} \quad N''(f_n) = n.$$

On en déduit que, deux à deux, les normes N, N' et N'' ne sont pas équivalentes.

15 **1)** L'application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$

$$(f,g) \mapsto f(0)\,g(0) + \int_0^1 f'(t)\,g'(t)\,\mathrm{d}t$$

est un produit scalaire. N est la norme associée à ce produit scalaire.

2) Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur [0,1], on peut écrire :

$$\forall x \in [0,1] \quad f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t. \text{ Donc :}$$

$$\forall x \in [0,1] \quad (f(x))^2 = \left(f(0) + \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2$$

$$\leqslant f^2(0) + 2|f(0)\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t| + \left(\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2.$$

Or $|f(0)|\left|\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(f^2(0) + \left(\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2\right)$.

Avec l'*inégalité de Cauchy-Schwarz* :

$$\left(\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_0^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t \times \int_0^1 1\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

On obtient ainsi :

$$\forall x \in [0,1] \quad (f(x))^2 = 2(f^2(0) + \int_0^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t) = 2N(f)^2.$$

D'où le résultat souhaité : $\|f\|_\infty \leqslant \sqrt{2}\,N(f)$.

3) On considère la suite (f_n) de $E^{\mathbb{N}}$ définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par $f_n(x) = x^n$.

$$\|f_n\|_\infty = 1 \quad \text{et} \quad N(f_n) = \left(\int_0^1 n^2 t^{2n-2}\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} = \frac{n}{\sqrt{2n-1}}.$$

Les normes $\|\ \|_\infty$ et N ne sont pas équivalentes, car :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{N(f_n)}{\|f_n\|_\infty} = +\infty.$$

16 **1)** L'application φ est bilinéaire et :

$$\varphi(A,B) = \mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}AB) = \mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}AB)) = \mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}BA) = \varphi(B,A).$$

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\varphi(A,A) = \mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}AA) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ki}^2\right) \geqslant 0.$$

De plus, si $\varphi(A,A) = 0$, alors $A = 0$. φ est donc un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et sa norme associée est :

$$N(A) = \sqrt{\left(\sum_{(i,k)} a_{ik}^2\right)}.$$

2) $N(A)^2 = \mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}AA) = \mathrm{tr}(A\,{}^{\mathrm{t}}A) = N({}^{\mathrm{t}}A)^2$.

3) a) On note $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = AB = (c_{ij})$.

$$N(AB)^2 = \sum_{i,j} c_{ij}^2 = \sum_{i,j}\left(\sum_k a_{ik}b_{kj}\right)^2.$$

L'*inégalité de Cauchy-Schwarz*, dans l'espace $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire $\langle x \mid y\rangle = \sum_k x_k y_k$, donne :

$$\left(\sum_k a_{ik}b_{kj}\right)^2 \leqslant \sum_k a_{ik}^2 \sum_k b_{kj}^2$$

d'où on déduit :

$$\sum_{i,j} c_{ij}^2 \leqslant \left(\sum_{i,k} a_{ik}^2\right)\left(\sum_{j,k} b_{jk}^2\right) = N(A)^2 N(B)^2.$$

b) L'égalité a lieu si, et seulement si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad \left(\sum_k a_{ik}b_{kj}\right)^2 = \sum_k a_{ik}^2 \sum_k b_{kj}^2.$$

Or, il s'agit d'*égalité de Cauchy-Schwarz*.

- Si $A = 0$, l'égalité est vérifiée pour toute matrice B.
- Si $B = 0$, l'égalité est vérifiée pour toute matrice A.
- Si A et B sont non nuls, on sait que cette égalité est réalisée si, et seulement si, les vecteurs $(a_{i1},\dots,a_{in})$ et $(b_{1j},\dots,b_{nj})$ sont colinéaires pour tous i et j. Les matrices A et ${}^{t}B$ ont donc leurs lignes proportionnelles, elles sont de rang 1. Et, de plus, on doit avoir $\mathrm{Im}\,A = \mathrm{Im}\,{}^{\mathrm{t}}B$. Réciproquement, si $\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,({}^{\mathrm{t}}B) = 1$ et $\mathrm{Im}\,A = \mathrm{Im}\,{}^{\mathrm{t}}B$, alors l'égalité est vérifiée.

17 **1)** On pose $\varepsilon = \dfrac{l-1}{2} > 0$. Alors :

$$\exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \qquad 1 < l - \varepsilon \leqslant \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant l + \varepsilon.$$

On en déduit par récurrence :

$$\forall n \geqslant N \quad a_n \geqslant a_N(l-\varepsilon)^{n-N},$$

puis $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

2) On étudie la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{a(a^2+1)}{x^2+1}.$$

f est paire, dérivable et $f'(x) = -\dfrac{2a(a^2+1)x}{(x^2+1)^2}$.

x	0		$+\infty$
$f(x)$	$a(a^2+1)$	$\searrow$	0

On peut donc supposer que $u_0 \in\,]0, a(a^2+1)]$. Cet intervalle est stable par f et f est décroissante sur cet intervalle. Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont donc monotones, l'une croissante et l'autre décroissante. Bornées, elles convergent. Leurs limites sont points fixes de $f \circ f$.

On précise les points fixes éventuels de f, puis de $f \circ f$.

$$f(x) = x \Leftrightarrow (x-a)(x^2+ax+a^2+1) = 0.$$

$$f\circ f(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad x^5 - a(a^2+1)x^4 + 2x^3 - 2a(a^2+1)x^2 + x(1+a^2(a^2+1)^2) - a(a^2+1) = 0.$$

Puisque toute racine réelle ou complexe de $f(x) = x$ est solution de $f \circ f(x) = x$, on peut factoriser l'équation obtenue :

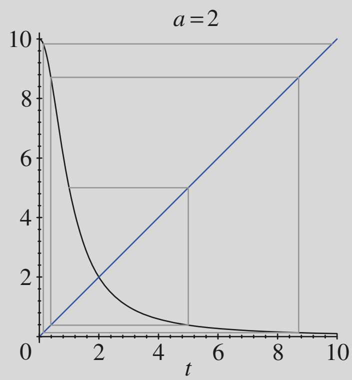
$$f\circ f(x) = x \Leftrightarrow (x-a)(x^2+ax+a^2+1)(x^2-a(a^2+1)x+1) = 0.$$

L'équation $x^2 - a(a^2+1)x + 1 = 0$ a pour discriminant :

$$\Delta = (a-1)(a^2+a+2)(a(a^2+1)+2).$$

Avec Maple :

```
> restart :with(plots) :
> suiteRec :=proc(f,a,n,L) local
x,res,g1,g8 :
  x :'x' :g1 :=plot({f(t),t},t=0..L,
  scaling=constrained) :
  res :=NULL :x :=1.0 :
  to n do res :=res,[x,f(x)],[f(x),f(x)] ;
  x :=f(x) od :
  g8 :=plot([res]) :
  display({g1,g8}) ;
  end ;
```



Deux cas peuvent alors se présenter :

• $a \leqslant 1$, l'équation $f \circ f(x) = x$ admet une seule racine réelle a, donc la suite (u_n) converge vers a ;

• $a > 1$, l'équation admet trois racines a, b, c et ces racines sont distinctes car a n'est pas racine de $x^2 - a(a^2+1)x + 1 = 0$.

Si $u_0 = a$, alors la suite (u_n) est stationnaire.

Sinon, $f(a) = a$, $f(b) = c$ et $f(c) = b$.

De plus, on a :

$$f'(a) = -\frac{2a^2}{a^2+1}.$$

Donc :

$$|f'(a)| > 1.$$

Si la suite (u_{2n}) convergeait vers a, on aurait :

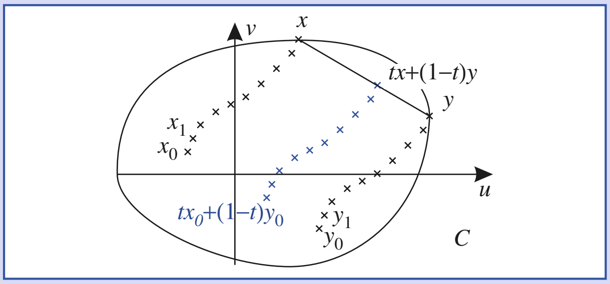
$$\lim u_{2n+1} = f(a) = a$$

et :

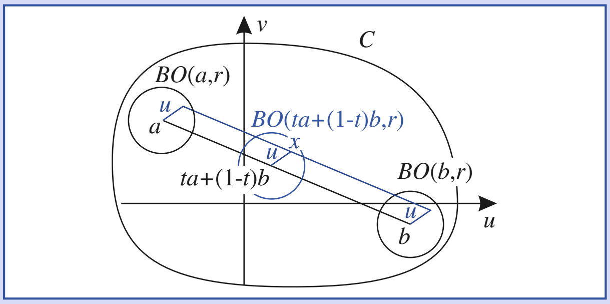
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{2n+1} - a|}{|u_{2n} - a|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|f(u_{2n}) - a|}{|u_{2n} - a|} = |f'(a)| > 1.$$

La question précédente montre que ceci est impossible. L'une des deux suites extraites converge donc vers b, l'autre vers c. La suite (u_n) diverge (voir *schéma*).

18 **1)** On considère $\overline{C}$ l'ensemble des points adhérents à C, x, y deux points de cet ensemble et t un réel de $]0, 1[$. x et y sont respectivement limites de (x_n) et (y_n), deux suites de points de C. Le point $t\,x + (1-t)y$ est donc limite de la suite $(tx_n + (1-t)\,y_n)$, qui est une suite d'éléments de C. L'ensemble des points adhérents à C est donc convexe.



2) On considère $\overset{\circ}{C}$ l'ensemble des points intérieurs à C, a, b deux points de cet ensemble et t un réel de $]0, 1[$.



On prouve que $t\,a + (1-t)b$ est un point intérieur à C.
Il existe $r > 0$ tel que les boules ouvertes $BO(a, r)$ et $BO(b, r)$ soient contenues dans C. On montre que la boule ouverte $BO(ta + (1-t)b, r)$ est aussi contenue dans C.

$$\forall x \in BO(ta + (1-t)b, r)$$

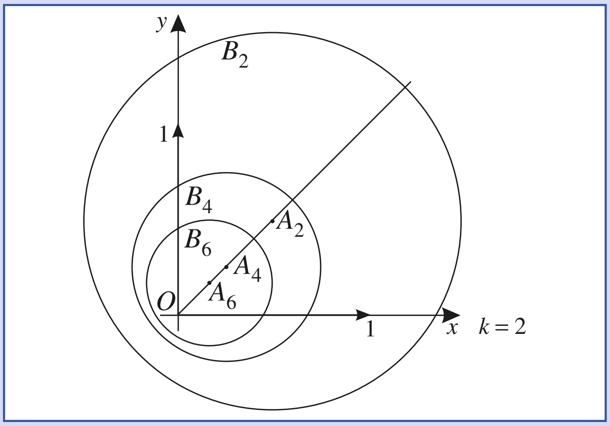
$$x = ta + (1-t)b + \left[t(x-a) + (1-t)(x-b)\right].$$

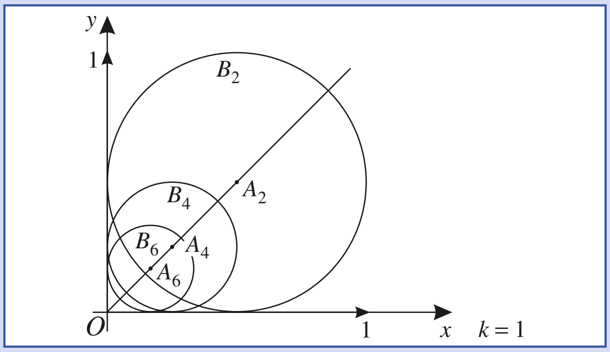
On pose $u = x - [ta + (1-t)b] = t(x-a) + (1-t)(x-b)$.

Alors, on a $\|u\| < r$.

Donc, $a + u \in BO(a, r)$ et $b + u \in BO(b, r)$, puis $a + u \in C$ et $b + u \in C$. La convexité de C donne : $t(a+u) + (1-t)(b+u) = x \in C$. L'ensemble des points intérieurs à C est donc convexe.

19 On note $A_n\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right)$ le centre de la boule B_n et on fait une figure. On constate alors deux cas différents.





On sait que deux cercles de centres C et C', de rayons R et R', sont emboîtés si, et seulement si, $d(C, C') \leqslant |R - R'|$.

Si $\sqrt{2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)^2} \leqslant \frac{k}{n} - \frac{k}{n+1}$, c'est-à-dire si $k \geqslant \sqrt{2}$, alors $B_{n+1} \subset B_n$.

Les boules B_n sont emboîtées. $B = B_1$ et B est fermé.
Si $k < \sqrt{2}$, les boules ne contiennent pas O. Mais toute boule ouverte de centre O rencontre B. B n'est pas fermé.

20 **1)** On sait que, pour tout x de $[0, a]$, on a :

$$|f(x) - f_n(x)| = \frac{x^{n+1}}{1-x} \leqslant \frac{a^{n+1}}{1-a}.$$

Donc : $$N_\infty(f - f_n) \leqslant \frac{a^{n+1}}{1-a}.$$

Pour conclure, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a^{n+1}}{1-a} = 0$, donc la suite (f_n) converge vers f dans (E, N_∞). f n'est pas une fonction polynôme.

2) L'espace vectoriel F des fonctions polynômes sur $[0, a]$ est un sous-espace vectoriel de E qui n'est pas fermé dans (E, N_∞).

21 Soit u_0 dans E, on considère la suite (u_n) définie par u_0 et : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

• $N(u_{n+2} - u_{n+1}) \leqslant \frac{\alpha}{1-\alpha} N(u_{n+1} - u_n)$.

Or $\frac{\alpha}{1-\alpha} \in]0, 1[$. On pose $k = \frac{\alpha}{1-\alpha}$.

Par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N} \quad N(u_{n+2} - u_{n+1}) \leqslant k^{n+1} N(u_1 - u_0)$.
$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} N(u_{n+p} - u_n) &\leqslant \sum_{j \in [\![1, p]\!]} N(u_{n+j} - u_{n+j-1}) \\ &\leqslant N(u_1 - u_0) \sum_{j \in [\![1, p]\!]} k^{n+j-1} \\ &\leqslant N(u_1 - u_0)\, k^n \frac{1}{1-k}. \end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc une suite de Cauchy de $\mathbb{R}^2$. Elle converge vers u dans $\mathbb{R}^2$.

• La relation vérifiée par f donne :

$$N(u_{n+1} - f(u)) \leqslant \alpha\, N(u_{n+1} - u_n) + \alpha\, N(f(u) - u)$$

puis :

$$\begin{aligned} N(u - f(u)) &\leqslant N(u - u_{n+1}) + N(u_{n+1} - f(u)) \\ &\leqslant N(u - u_{n+1}) + \alpha\, N(u_{n+1} - u_n) + \alpha\, N(f(u) - u)\,; \end{aligned}$$

soit :

$$0 \leqslant (1 - \alpha) N(u - f(u)) \leqslant N(u - u_{n+1}) + \alpha\, N(u_{n+1} - u_n).$$

Or :

$$\lim_{n \to +\infty} N(u - u_{n+1}) = \lim_{n \to +\infty} N(u_{n+1} - u_n) = 0$$

donc : $$\lim_{n \to +\infty} N(u - f(u)) = 0.$$

Ceci implique $f(u) = u$.

• On suppose que u et v sont points fixes de f. Alors :

$$N(f(u) - f(v)) \leqslant \alpha\, N(f(u) - u) + \alpha\, N(f(v) - v) = 0.$$

D'où : $$f(u) = f(v) = u = v.$$

Chapitre 3

1 • Si $a > 1$, alors $a + \sin\left(\frac{1}{x}\right) \geqslant a - 1 > 0$.

Dans ce cas :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty.$$

• Si $a < -1$, alors $a + \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant a + 1 < 0$. Dans ce cas :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty.$$

• Si $a \in [-1, 1]$, un bon choix de deux suites tendant vers 0 permettra de prouver que f n'a de limite ni à droite, ni à gauche en 0.

2 On fixe x dans E.

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x}{2^n} = 0_E$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} h\left(\frac{x}{2^n}\right) = L$. De plus, pour tout n, $h\left(\frac{x}{2^n}\right) = h(x)$.

Donc : $$\forall x \in E \quad h(x) = L.$$

3 **1)** • La définition de $\mathrm{E}\left(\frac{b}{x}\right)$ permet d'encadrer $\frac{x}{a}\mathrm{E}\left(\frac{b}{x}\right)$ et d'en déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{a}\mathrm{E}\left(\frac{b}{x}\right) = \frac{b}{a}$.

• Pour x tel que $0 < x < a$, $\mathrm{E}\left(\frac{x}{a}\right) = 0$. Donc :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{b}{x}\mathrm{E}\left(\frac{x}{a}\right) = 0.$$

2) • On trouve aussi $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x}{a}\mathrm{E}\left(\frac{b}{x}\right) = \frac{b}{a}$.

• Pour x tel que $-a < x < 0$, $\mathrm{E}\left(\frac{x}{a}\right) = -1$. Donc :

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{b}{x}\mathrm{E}\left(\frac{x}{a}\right) = +\infty.$$

4 En 0, la fonction étudiée est équivalente à $x^{\alpha-\beta}$ Donc :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+x^\alpha}-\sqrt{1-x^\alpha}}{x^\beta} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \alpha > \beta \\ 1 & \text{si} \quad \alpha = \beta \\ +\infty & \text{si} \quad \alpha < \beta \end{cases}$$

5 Les fonctions $((x, y) \mapsto h(x) - h(y))$ et $((x, y) \mapsto x - y)$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$, donc f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$.
Si l'on fixe x, alors $\lim_{y\to x} f(x, y) = h'(x)$. On pose donc :

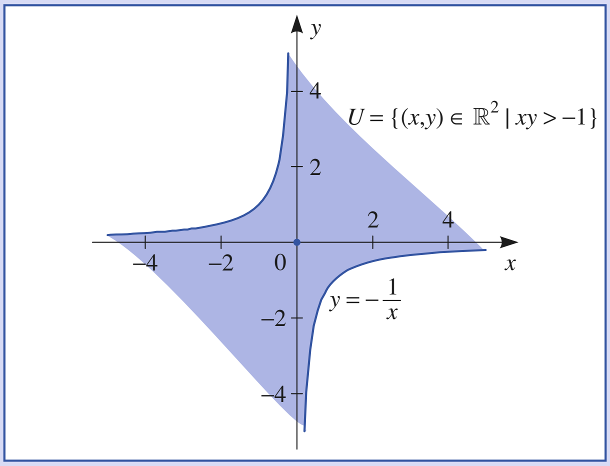
$$f(x, x) = h'(x).$$

Il reste à prouver que :

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,x_0)} f(x, y) = f(x_0, x_0) = h'(x_0).$$

C'est une conséquence du *théorème des accroissements finis* appliqué à la fonction h qui est de classe $\mathcal{C}^1$.

6 f est définie sur $U = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ xy > -1\right\}$.



On étudie la continuité de f sur U, ouvert de $\mathbb{R}^2$.
On définit g sur $]-1, +\infty[$ en posant :

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

On peut écrire : $\forall (x, y) \in U \quad f(x, y) = y\, g(xy)$. De plus, g est continue sur $]-1, +\infty[$, l'application $((x, y) \mapsto xy)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, car c'est une fonction polynôme des deux variables (x, y). Donc f est continue sur U.

7 La fonction $f - g$ est continue sur le compact $[a, b]$, elle atteint donc son minimum, noté λ, en un point x_0 de $[a, b]$.
On a : $\forall x \in [a, b] \quad f(x) - g(x) \geqslant f(x_0) - g(x_0) = \lambda$. D'où le résultat.

8 **1)** On note $\| \ \|$ la norme associée au produit scalaire.
D'après l'*inégalité de Cauchy-Schwarz* :
$\forall (x_1, x_2) \in E^2 \ |f_a(x_1) - f_a(x_2)| \leqslant |\langle x_1 - x_2 | a\rangle| \leqslant \|a\| \, \|x_1 - x_2\|$.
Donc, l'application f_a est $\|a\|$-lipschitzienne sur E. D'où la continuité.
2) Pour tout a de E, $f_a^{-1}(\{0\})$ est un fermé de E et :

$$A^\perp = \bigcap_{a\in A} f_a^{-1}\left(\{0\}\right).$$

Une intersection quelconque de fermés est un fermé, donc $A^\perp$ est un fermé de E.

9 L'application $\Pi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ (A, B) \longmapsto AB \end{cases}$ est bilinéaire, l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie. Le cours permet de conclure.

10 **1)** $p(x, y) = (x - ay, 0)$ et $q(x, y) = (ay, y)$.
Pour tout (x, y) tel que $\|(x, y)\| \leqslant 1$, :

$$(x, y) = (r\cos t, r\sin t).$$

$\|p(x, y)\| = |x - ay| = |r|\,|\cos t - a\sin t| \leqslant |\cos t - a\sin t|$
Ainsi $\|p\|_{\mathcal{L}} = \sup_{t\in[0,2\pi]} |\cos t - a\sin t| = \sqrt{1+a^2}$.
De même : $\|q(x, y)\| = |y|\sqrt{1+a^2}$.
Donc : $\|q\|_{\mathcal{L}} = \sup_{\|(x,y)\|\leqslant 1} \|q(x, y)\| = \sqrt{1+a^2}$.
2) En posant $a = \sqrt{3}$ dans la question précédente, l'affinité f est l'application $f = p + \dfrac{1}{2}q$.
Donc :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{y}{2}\right).$$

$$\|f(x, y)\| \leqslant \sqrt{\left(\cos t - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t\right)^2 + \left(\frac{\sin t}{2}\right)^2}.$$

On en déduit que :

$$\|f\|_{\mathcal{L}} = \sup_{t\in[0,2\pi]} \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2t)} = \sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

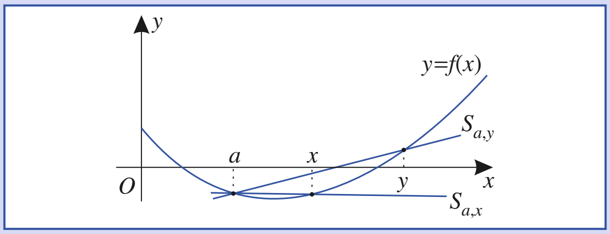
3) Tout endomorphisme auto-adjoint, u, de $\mathbb{R}^2$ est diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$. On note α_1 et α_2 les valeurs propres de u et $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ une base orthornormée de vecteurs propres de u.
Tout élément (x, y) de $\mathbb{R}^2$ s'écrit $(x, y) = x_1\overrightarrow{v_1} + x_2\overrightarrow{v_2}$ et $f(x, y) = \alpha_1 x_1 \overrightarrow{v_1} + \alpha_2 x_2 \overrightarrow{v_2}$.
Donc :

$$\|f(x, y)\| = \sqrt{(\alpha_1 x_1)^2 + (\alpha_2 x_2)^2} \leqslant \max(|\alpha_1|, |\alpha_2|)\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$
$$= \max(|\alpha_1|, |\alpha_2|)\|(x, y)\|.$$

On en déduit $\|f\|_{\mathcal{L}} \leqslant \max(|\alpha_1|, |\alpha_2|)$. En utilisant les vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$, on montre aisément qu'il y a égalité :

$$\|f\|_{\mathcal{L}} = \max(|\alpha_1|, |\alpha_2|).$$

11 **1)** C'est une propriété classique des fonctions convexes.



2) La fonction $\left(x \longmapsto \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)$ est croissante sur $]0,+\infty[$, donc elle admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ lorsque x tend vers $+\infty$. On en déduit l'existence de $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

3) On montre aisément que, pour tout a de $\mathbb{R}^+$:

$$\ell = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

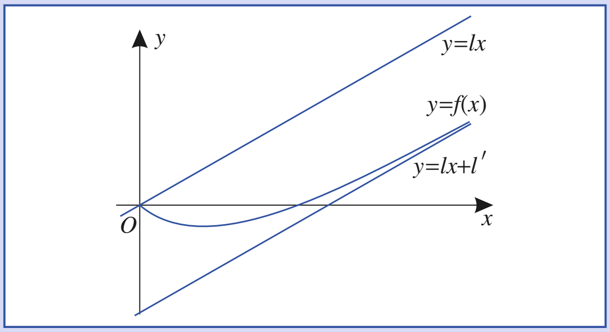
On sait que $\left(x \longmapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$ est croissante sur $]a,+\infty[$.

Donc :

$$(0 \leqslant a < x) \Rightarrow \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant \ell\right)$$

$$\Rightarrow (f(x) - lx \leqslant f(a) - \ell a).$$

La fonction $(x \longmapsto f(x) - lx)$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ lorsque x tend vers $+\infty$.



12 On considère l'ensemble :

$$A = \{x \in [0,1] |\ f(x) \geqslant x \quad \text{et} \quad g(x) \geqslant x\}.$$

A est une partie non vide ($0 \in A$) et bornée de $\mathbb{R}$, donc admet une borne supérieure a.

On note $f(a^-)$ (respectivement $g(a^-)$) la limite à gauche de f (respectivement de g) en a

Les fonctions f et g sont croissantes, donc :

$$f(a) \geqslant f(a^-) \geqslant a \quad \text{et} \quad g(a) \geqslant g(a^-) \geqslant a.$$

On en déduit : $f(g(a)) = g(f(a)) \geqslant g(a)$ et $g(g(a)) \geqslant g(a)$.

Donc $g(a) \in A$, et $g(a) \leqslant a = \sup A$.

Finalement, $g(a) = a$ et, de même, $f(a) = a$.

13 Toute solution du problème est telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad h(t) = h\left(\frac{t}{2^n}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)\ldots\cos\left(\frac{t}{2^n}\right).$$

On en déduit par récurrence que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^*\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad h(t) = h\left(\frac{t}{2^n}\right)\frac{t}{2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)}\frac{\sin(t)}{t}.$$

On note l la limite de la fonction h en 0. En fixant t et en faisant tendre n vers $+\infty$ dans la dernière égalité, on obtient :

$$h(t) = l\frac{\sin(t)}{t}.$$

Réciproquement, si $h(t) = l\dfrac{\sin(t)}{t}$ pour $t \neq 0$ et $h(0) = l$, alors h est solution du problème.

14 Si $A = \emptyset$ ou $A = E$, alors χ_A est constante, donc continue sur E.

Dans la suite, on suppose $A \neq \emptyset$ et $A \neq E$. On note x un élément de A, y un élément de $\complement_E A$ et on désigne par φ l'application de $[0,1]$ dans E définie par $\varphi(t) = t\,x + (1-t)y$.

L'application $\chi_A \circ \varphi$ est une application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ dont l'image est $\{0,1\}$. Cette image n'est pas un intervalle et le *théorème des valeurs intermédiaires* prouve que $\chi_A \circ \varphi$ n'est pas continue. Or φ l'est, donc χ_A ne l'est pas.

La fonction caractéristique de A, χ_A est continue si, et seulement si, $A = \emptyset$ ou $A = E$.

15 Il faut prouver que :

$$\forall (x,y) \in E^2 \ \ |\delta(x) - \delta(y)| \leqslant \|x-y\| = d(x,y).$$

On fixe (x,y) dans E^2. On sait que :

$$\forall a \in A \quad d(x,a) \leqslant d(x,y) + d(y,a)$$

Puisque $\delta(x) = \inf\limits_{a\in A} d(x,a)$:

$$\forall a \in A \ \ \delta(x) \leqslant d(x,y) + d(y,a)$$

et : $$\delta(x) - d(x,y) \leqslant d(y,a).$$

Le réel $\delta(x) - d(x,y)$ minore $\{d(y,a) \mid a \in A\}$, donc :

$$\delta(x) - d(x,y) \leqslant \delta(y) = \inf\{d(y,a) \mid a \in A\}.$$

Finalement : $$\delta(x) - \delta(y) \leqslant d(x,y).$$

En échangeant les rôles de x et y, on trouve aussi :

$$\delta(y) - \delta(x) \leqslant d(x,y).$$

On a prouvé : $\forall (x,y) \in E^2\ \ |\delta(x) - \delta(y)| \leqslant d(x,y) = \|x-y\|$.

16 **1)** On procède par contraposée.

• On suppose que $A \cap B \neq \emptyset$.
Soit $x \in A \cap B$, alors : $d(x, A) = d(x, B) = 0$.

Donc : $\exists x \in E \quad d(x, A) + d(x, B) = 0$.

• Réciproquement, on suppose que :

$$\exists x \in E \;\; d(x, A) + d(x, B) = 0.$$

Sachant que $d(x, A)$ et $d(x, B)$ sont des réels $\geqslant 0$, on peut dire :

$$\exists x \in E \;\; d(x, A) = d(x, B) = 0.$$

Dans l'*exercice* 10 du *chapitre* 2, on a prouvé que $d(x, A) = 0$ si, et seulement si, x est un point adhérent à A. Donc, si $d(x, A) = d(x, B) = 0$, alors x est adhérent à A et à B. Or A et B sont fermés, donc $x \in A \cap B$ et $A \cap B \neq \emptyset$.

2) Vérifier que :

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)},$$

$U = f^{-1}\left(\left]-\infty, \frac{1}{3}\right[\right)$ et $V = f^{-1}\left(\left]\frac{2}{3}, +\infty\right[\right)$ conviennent.

17 **1)** Soit f une application k-lipschitzienne de E dans E. Pour tout réel $l \geqslant k$, l'application f est aussi l-lipschitzienne et $[k, +\infty[\subset I_f$. Donc I_f est un intervalle.

2) Soit (f, g) dans L^2 et k un élément de $I_f + I_g$.
Ecrire $k = k_1 + k_2$, avec $k_1 \in I_f$ et $k_2 \in I_g$. Montrer que $f + g$ est k-lipschitzienne. Ceci prouve que $I_f + I_g \subset I_{f+g}$.

3) Pour tout f de L, I_f est une partie non vide de $\mathbb{R}^+$, donc $N(f) \in \mathbb{R}^+$.

18 La fonction f est 1-lipschitzienne sur K. Elle est donc continue sur K et la fonction g : $\left\{\begin{array}{ccc} K & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \|f(x) - x\| \end{array}\right.$ aussi.

La fonction continue g a un minimum sur K. On note x_0 un point de K en lequel ce minimum est atteint :
Si $g(x_0) \neq 0$, alors $f(x_0) \neq x_0$, donc :

$$\|f(f(x_0)) - f(x_0)\| < \|f(x_0) - x_0\|.$$

Ainsi $g(f(x_0)) < g(x_0)$. C'est impossible, donc $g(x_0) = 0$ et x_0 est un point fixe de f.
Pour l'unicité, si x_0 et x_1 sont deux points fixes de f, alors :

$$\|f(x_0) - f(x_1)\| = \|x_0 - x_1\|.$$

Ceci impose $x_0 = x_1$.

19 Soit (x_n) une suite de E convergeant vers 0_E. On note (y_n) la suite définie par :

$$y_n = \begin{cases} x_n & \text{si } x_n = 0_E \\ \dfrac{x_n}{\|x_n\|} & \text{sinon} \end{cases}$$

La suite (y_n) est bornée, donc la suite $(f(y_n))$ est bornée. Or, $f(x_n) = \|x_n\| \, f(y_n)$. Donc la suite $(f(x_n))$ converge vers 0_F.

Ceci étant vrai pour toute suite (x_n) de E tendant vers 0_E, l'application f est continue en 0_E.

Par linéarité : $\forall (x, y) \in E^2 \;\; f(x) - f(y) = f(x - y)$. On en déduit que f est continue sur E.

20 **1)** • $]-\infty, f(y)]$ est un fermé de $\mathbb{R}$, f est continue.

Donc $f^{-1}\Big(]-\infty, f(y)]\Big)$ est un fermé de E.

• On suppose que $f^{-1}(]-\infty, f(y)])$ n'est pas une partie bornée de E. Il existe une suite (v_n) d'éléments de $f^{-1}(]-\infty, f(y)])$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} \|v_n\| = +\infty$.

Donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(v_n) = +\infty$. Or, pour tout n, $f(v_n) \leqslant f(y)$.

C'est impossible, donc $f^{-1}(]-\infty, f(y)])$ est borné.

2) $f^{-1}(]-\infty, f(y)])$ est donc un compact de E. Il suffit maintenant de considérer la restriction de f à ce compact pour conclure.

21 Pour résoudre cet exercice, le résultat suivant est indispensable. Il est démontré au *chapitre* 3 du tome *Algèbre-Géométrie*.

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, rg $(M) < p$ si, et seulement si, tous les déterminants des matrices d'ordre p extraites de M sont nuls.

On note P_p l'ensemble des p-uplets $(i_1, \ldots, i_p)$ d'entiers tels que :

$$1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant n.$$

On fixe $I = ((i_1, \ldots, i_p), (j_1, \ldots, j_p))$ dans P_p^2, on définit l'application ϕ_I par :

$$\phi_I : \left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \\ M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} & \longmapsto & \phi_I(M) = (m_{i_l, j_k})_{\substack{1 \leqslant l \leqslant p \\ 1 \leqslant k \leqslant p}} \end{array}\right.$$

La fonction ϕ_I est linéaire, donc continue. La fonction déterminant (Det : $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$) est aussi continue.

L'ensemble des matrices $M = (m_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$\mathrm{Det}\,(\phi_I(M)) = \mathrm{Det}\,(m_{i_l, j_k})_{\substack{1 \leqslant l \leqslant p \\ 1 \leqslant k \leqslant p}} = 0$$

est l'ensemble Z_I des zéros de $\mathrm{Det} \circ \phi_I$: $Z_I = (\mathrm{Det} \circ \phi_I)^{-1}(\{0\})$. C'est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

D'après le résultat exposé au début, l'ensemble des matrices de rang $< p$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'intersection de tous les Z_I. C'est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

22 **1)** Prouver la linéarité de f.

2) On note $\| \ \|$ une norme sur E, $|||\ |||$ la norme d'endomorphisme associée.

• On suppose que la suite (φ_n) converge dans $\mathcal{L}(E)$ et on note u l'endomorphisme limite de la suite (φ_n). Par définition, $\lim\limits_{n\to+\infty} |||\varphi_n - u||| = 0$.

On fixe un élément x de E. Pour tout n :

$$\|\varphi_n(x) - u(x)\| = \|(\varphi_n - u)(x)\| \leqslant |||\varphi_n - u||| \quad \|x\|.$$

Par encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} \|\varphi_n(x) - u(x)\| = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x) = u(x).$$

• Réciproquement, on suppose que, pour tout x de E, la suite $(\varphi_n(x))$ converge dans E.

On note $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n(x)$, $p = \dim E$, $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de E. Soit $\| \ \|$ la norme de E définie par :

$$\forall x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i\, e_i \in E \quad \|x\| = \max_i |\alpha_i|.$$

Soit $x = \sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i\, e_i$ tel que $\|x\| \leqslant 1$. On a :

$$\|(f-\varphi_n)(x)\| \leqslant \sum_{i=1}^{p} |\alpha_i| \|(f-\varphi_n)(e_i)\| \leqslant \sum_{i=1}^{p} \|(f-\varphi_n)(e_i)\|.$$

Donc $|||f - \varphi_n||| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{p} \|(f - \varphi_n)(e_i)\|$. Par encadrement, on peut conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} |||f - \varphi_n||| = 0$.

23 **1)** On sait que : $\forall x \in \operatorname{Im} p \quad p(x) = x$.

On en déduit $\|p\|_{\mathcal{L}} \geqslant 1$.

2) • Soit p un projecteur orthogonal non nul de l'espace préhilbertien $(E, \langle | \rangle)$.

$$\forall x \in E \quad x = p(x) + (x - p(x)) \quad \text{et} \quad \langle p(x) | x - p(x) \rangle = 0.$$

On en déduit $\quad \|p(x)\|^2 \leqslant \|x\|^2 \quad$ et $\quad \|p\|_{\mathcal{L}} = 1$.

• Soit p un projecteur tel que $\|p\|_{\mathcal{L}} = 1$. On pose :

$$F = \operatorname{Ker} p \quad \text{et} \quad G = \operatorname{Im} p.$$

Soit x un vecteur orthogonal à F, on a :

$$\|p(x)\|^2 = \|x + (p(x) - x)\|^2 = \|x\|^2 + \|p(x) - x\|^2 \geqslant \|x\|^2.$$

Par hypothèse $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$, donc : $\|p(x) - x\| = 0$, $\ x \in G$, et $\ F^{\perp} \subset G$.

Or, $\dim F^{\perp} = \dim G$, donc $F^{\perp} = G$. p est un projecteur orthogonal.

24 • Pour toute matrice $A = (a_{i\,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$|\operatorname{tr}(A)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_{i,i}| \leqslant \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} |a_{i,j}| = N_1(A).$$

Donc $\|\operatorname{tr}\|_1 \leqslant 1$.

De plus, $\operatorname{tr}(\mathrm{I}_n) = n = N_1(\mathrm{I}_n)$, donc $\|\operatorname{tr}\|_1 = 1$.

• Par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)^2 \leqslant n \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2.$$

Donc :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad |\operatorname{tr}(A)|^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{i,i}|\right)^2 \leqslant n \sum_{i=1}^{n} |a_{i,i}|^2$$
$$\leqslant n \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} |a_{i,j}|^2.$$

Ainsi $|\operatorname{tr}(A)| \leqslant \sqrt{n}\, N_2(A)$ et $\|\operatorname{tr}\|_2 \leqslant \sqrt{n}$.

De plus, $\operatorname{tr}(\mathrm{I}_n) = n = \sqrt{n}\, N_2(\mathrm{I}_n)$, donc $\|\operatorname{tr}\|_2 = \sqrt{n}$.

• Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $|\operatorname{tr}(A)| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{i,i}| \leqslant n N_\infty(A)$.

Donc $\|\operatorname{tr}\|_\infty \leqslant n$.

L'égalité $\operatorname{tr}(I_n) = n = n N_\infty(I_n)$ permet de conclure que :

$$\|\operatorname{tr}\|_\infty = n.$$

Chapitre 4

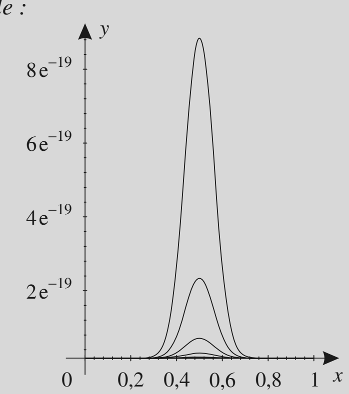
1 Soit $x_1 < x_2$ deux points de I et les fonctions (f_n) supposées croissantes.

Alors, pour tout n de $\mathbb{N}$: $f_n(x_1) \leqslant f_n(x_2)$. D'où :

$$f(x_1) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x_1) \leqslant \lim_{n\to+\infty} f_n(x_2) = f(x_2).$$

2 La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction nulle f. De plus, l'étude de f_n montre que $\|f_n\|_\infty = f_n\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4^n}$. La suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$ vers f.

Avec Maple :




```
> plot({seq(x^n*(1-x)^n,n=30..40)},x=0..1) ;
```

3 L'*inégalité de Taylor-Lagrange* permet d'écrire :

$$\forall (a,x) \in [0,\pi] \quad |\sin x - \sin a| \leqslant |x-a|.$$

On fixe alors un entier $n > 0$ et on choisit une subdivision $(a_j)_{j \in [\![0,p]\!]}$ de $[0,\pi]$, de pas inférieur ou égal à $\frac{1}{n}$. Ensuite, soit la fonction f_n définie sur $[0,\pi]$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = \sin a_j \ \text{ si } \ x \in [a_j, a_{j+1}[\\ f_n(a_p) = \sin a_p = \sin \pi = 0 \end{cases}$$

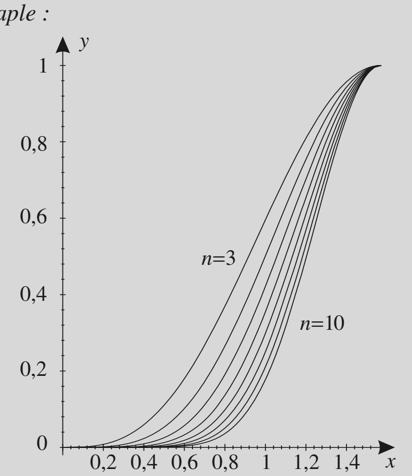
La suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0,\pi]$ vers la fonction sinus.

4 **1)** La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ vers la fonction f, définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ \text{ si } \ x \neq \frac{\pi}{2} \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

La convergence n'est pas uniforme sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, mais elle est uniforme sur tout segment $\left[0, \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right]$ $\left(\varepsilon \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$.

Avec Maple :




```
> plot({seq(sin(x)^n,n=3..10)},
x=0..Pi/2) ;
```

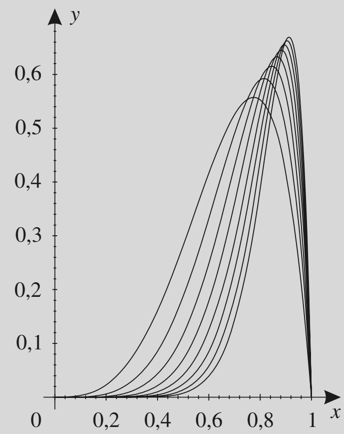
2) La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction nulle f.

x	0	$x_n = \sqrt{\dfrac{n}{n+2}}$	1
$f_n(x)$	0 ↗	$\dfrac{2n}{n+2}\left(\dfrac{n}{n+2}\right)^{n/2}$	↘ 0

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x_n) = 2\mathrm{e}^{-1}$. Donc, la convergence n'est pas uniforme sur $[0,1]$.

Mais, si $a \in\ ]0,1[$, pour n tel que $x_n > a$, on a $\|f_{n|[0,a]}\|_\infty = f_n(a)$. La convergence de la suite de fonctions (f_n) est donc uniforme sur $[0,a]$.

Avec Maple :



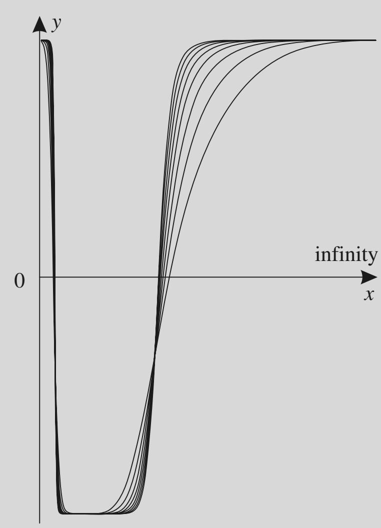

```
> plot({seq(n*x^n*(1-x^2),n=3..10)},x=0..1) ;
```

3) La suite (f_n) converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \in\ ]\mathrm{e}^{-1}, \mathrm{e}[\\ -\dfrac{1}{3} & \text{si} \quad x \in \left\{\mathrm{e}^{-1}, \mathrm{e}\right\} \\ 1 & \text{si} \quad x < \mathrm{e}^{-1} \text{ ou } x > \mathrm{e} \end{cases}$$

La convergence est uniforme sur tout segment contenu dans $]0, \mathrm{e}^{-1}[$ ou $]\mathrm{e}^{-1}, \mathrm{e}[$ ou $]\mathrm{e}, +\infty[$.

Avec Maple :



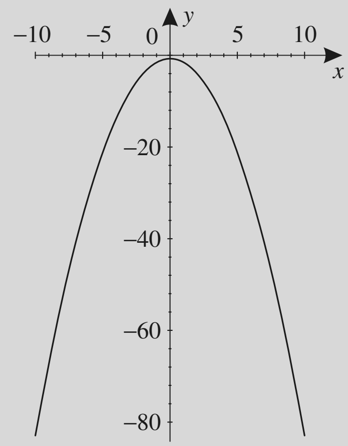

```
> plot({seq((ln(x)^(2*n)-2)
/(ln(x)^(2*n)+2),n=3..10)},
x=0..infinity) ;
```

5 Soit x un réel. La série numérique :

$$\sum (-1)^n \frac{n+x^2}{n^2}$$

est alternée. Elle vérifie le critère spécial des séries alternées, donc la série de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Avec Maple :




```
> plot(sum('(-1)^n*(n+x^2)/(n^£2)',
'n'=1..150),x=-10..10) ;
```

On sait que, pour tout x réel :

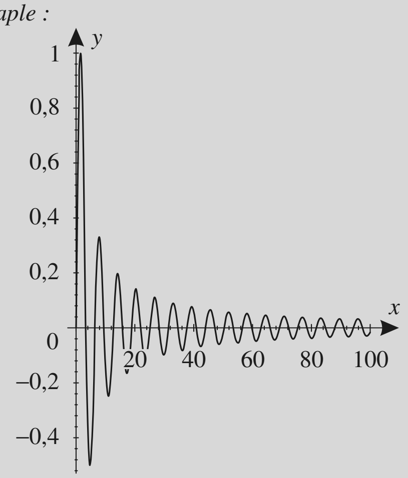
$$|R_{n-1}(x)| \leqslant \frac{n+x^2}{n^2} \leqslant \frac{1}{n} + \frac{x^2}{n^2}.$$

On en déduit la convergence uniforme sur tout compact de la série de fonctions.

6 La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ et sa somme S est définie par :

$$S(x) = \frac{\sin x}{1 + \mathrm{E}\left(\dfrac{x}{\pi}\right)}.$$

Avec Maple :




```
> plot(sin(x)/(1+floor(x/Pi)),x=0..100) ;
```

Elle ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}^+$, car :

$$\|u_n\|_\infty = \frac{1}{n+1},$$

mais elle converge normalement sur tout segment $[0, a]$, avec $a > 0$ fixé.

(*PSI*) De plus, si n est fixé, on a :

$$|S(x) - S_n(x)| = 0 \quad \text{si} \quad x < (n+1)\pi$$

$$|S(x) - S_n(x)| \leqslant \frac{1}{n+2} \quad \text{si} \quad x \geqslant (n+1)\pi.$$

Donc $\|S - S_n\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{n+2}$.

La série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

7 La série de fonctions $\sum \dfrac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\ln n}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ et diverge sur $]-\infty, 0[$.

x	0		$\frac{1}{n}$		$+\infty$
$\dfrac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\ln n}$	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{\mathrm{e}\, n \ln(n)}$	$\searrow$	0

Sur $\mathbb{R}^+$: $\left\|x\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{\ln n}\right\|_\infty = \dfrac{1}{\mathrm{e}\, n \ln n}$ et la divergence de la série numérique $\sum \dfrac{1}{\mathrm{e}\, n \ln n}$ (comparer à une intégrale) implique que la série de fonctions $\sum \dfrac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\ln n}$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

Soit $a > 0$. Pour tout $x \geqslant a$ et tout $n \geqslant \dfrac{1}{a}$:

$$\left|\frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\ln n}\right| \leqslant a\frac{\mathrm{e}^{-na}}{\ln n}.$$

La série de fonctions converge donc normalement sur $[a, +\infty[$.

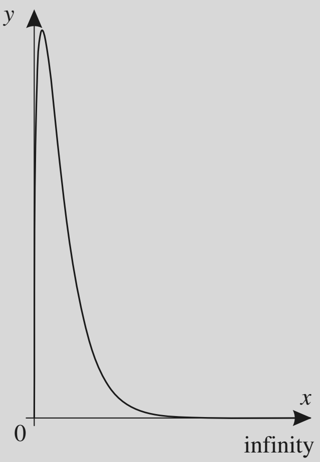
(*PSI*) Soit $x > 0$. Alors :

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{\sum_{n+1}^{\infty} x\mathrm{e}^{-kx}}{\ln(n+1)} \leqslant \frac{x\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{(1-\mathrm{e}^{-x})\ln(n+1)} \leqslant \frac{K}{\ln(n+1)}$$

en posant : $$K = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{(1-\mathrm{e}^{-x})}.$$

La série de fonctions $\sum \dfrac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\ln n}$ converge donc uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

Avec Maple :




```
> plot(sum('x*exp(-n*x)/ln(n)',
'n'=2..100),x=0..infinity) ;
```

8 Si une telle suite existait, le théorème d'interversion des limites s'appliquerait sur l'intervalle $]0,1]$. Or, 0 est un point adhérent à $]0,1]$ donc la fonction f aurait une limite en 0.

9 Il est immédiat que la suite (f_n) converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction f définie par :

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad x\in[0,1[\\ \dfrac{1}{\mathrm{e}} & \text{si} \quad x=1 \\ 0 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

Si a est dans $]0,1[$, la fonction f n'est pas continue sur $[a,+\infty[$. La convergence n'est donc pas uniforme sur $[a,+\infty[$.
La convergence est uniforme sur $[a,+\infty[$, pour tout $a>1$.

10 **1)** La série de fonctions $\sum \dfrac{x^2}{(n+x)^2}$ converge normalement, sur $[0,2]$, car :

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad \forall x\in[0,2] \quad 0\leqslant\frac{x^2}{(n+x)^2}\leqslant 2^2\frac{1}{n^2}.$$

La fonction somme est donc continue sur [0,2] et :

$$\lim_{x\to1}\sum_1^{\infty}\frac{x^2}{(n+x)^2}=S(1)=\sum_2^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}-1.$$

2) Pour tout $x\geqslant0$, on a $\left|\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{n^2}\right|\leqslant\dfrac{1}{n^2}$.

La série $\sum\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{n^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$ et les fonctions $x\mapsto\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{n^2}$ sont continues sur $\mathbb{R}^+$.

Le *théorème d'interversion des limites* s'applique, et :

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_1^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n^2}=\sum_1^{\infty}\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n^2}\right)=0$$

$$\lim_{x\to0}\sum_1^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n^2}=\sum_1^{\infty}\left(\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n^2}\right)=\sum_1^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

11 La série de fonctions $\sum\dfrac{\cos(nx)}{n^{3/2}}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

12 f est définie sur $]-1,1]$. La série de fonctions :

$$\sum\frac{(-1)^n x^n}{2n+1}$$

converge uniformément sur tout segment de $]-1,1]$ et, en particulier, sur $[0,1]$.
La fonction f est donc continue sur $]-1,1]$ et :

$$f(1)=\sum_0^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}.$$

13 On considère la fonction continue g de $\left[0,\dfrac{1}{a}\right]$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\begin{cases} g(0)=l \\ g(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right) \quad \text{si } x\neq0 \end{cases}$$

Fixons $\varepsilon>0$. Il existe une fonction polynôme P approchant uniformément g sur $\left[0,\dfrac{1}{a}\right]$ à ε près :

$\forall x\in[a,+\infty[$

$$\left|f(x)-P\left(\frac{1}{x}\right)\right|=\left|g\left(\frac{1}{x}\right)-P\left(\frac{1}{x}\right)\right|\leqslant\|(g-P)_{|[0,\frac{1}{a}]}\|_\infty.$$

14 Soit $\varepsilon>0$ fixé et P une fonction polynôme approchant uniformément f sur $[0,1]$ à ε près.
D'après l'hypothèse, on sait que :

$$\int_0^1 P(t)f(t)\,\mathrm{d}t=0.$$

Or :

$$0\leqslant\left|\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^1 P(t)\,f(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\sup_{t\in[0,1]}|f(t)|\|f-P\|_\infty.$$

Donc :

$$\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\varepsilon\sup_{t\in[0,1]}|f(t)|.$$

Cette intégrale est nulle. f^2 est continue et positive, donc $f=0$.

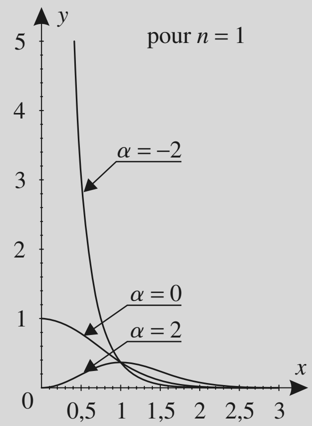
15 • Fixons $x > 0$.

$$n\,x^{\alpha}\mathrm{e}^{-n\,x^2} = o(\mathrm{e}^{-n\,x}).$$

La série de fonctions $\sum n\,x^{\alpha}\mathrm{e}^{-n\,x^2}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$.

• Fixons $n > 0$ et étudions la fonction f_n.

Avec Maple :




```
> plot({x^(-2)*exp(-x^2),
x^(2)*exp(-x^2),exp(-x^2)},
x=0..3,y=0..5) ;
```

Si $\alpha \leqslant 0$, la série de fonctions ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}^{+*}$. Mais elle converge normalement sur tout intervalle $[a,+\infty[$ $(a > 0)$ car $\| f_{n|[a,+\infty[}\|_\infty = f_n(a)$ et la série $\sum f_n(a)$ converge.

Si $\alpha > 0$, la fonction f_n admet un maximum en $\sqrt{\dfrac{\alpha}{2\,n}}$ et la valeur du maximum est :

$$\| f_n\|_\infty = n\left(\frac{\alpha}{2n}\right)^{\alpha/2}\mathrm{e}^{-\alpha/2} = c\,n^{1-\alpha/2}.$$

La série de fonctions converge donc normalement sur $\mathbb{R}^{+*}$ si, et seulement si, $\alpha > 4$. Si $\alpha \in\,]0,4]$, elle converge normalement sur tout intervalle $[a,+\infty[$ $(a > 0)$.

(*PSI*) Si $\alpha \leqslant 0$, la suite de fonctions ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^{+*}$ vers la fonction nulle. Donc la série de fonctions ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Regardons ensuite, lorsque α est dans $]0,4]$, si la convergence est uniforme en étudiant le reste :

$$R_n(x) = x^{\alpha}\sum_{k=n+1}^{\infty} k\mathrm{e}^{-k\,x^2}.$$

La fonction $f : t \mapsto t\mathrm{e}^{-t\,x^2}$ est décroissante pour $t \geqslant \dfrac{1}{x^2}$. Elle est aussi continue et la série $\sum \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}\,t$ converge.

D'où, pour $n+1 \geqslant \dfrac{1}{x^2}$:

$$0 \leqslant x^{\alpha}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}\,t = x^{\alpha}S \leqslant R_n(x).$$

Prenons $x = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ qui convient. Alors :

$$R_n(x) \geqslant x^{\alpha}S = \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)^{\alpha-4} 2\mathrm{e}^{-1}.$$

La suite $\left(R_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right)$ ne converge pas vers 0 si $\alpha \in\,]0,4]$.

Lorsque $\alpha \in\,]0,4]$, la série de fonctions n'est pas uniformément convergente sur $\mathbb{R}^{+*}$.

16 **1)** Une fonction polynôme de degré $\leqslant p$ est parfaitement déterminée par ses valeurs en $p+1$ points distincts. On considère donc $p+1$ réels distincts $(a_j)_{j\in[\![1,p+1]\!]}$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction polynôme P_n s'écrit, en utilisant les polynômes de Lagrange :

$$P_n(x) = \sum_{j=1}^{p+1} P_n(a_j)\prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant p+1\\ k\neq j}}\left(\frac{x-a_k}{a_j-a_k}\right).$$

La suite de fonctions (P_n) converge simplement vers f. On fixe un réel x et on fait tendre n vers $+\infty$:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{p+1} f(a_j)\prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant p+1\\ k\neq j}}\left(\frac{x-a_k}{a_j-a_k}\right).$$

La fonction f est une fonction polynôme de degré $\leqslant p$.

On montre ensuite que la convergence est uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}$. En fixant $a < b$:

$$|\,f(x) - P_n(x)| \leqslant \sum_{j=1}^{p+1}|\,f(a_j) - P_n(a_j)|\left|\prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant p+1\\ k\neq j}}\left(\frac{x-a_k}{a_j-a_k}\right)\right|.$$

Terminer en utilisant la continuité des $p+1$ polynômes :

$$\prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant p+1\\ k\neq j}}\left(\frac{x-a_k}{a_j-a_k}\right).$$

2) La convergence de la suite (P_n) vers f est uniforme sur $\mathbb{R}$. On fixe $\varepsilon > 0$:

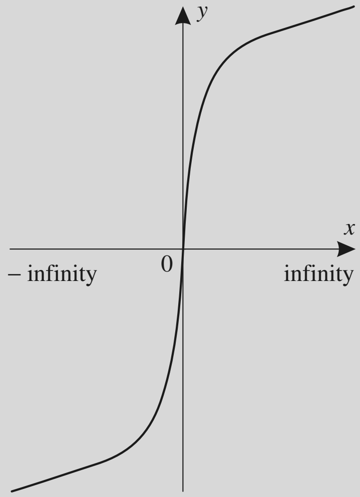
$$\exists N \in \mathbb{N}\ \ \forall n \geqslant N\ \ \forall x \in \mathbb{R}\quad |P_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Pour $n \geqslant N$, la fonction polynôme $P_n - f$ est donc bornée sur $\mathbb{R}$. C'est une fonction constante. On en conclut, qu'à partir d'un certain rang N, on a $P_n = f + a_n$, et la suite $(a_n)_{n\geqslant N}$ est une suite de réels qui converge vers 0.

17 **1)** La série de fonctions impaires, continues $\sum \dfrac{1}{n^2}\mathrm{Arctan}\,n\,x$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Donc f est définie, impaire et continue sur $\mathbb{R}$.

Avec Maple :




```
> plot(sum('arctan(n*x)/n^2',
'n'=1..100),x=-infinity..infinity) ;
```

2) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{Arctan} n\,x = \frac{\pi}{2\,n^2}$.

Donc, grâce à la convergence normale sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}\sum_1^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^3}{12} = -\lim_{x\to-\infty} f(x).$$

3) $f(x) - \frac{\pi^3}{12} = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(\operatorname{Arctan} n\,x - \frac{\pi}{2}\right)$

$$= -\sum_1^{\infty}\frac{1}{n^2}\operatorname{Arctan}\frac{1}{n\,x}.$$

Pour n fixé $\frac{1}{n^2}\operatorname{Arctan}\frac{1}{n\,x} \sim_{+\infty} \frac{1}{n^3\,x}$.

$$\forall x > 0 \;\; x\left(f(x) - \frac{\pi^3}{12}\right) = \sum_1^{\infty}\frac{-x}{n^2}\operatorname{Arctan}\frac{1}{(nx)}.$$

On pose : $w_n(x) = \frac{-x}{n^2}\operatorname{Arctan}\frac{1}{(nx)}$. Pour tout $u > 0$: $0 \leqslant \operatorname{Arctan} u \leqslant u$. Donc, pour tout $x > 0$:

$$|w_n(x)| \leqslant \frac{1}{n^3}.$$

La série de fonctions $\sum w_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^{+*}$ et :

$$\lim_{x\to+\infty} x\Big(f(x) - \frac{\pi^3}{12}\Big) = \lim_{x\to+\infty} w_n(x) = -\sum_1^{\infty}\frac{1}{n^3}.$$

En conclusion :

$$\left(f(x) - \frac{\pi^3}{12}\right) \sim_{+\infty} -\frac{1}{x}\sum_1^{\infty}\frac{1}{n^3}.$$

Chapitre 5

1 **1)** L'équation de la tangente est :

$$Y = f'(x_0)(X - x_0) + f(x_0).$$

Si $f'(x_0) = 0$, la normale est la droite d'équation $X = x_0$. Sinon, l'équation de la normale est :

$$Y = -\frac{1}{f'(x_0)}(X - x_0) + f(x_0).$$

2) L'équation de la tangente est :

$$y'(t_0)(X - x(t_0)) - x'(t_0)(Y - y(t_0)) = 0.$$

L'équation de la normale est :

$$x'(t_0)(X - x(t_0)) + y'(t_0)(Y - y(t_0)) = 0.$$

3) Le rayon vecteur (x_0, y_0) est orthogonal à la tangente au cercle en $M_0(x_0, y_0)$.
L'équation demandée est :

$$x_0\,X + y_0\,Y = x_0^2 + y_0^2 = R^2.$$

2 **1)** $f(x) \sim_0 \frac{x}{6}$. Donc, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

2) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi, 0[\, \cup \,]0, \pi[$ et :

$f(x) =_0 \frac{x}{6} + o(x)$. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{6}$.

Pour $x \neq 0$:

$$f'(x) = \frac{-x^2\cos x + \sin^2 x}{x^2\sin^2 x} =_0 \frac{1}{6} + o(1).$$

Donc, $\lim_{x\to 0} f'(x) = \frac{1}{6}$ et f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi, \pi[$.

3 $g(x) = \frac{2}{x-2} - \frac{1}{x-3}$

et : $\quad g^{(n)}(x) = (-1)^n\, n!\left[\frac{2}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-3)^{n+1}}\right].$

$h(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{4}{(x-1)^3}$ et :

$$h^{(n)}(x) = (-1)^n\, n!\left[\frac{1}{(x+1)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}} + \frac{2(n+1)}{(x-1)^{n+2}} + \frac{2(n+1)(n+2)}{(x-1)^{n+3}}\right].$$

4 On pose $f(x) = \dfrac{x^{314\,16}}{x^2-1}$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et pour tout entier $k \geqslant 0$:

$$\frac{x^{314\,16}}{x^2-1} =_0 -x^{314\,16} - x^{314\,16+2} - \cdots - x^{314\,16+2k} + o(x^{314\,16+2k})$$

On en déduit, par la *formule de Taylor-Young*, que $\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(0) = 0$ si n est impair ou $< 31\,416$, et si $n = 31\,416 + 2k$, $\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(0) = -n!$.

5 Puisque $(1+x^2)\,f'(x) = 1$, on a $f'(0) = 1$.

Pour $n \geqslant 1$, $\Big[(1+x^2)\,f'(x)\Big]^{(n)} = 0$.

Soit, d'après la *formule de Leibniz* :

$$(1+x^2)\,f^{(n+1)}(x) + n(2x)f^{(n)}(x) + \frac{n(n-1)}{2}2f^{(n-1)}(x) = 0.$$

$$f^{(2n)}(0) = 0 \quad \text{et} \quad f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n\,(2n)!$$

Remarque : Le développement limité de f en 0 permet de trouver ces formules par une autre méthode.

6
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{1+t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(v_n) = \int_0^1 \ln(1+t)\,\mathrm{d}t = 2\ln(2) - 1 = \ln\left(\frac{4}{\mathrm{e}}\right).$$

7 Les applications :

$$\left(P \mapsto \int_0^1 P\right) \text{ et } \left(P \mapsto \frac{1}{18}\left(5\,P(\alpha) + 8\,P\left(\frac{1}{2}\right) + 5\,P(\beta)\right)\right)$$

sont linéaires. Il suffit de prouver qu'elles sont égales sur une base de $\mathbb{R}_5[X]$.

Effectuer les calculs avec la base $\left((X-\frac{1}{2})^k\right)_{k\in[\![0,5]\!]}$.

Autre méthode : effectuer les calculs dans la base suivante de $\mathbb{R}_5[X]$:

$$\left(1, X, X^2 - X + \frac{1}{10}, X\left(X^2 - X + \frac{1}{10}\right), X^2\left(X^2 - X + \frac{1}{10}\right),\right.$$
$$\left. X^3\left(X^2 - X + \frac{1}{10}\right)\right).$$

8 **1)**
$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nt}}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n}.$$

2) La fonction $a \mapsto \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(a\sin(t))\,\mathrm{d}t$ est paire, il suffit de calculer la limite à droite en 0.

Pour tout a de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, utiliser :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \cos(a) \leqslant \cos(a\sin(t)) \leqslant 1.$$

La limite cherchée est $\dfrac{\pi}{2}$.

9 On pose $g(x) = f(x) - x$. La fonction g est continue sur $[0,1]$; si elle ne s'annule pas sur $]0,1[$, elle est de signe constant. On suppose $g > 0$ sur $]0,1[$. Alors :

$$0 < \int_0^1 g = \int_0^1 f - \frac{1}{2}.$$

C'est impossible, donc g s'annule sur $]0,1[$.

10 On note $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$, alors :

$$R_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k))\,\mathrm{d}t.$$

1) Si f est à valeurs réelles et croissante, on en déduit :

$$0 \leqslant R_n \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k))\,(x_{k+1} - x_k)$$
$$= \frac{b-a}{n}\,(f(b) - f(a)).$$

2) Si f est c-lipschitzienne par rapport à $\|\ \|$, alors :

$$\|R_n\| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \|f(t) - f(x_k)\|\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} c\,(t - x_k)\,\mathrm{d}t$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} c\,\frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{2} = \frac{c\,(b-a)^2}{2n}$$

11 **1)** $f(x) - S_n(x) = (-1)^{n+1}\dfrac{x^{t+n+1}}{x+1}$. D'où :

$$\int_0^1 |f(x) - S_n(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^{t+n+1}}{x+1}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{t+n+2}.$$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 |f(x) - S_n(x)|\,\mathrm{d}x = 0.$$

2) La série à termes réels $\sum u_n(1)$ diverge grossièrement, donc il n'y a pas convergence simple sur $[0,1]$. Prouver que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,1[$ et normalement sur tout segment inclus dans $[0,1[$.

12 **1)** Pour tout x de $[0,2]$ la suite de réels $\big(f_n(x)\big)_n$ est nulle à partir d'un certain rang.

2) D'après le *schéma*, pour tout n, $\displaystyle\int_0^2 f_n = 1$ (aire d'un triangle). Si la suite (f_n) convergeait en moyenne vers une fonction continue par morceaux f, on aurait alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^2 f_n = 1 = \int_0^2 f \qquad \textbf{(1)}$$

Par ailleurs :

$$\left|\int_{2/n}^2 f\right| = \left|\int_{2/n}^2 (f - f_n)\right| \leqslant \int_{2/n}^2 |f - f_n| \leqslant \int_0^2 |f_n - f|$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{2/n}^{2} f = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

On obtient une contradiction. La suite (f_n) ne converge pas en moyenne.

3) Si la suite (f_n) convergeait en moyenne quadratique vers une fonction continue par morceaux f, on aurait :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^2 |f_n|^2 = \int_0^2 |f|^2 \qquad \textbf{(3)}$$

Or : $\displaystyle\int_0^2 |f_n|^2 = \frac{2}{3}n,\quad \lim_{n\to+\infty}\int_0^2 |f_n|^2 = +\infty$

et **(3)** est impossible. La suite (f_n) ne converge pas en moyenne quadratique.

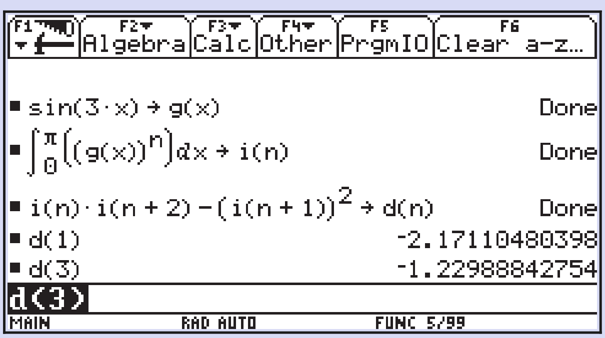
13 Puisque f est à valeurs positives, on peut écrire :

$$I_n I_{n+2} = \int_a^b \left(f^{n/2}(t)\right)^2 \mathrm{d}t \int_a^b \left(f^{(n+2)/2}(t)\right)^2 \mathrm{d}t$$
$$\geqslant \left(\int_a^b f^{n/2}(t) f^{(n+2)/2}(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 = (I_{n+1})^2.$$

Si f n'est pas à valeurs positives, pour tout entier pair n, on a :

$$f^n(t) = \left(|f(t)|^{n/2}\right)^2.$$

La formule $I_n I_{n+2} \geqslant (I_{n+1})^2$ reste valable si n est pair.
L'exemple suivant prouve qu'il n'en est pas de même pour n impair.



14 **1)** On procède par récurrence. Pour $n = 1$, on a :

$$f_1(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{et} \quad f_1'(x) = -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right).$$

On suppose la formule (**1**) valable pour un entier $n \geqslant 1$. Par définition $f_{n+1}(x) = x\,f_n(x)$.

D'après la *formule de Leibniz*, on a :

$$f_{n+1}^{(n)}(x) = x\,f_n^{(n)}(x) + n\,f_n^{(n-1)}(x).$$

D'où la formule à l'ordre $n+1$:

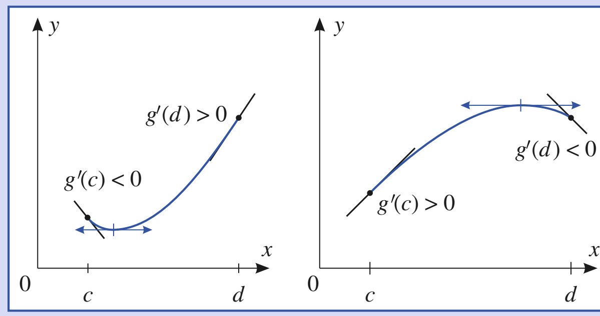
$$f_{n+1}^{(n+1)}(x) = \left[\frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}}\right] f^{(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right).$$

2) Il suffit d'appliquer **1)** à la fonction exponentielle.

3) Poser $f(x) = -\ln(x)$, prouver $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n(n-1)!}{x^n}$ et conclure.

15 On fixe deux éléments $m = f'(c)$ et $n = f'(d)$ de $f'(I)$ tels que $m < n$ et on prouve que tout réel ℓ compris entre m et n est dans $f'(I)$.
Soit $\ell \in]m, n[$ et $g(x) = f(x) - \ell x$. On a :

$$g'(c) = m - \ell < 0 \quad \text{et} \quad g'(d) = n - \ell > 0.$$



On suppose $c < d$. Il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall x \in]c, c+\delta[\ g(x) < g(c) \text{ et } \forall y \in]d-\delta, d[\ g(x) < g(d) \qquad \textbf{(1)}$$

La fonction g qui est continue sur le segment $[c, d]$ atteint son minimum sur ce segment. D'après (**1**), ce minimum est atteint en un point t de $]c, d[$. Or g est dérivable sur cet intervalle ouvert, donc $g'(t) = 0 = f'(t) - l$. Et $\ell \in f'(I)$.

16 **1)** Pour simplifier la rédaction, on peut supposer que :

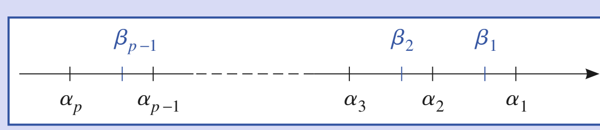
- P et Q sont des polynômes unitaires ;
- $\deg(P) \geqslant \deg(Q)$.

De plus, le cas $\alpha = 0$ est trivial. On suppose donc $\alpha \neq 0$ et, quitte à factoriser ce scalaire, il suffit de traiter le cas $\alpha = 1$.

On note $p = \deg(P)$ et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ les racines de P, numérotées de telle façon que :

$$\alpha_p < \alpha_{p-1} < \ldots < \alpha_1.$$

Dans chacun des $p-1$ intervalles $]\alpha_{i+1}, \alpha_i[$, se trouve une racine de Q, notée β_i.



Donc :

$$p - 1 \leqslant \deg(Q) \leqslant p = \deg(P).$$

Cas a : $\deg(Q) = p - 1$.

$$P = \prod_{i=1}^{p}(X - \alpha_i) \quad \text{et} \quad Q = \prod_{i=1}^{p-1}(X - \beta_i).$$

Montrer que la fonction polynôme $P + \beta Q$ s'annule une fois dans chacun des $p-2$ intervalles $]\beta_{i+1}, \beta_i[$ une fois sur $]\beta_1, +\infty[$ et une fois sur $]-\infty, \beta_{p-1}[$.

Cas b : $\deg(Q) = p$.

Dans ce cas, le polynôme Q admet une dernière racine qui est soit dans $]-\infty, \alpha_p[$, soit dans $]\alpha_1, +\infty[$. On se contente de traiter le cas où cette racine, notée β_p, est dans $]-\infty, \alpha_p[$.
On a :

$$P = \prod_{i=1}^{p}(X - \alpha_i) \quad \text{et} \quad Q = \prod_{i=1}^{p}(X - \beta_i).$$

La fonction polynôme $P + \beta Q$ s'annule une fois dans chacun des $p-1$ intervalles $]\beta_{i+1}, \beta_i[$.
Le polynôme $P + \beta Q$ est de degré $\leqslant p$ et a au moins $p-1$ racines distinctes. Il est scindé. Enfin, le coefficient de X^p dans $P + \beta Q$ est $(1+\beta)$.
Lorsque ce coefficient est non nul, montrer que $P + \beta Q$ a une racine dans $]\beta_1, +\infty[$ ou $]-\infty, \beta_p[$.
Dans tous les cas, $P + \beta Q$ est scindé et n'a que des racines simples.
2) D'après le *théorème de Rolle*, le polynôme dérivé P' s'annule au moins une fois entre deux racines de P. Donc P' admet $p-1$ racines $\beta_1, \dots, \beta_{p-1}$ telles que :

$$\alpha_p < \beta_{p-1} < \alpha_{p-1} < \cdots < \alpha_2 < \beta_1 < \alpha_1.$$

On peut appliquer le **1)** aux polynômes P et $Q = P'$ et conclure que $P + \alpha P'$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et n'admet que des racines simples.
3) On effectue une récurrence sur $n = \deg(R)$.
On note (H_n) l'hypothèse suivante :
Pour tout polynôme scindé de degré n de $\mathbb{R}[X]$:

$$R = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_{n-1} X + a_n,$$

et tout polynôme P, scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et à racines simples, le polynôme $a_0 P + a_1 P' + \cdots + a_{n-1} P^{(n-1)} + a_n P^{(n)}$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et n'admet que des racines simples.
Le cas $n = 1$ est traité par la question **2)**. Soit n un entier $\geqslant 1$ tel que (H_n) soit vraie.
On considère T un polynôme scindé de $\mathbb{R}[X]$ de degré $n+1$.
On sait qu'il existe un réel α et un polynôme scindé de degré n :

$$R = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_{n-1} X + a_n$$

tels que :

$$\begin{aligned} T &= (X-\alpha)R \\ &= a_0 X^{n+1} + (a_1 - \alpha a_0) X^n + \cdots + (a_n - \alpha a_{n-1}) X - \alpha a_n \end{aligned}$$

On remarque que :

$$\begin{aligned} &a_0 P + (a_1 - \alpha a_0) P' + \cdots + (a_n - \alpha a_{n-1}) P^{(n)} - \alpha a_n P^{(n+1)} \\ &\quad = a_0 (P - \alpha P') + a_1 (P - \alpha P')' + \cdots \\ &\qquad\qquad + a_{n-1} (P - \alpha P')^{(n-1)} + a_n (P - \alpha P')^{(n)} \end{aligned}$$

Or $(P - \alpha P')$ est scindé et n'a que des racines simples. On peut appliquer l'hypothèse de récurrence (H_n) et conclure que (H_{n+1}) est vraie.

17 Le développement limité du cosinus hyperbolique à l'ordre 4 en 0 est :

$$\operatorname{ch} u =_0 1 + \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24} + o(u^4).$$

Donc il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall u \in [-\delta, \delta] \quad 1 + \frac{u^2}{2} \leqslant \operatorname{ch} u \leqslant 1 + \frac{u^2}{2} + u^4.$$

On en déduit que, pour n assez grand :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2k} \leqslant T_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \left(\operatorname{ch} \frac{1}{\sqrt{k}} - 1\right) \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2k} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2} \quad \textbf{(1)}$$

Or :

$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}; \quad \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{2t} \leqslant \frac{1}{2k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{2t}.$$

Donc :

$$\int_{n+1}^{2n+1} \frac{\mathrm{d}t}{2t} \leqslant T_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \left(\operatorname{ch} \frac{1}{\sqrt{k}} - 1\right) \leqslant \int_n^{2n} \frac{\mathrm{d}t}{2t} + \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \to +\infty} T_n = \frac{\ln(2)}{2}.$$

18 $$\int_0^{\pi} \cos^{2k} t \,\mathrm{d}t = \lim_{n \to +\infty} \frac{\pi}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \cos^{2k}\left(\frac{l\pi}{n}\right).$$

$$\frac{\pi}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \cos^{2k}\left(\frac{l\pi}{n}\right) = \frac{\pi}{n\,4^k} \sum_{p=0}^{2k} \binom{2k}{p} \left(\sum_{l=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\, l\, \pi\, 2(p-k)}{n}}\right).$$

Or $\displaystyle\sum_{l=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\, l\, \pi\, 2(p-k)}{n}}$ est la somme des termes d'une suite géométrique. Cette somme vaut 0 si $p \neq k$ ou n si $p = k$, donc :

$$\frac{\pi}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \cos^{2k}\left(\frac{l\pi}{n}\right) = \frac{\pi}{4^k} \binom{2k}{p} \quad \text{et} \quad \int_0^{\pi} \cos^{2k} t \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4^k} \binom{2k}{k}$$

19 **1)** Si $\displaystyle\int_a^b f = 0$, alors $f = 0$. On suppose f non nulle et on note v le vecteur unitaire $\dfrac{\int_a^b f}{\left\|\int_a^b f\right\|}$ et Δ la demi-droite vectorielle $\mathbb{R}^+ v$. Pour montrer que, pour tout t de $[a, b]$, $f(t)$ est dans Δ, on introduit l'hyperplan orthogonal à v. On peut écrire :

$$\forall t \in [a, b] \ \exists \alpha(t) \in \mathbb{R} \ \exists u(t) \in v^{\perp} \quad f(t) = \alpha(t) v + u(t)$$

On sait que $\alpha(t) = \langle f(t) \mid v \rangle$, donc α est une fonction continue, et u aussi, par différence. En revenant aux intégrales :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \left(\int_a^b \alpha(t)\,\mathrm{d}t\right) v + \int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t = \left(\int_a^b \|f\|\right) v\,;$$

on en déduit que :

$$\int_a^b \alpha(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \|f\|.$$

De plus, d'après le *théorème de Pythagore* :

$$\|f(t)\|^2 = \alpha^2(t) + \|u(t)\|^2 \geqslant \alpha^2(t).$$

Donc $\|f\| - \alpha$ est une fonction continue et positive sur $[a, b]$

et :
$$\int_a^b \|f\| - \alpha = 0.$$

On peut alors conclure :

$$\forall t \in [a, b] \quad \|f(t)\| - \alpha(t) = 0, \quad u(t) = 0_E \quad \text{et} \quad f(t) \in \mathbb{R}^+.$$

2) Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, on note :

$$\left\|\sum_{i=1}^n x_i e_i\right\|_\infty = \max\{|x_i|\}$$

et on pose $f(t) = t\,e_1 + \sum_{i=2}^n e_i$.

Vérifier que :

$$\left\|\int_0^1 f\right\|_\infty = \int_0^1 \|f\|_\infty = 1.$$

Cependant, pour $t \neq t'$, $f(t)$ et $f(t')$ sont linéairement indépendants. Ainsi, les valeurs prises par f ne sont pas toutes sur une même demi-droite vectorielle.

20 On pose $u_n = n \int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$. On remarque que :

$$n \int_0^1 t^n f(1)\,\mathrm{d}t = \frac{n}{n+1} f(1).$$

Donc :

$$\left\|u_n - \frac{n}{n+1} f(1)\right\| = \left\|n \int_0^1 t^n (f(t) - f(1))\,\mathrm{d}t\right\|$$
$$\leqslant n \int_0^1 t^n \|f(t) - f(1)\|\,\mathrm{d}t.$$

De plus, si a est entre 0 et 1, on a :

$$n \int_0^1 t^n \|f(t) - f(1)\|\,\mathrm{d}t$$
$$= n \int_0^a t^n \|f(t) - f(1)\|\,\mathrm{d}t + n \int_a^1 t^n \|f(t) - f(1)\|\,\mathrm{d}t$$

On en déduit :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall a \in]0, 1[$

$$\left\|u_n - \frac{n}{n+1} f(1)\right\| \leqslant 2\|f\|_\infty a^{n+1} + n \int_a^1 t^n \|f(t) - f(1)\|\,\mathrm{d}t$$

Fixons $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe a dans $]0, 1[$ tel que :

$$\forall t \in [a, 1] \quad \|f(t) - f(1)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Cette valeur de a étant fixée, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \geqslant N \Rightarrow 2\|f\|_\infty a^{n+1} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc :
$$n \geqslant N \Rightarrow \|u_n - \frac{n}{n+1} f(1)\| \leqslant \varepsilon.$$

On en déduit que $\lim_{n \to +\infty} u_n = f(1)$.

21 **1)** On effectue la division euclidienne, dans $\mathbb{R}[X]$, de $(1 - X)^{4n}$ par $(1 + X^2)$:

$$(1 - X)^{4n} = P_n(X)(1 + X^2) + a_n X + b_n$$

avec a_n et b_n réels.

En utilisant $X = \mathrm{i}$, on trouve :

$$a_n = 0; b_n = (-1)^n 4^n.$$

De plus P_n est la partie entière de la fraction rationnelle $\dfrac{(1 - X)^{4n}}{(1 + X^2)}$. D'où l'unicité de P_n.

2) $\displaystyle\int_0^1 P_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{(1-t)^{4n}}{(1+t^2)}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{(-1)^n 4^n}{(1+t^2)}\,\mathrm{d}t.$

$$\frac{1}{2(4n+1)} \leqslant \int_0^1 \frac{(1-t)^{4n}}{(1+t^2)}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{4n+1}.$$

Donc :

$$\int_0^1 P_n(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^{n-1} 4^{n-1} \pi + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

22 On note $S = \sup_{t \in [a,b]} f(t)$ et t_0 un élément de $[a, b]$ tel que $f(t_0) = S$.

• On remarque que :

$$u_p \leqslant (b - a)^{1/p} S.$$

Le cas $S = 0$ est trivial.

On suppose $S > 0$.

• On fixe $\varepsilon > 0$ tel que $S - \frac{\varepsilon}{2} > 0$. On sait que :

$$\exists \alpha > 0 \ \forall t \in [a, b] \ \left(|t - t_0| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(t) - f(t_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) \quad \textbf{(1)}$$

On en déduit, pour une valeur de α vérifiant (**1**), que :

$$\forall t \in [a, b] \quad \left(|t - t_0| \leqslant \alpha \Rightarrow S - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant f(t)\right)$$

On pose $[c,d]=[a,b]\cap[t_0-\alpha,t_0+\alpha]$. Sachant que f est à valeurs positives, on a :

$$\int_a^b (f(t))^p\,\mathrm{d}t \geqslant \int_c^d (f(t))^p\,\mathrm{d}t \geqslant (d-c)\left(S-\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$$

Donc, pour tout entier $p>0$, on peut écrire :

$$(d-c)^{1/p}\left(S-\frac{\varepsilon}{2}\right)\leqslant u_p\leqslant (b-a)^{1/p}S.$$

Or, $\lim\limits_{p\to+\infty}(d-c)^{1/p}\left(S-\frac{\varepsilon}{2}\right)=\left(S-\frac{\varepsilon}{2}\right)$ et :

$$\lim_{p\to+\infty}(b-a)^{1/p}S=S.$$

Donc, il existe un entier p_0 tel que :

$$p\geqslant p_0\Rightarrow S-\varepsilon\leqslant u_p\leqslant S+\varepsilon.$$

Ceci prouve que $\lim\limits_{p\to+\infty}u_p=\sup\limits_{t\in[a,b]}f(t)$.

Chapitre 6

1 Pour $x=0$, $F(0)=0$.
Soit $x\neq 0$ et t entre 0 et x, on a $xt\geqslant 0$. Donc F est définie sur $\mathbb{R}$. En posant $xt=u$ dans l'intégrale, on trouve :

$$F(x)=\frac{1}{x}\int_0^{x^2}\ln(1+u)\,\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\ln(1+x^2)+x\ln(1+x^2)-x$$

Il découle de cette expression que F est continue sur $\mathbb{R}$.
De plus, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et :

$$F'(x)=\frac{-1}{x^2}\ln(1+x^2)+\ln(1+x^2)+1.$$

Donc, $\lim\limits_{x\to 0}F'(x)=0$, et $F\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

2 Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t>0.$$

On pose $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et $L=F(b)$. La fonction F est continue et $0=F(a)<\frac{1}{n}L<L=F(b)$.
Le *théorème des valeurs intermédiaires* permet de dire qu'il existe $x_{n,1}$ dans $]a,b[$ tel que $F(x_{n,1})=\frac{1}{n}L$.
En répétant ce procédé, on construira, pour $i\in[\![1,n-1]\!]$, les points $x_{n,i}$ tels que :

- $a<x_{n,1}<\ldots<x_{n,n-1}<b$;
- $F(x_{n,i})=\frac{i}{n}L$.

On en déduit le résultat demandé en remarquant que :

$$\int_{x_{n,i-1}}^{x_{n,i}}f(t)\,\mathrm{d}t=F(x_{n,i})-F(x_{n,i-1}).$$

3 **1)** f est continue sur $\mathbb{R}$.
Les primitives de f sont les fonctions F définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x)=\frac{1}{5}\left[\sin(2x)-2\cos(2x)-\cos(3x)-3\sin(3x)\right]\mathrm{e}^x+k$$

(k est une constante réelle).

2) La fonction g est continue sur $[-1,1]$, la fonction Arccosinus est de classe $\mathcal{C}^1$ sur$]-1,1[$.
On peut donc intégrer deux fois par parties sur tout segment inclus dans $]-1,1[$.

Une primitive de $\sqrt{1-x^2}$ est $\dfrac{\mathrm{Arcsin}\,(x)+x\sqrt{1-x^2}}{2}$. Les primitives de g sur $]-1,1[$ sont les fonctions G de la forme :

$$G(x)=\frac{x^2-1}{2}\mathrm{Arccos}^{\,2}(x)-\frac{\mathrm{Arcsin}\,(x)+x\sqrt{1-x^2}}{2}\mathrm{Arccos}\,(x)-\frac{x^2}{4}-\frac{1}{4}\mathrm{Arcsin}^{\,2}(x)+c$$

(c est une constante).
En utilisant la relation $\mathrm{Arccos}\,(x)+\mathrm{Arcsin}\,(x)=\dfrac{\pi}{2}$, on peut simplifier l'expression et obtenir :

$$G(x)=\frac{2x^2-1}{4}\mathrm{Arccos}^{\,2}(x)-\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}\mathrm{Arccos}\,(x)-\frac{x^2}{4}+d$$

(d est une constante).

4
$$I=\ln(1+\sqrt{2})-\frac{\ln(3)}{2\sqrt{2}}.$$

N.B. Maple ou la TI donne directement le résultat. Il est cependant nécessaire de savoir calculer « à la main » ce genre d'intégrale.

5 Pour t dans $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$, on pose $u=(2t+1)^{1/6}$.

Finalement :

$$\int\frac{\mathrm{d}t}{(2t+1)^{2/3}-(2t+1)^{1/2}}=\frac{3}{2}((2t+1)^{1/6}+1)^2+3\ln|(2t+1)^{1/6}-1|+k$$

(k est une constante).

6 On pose $G(x)=\displaystyle\int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t$. La fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et F l'est sur $]0,1]$.

La fonction f est dérivable en 0.

Donc :

$$f(x)=_0 f(0)+f'(0)x+o(x)\qquad\textbf{(1)}$$

De plus :

$$G'(x)=x\,f(x)=_0 f(0)x+f'(0)x^2+o(x^2)\quad\text{et}\quad G(0)=0$$

D'où :

$$G(x) =_0 \frac{f(0)}{2}x^2 + \frac{f'(0)}{3}x^3 + o(x^3) \qquad \textbf{(2)}$$

Or $F(x) = \dfrac{1}{x^2}G(x)$, donc :

$$F(x) =_0 \frac{f(0)}{2} + \frac{f'(0)}{3}x + o(x) \qquad \textbf{(3)}$$

On prolonge F par continuité en posant $F(0) = \dfrac{f(0)}{2}$. La formule **(3)** prouve que F est dérivable en 0 et que $F'(0) = \dfrac{f'(0)}{3}$.
Or F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1]$ et, de plus, pour $x \neq 0$:

$$F'(x) = \frac{-2}{x^3}G(x) + \frac{1}{x^2}G'(x).$$

On en déduit que :

$$F'(x) =_0 \frac{f'(0)}{3} + o(1).$$

Donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.

7 D'après le *théorème des accroissements finis*, pour tout n, il existe c_n dans $]n, n+1[$ tel que :

$$\ln\frac{f(n+1)}{f(n)} = \ln(f(n+1)) - \ln(f(n)) = \frac{f'}{f}(c_n)$$

Donc, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln\frac{f(n+1)}{f(n)} = a$ et $a \in [0, 1[$. La *règle de d'Alembert* permet de conclure que la série $\sum f(n)$ converge.

8 **1)** La suite (f_n) converge simplement vers 0. Le tableau de variations de f_n montre que la convergence de la suite de fonctions (f_n) n'est pas uniforme sur $[0,1]$.

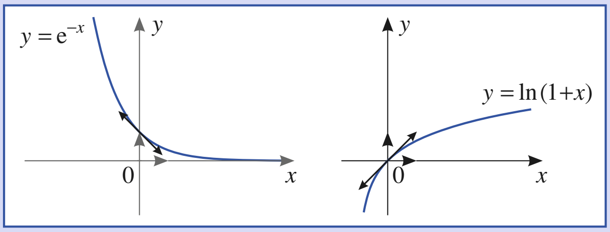
Toutefois, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{-e^{-nx^2}}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$

2) La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers 0 sur $[0, 1]$.
La convergence n'est pas uniforme sur $[0, 1]$.
Toutefois, en calculant, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n = \frac{\pi}{2}.$

3) $f(x) = e^x$.
Pour tout $u \geqslant -1$, $\ln(1+u) \leqslant u$. Donc, pour tout x de $[0, 1]$:

$$\begin{aligned}
0 \leqslant e^x - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n &= e^x\left[1 - \exp\left(-x + n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)\right]\\
&\leqslant e^x\left[x - n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right]\\
&\leqslant e^x n\left[\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right]\\
&\leqslant e^x n\frac{x^2}{2n^2}\sup_{t\in[0,1]}\left|\frac{1}{(1+t)^2}\right|
\end{aligned}$$

grâce à l'*inégalité de Taylor-Lagrange*.



La convergence de la suite de fonctions (f_n) vers f est uniforme sur $[0, 1]$, d'où :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\left(1+\frac{x}{n}\right)^n dx = \int_0^1 e^x\,dx = e - 1.$$

9 La série de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ et diverge grossièrement sur $\mathbb{R}^{-*}$.

Si x est un réel positif fixé, la série numérique est une série alternée qui vérifie le critère spécial.
La série de fonctions converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$. Sa fonction somme S est donc continue sur $\mathbb{R}^+$.
La série de fonctions $\sum -(-e^{-x})^n$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}^{+*}$. Donc, pour tout $x > 0$ et tout $a > 0$:

$$\begin{aligned}
\int_a^x -\sum_1^\infty (-e^{-t})^n\,dt &= \sum_1^\infty\left[\frac{(-e^{-t})^n}{n}\right]_a^x\\
&= \sum_1^\infty\frac{(-e^{-x})^n}{n} - \sum_1^\infty\frac{(-e^{-a})^n}{n}\\
&= \int_a^x\frac{e^{-t}}{1+e^{-t}}\,dt
\end{aligned}$$

La fonction S est continue sur $\mathbb{R}^+$. On fait tendre a vers 0.

$$\begin{aligned}
\sum_1^\infty\frac{(-e^{-x})^n}{n} &= \int_0^x\frac{e^{-t}}{1+e^{-t}}\,dt + \sum_1^\infty\frac{(-1)^n}{n}\\
&= -\ln(1+e^{-x}) + \ln 2 + \sum_1^\infty\frac{(-1)^n}{n}.
\end{aligned}$$

La convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$ de cette série de fonctions permet d'appliquer le *théorème d'interversion des limites* en $+\infty$.
On en déduit :

$$\ln 2 = \sum_1^\infty\frac{(-1)^{n-1}}{n}, \quad \text{puis : } \sum_1^\infty\frac{(-e^{-x})^n}{n} = -\ln(1+e^{-x}).$$

10 La somme $S(x) = \displaystyle\sum_0^\infty u_n(x)$ est définie pour tout x de $]-1, 1[$. De plus :

$$S(x) = \sum_0^\infty u_n(x) = x\sum_1^\infty nx^{n-1}.$$

Or la série de fonctions $\sum x^n$ converge simplement sur $]-1, 1[$ et la série de fonctions $\sum nx^{n-1}$ converge normalement sur tout segment de $]-1,1[$. Donc :

$$S(x) = x\left(\sum_{0}^{\infty} x^n\right)' = x\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

11 f est continue, donc elle admet des primitives. Soit F la primitive de f sur $\mathbb{R}^+$ s'annulant en 0.

Alors $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

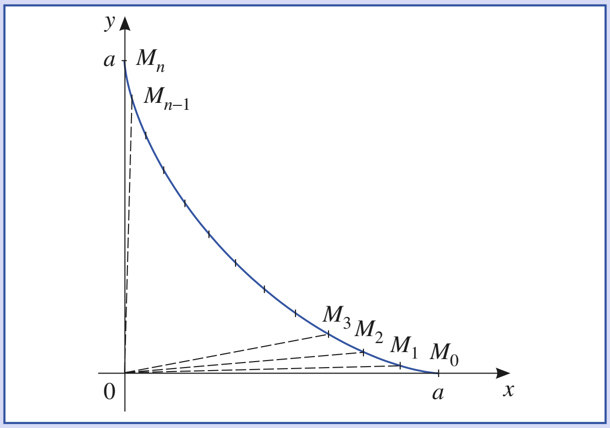
La relation donnée s'écrit $F'(x) \leqslant kF(x)$.

On pose $G(x) = \mathrm{e}^{-kx}F(x)$. La fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et :

$$G'(x) = \mathrm{e}^{-kx}(F'(x) - kF(x)) \leqslant 0.$$

G est décroissante sur $\mathbb{R}^+$. $G(0) = 0$. Donc $G \leqslant 0$.
On en déduit que F est négative. Or F est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et $F(0) = 0$. Donc $F = 0$ et $F' = f = 0$.

12 **1)** L'arc obtenu est un quart d'astroïde



2) La fonction $t \to (x(t), y(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$, donc l'arc est rectifiable.
Pour t dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on trouve :

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t) = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = 3a\sin(t)\cos(t).$$

On peut donc prendre pour abscisse curviligne :

$$s(t) = \frac{3a}{2}\sin^2(t).$$

Soit t_i le paramètre du point M_i. On suppose que :

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = \frac{\pi}{2}.$$

La longueur totale de l'arc est :

$$L = s\left(\frac{\pi}{2}\right) - s(0) = \frac{3a}{2}$$

donc, pour tout i de $[\![1, n]\!]$:

$$s(t_i) - s(t_{i-1}) = \frac{3a}{2n} \quad \text{et} \quad \sin^2(t_i) - \sin^2(t_{i-1}) = \frac{1}{n}.$$

On en déduit que le point M_i a pour paramètre $t_i = \operatorname{Arcsin}\sqrt{\dfrac{i}{n}}$ et pour coordonnées :

$$\left(a\left(1-\frac{i}{n}\right)^{3/2}, a\left(\frac{i}{n}\right)^{3/2}\right).$$

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{OM_i}{n+1} = \frac{a}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\sqrt{1 - 3\frac{i}{n} + 3\frac{i^2}{n^2}}$$
$$= \frac{a}{n+1} + \frac{an}{n+1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1 - 3\frac{i}{n} + 3\frac{i^2}{n^2}}\right).$$

Or $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1 - 3\frac{i}{n} + 3\frac{i^2}{n^2}}$ est une somme de Riemann de la fonction continue sur $[0,1]$: $x \mapsto \sqrt{1 - 3x + 3x^2}$.

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{OM_i}{n+1} = a\left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{12}\ln(2+\sqrt{3})\right].$$

13 **1)** D'après la *formule de Taylor avec reste intégral* :

$$g(a) = g\left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(a - \frac{a+b}{2}\right)g'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \int_{\frac{a+b}{2}}^{a}(a-t)g''(t)\,\mathrm{d}t$$

$$g(b) = g\left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(b - \frac{a+b}{2}\right)g'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(b-t)g''(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

On effectue la somme de ces deux lignes :

$$g(a) + g(b) = 2g\left(\frac{a+b}{2}\right) + \int_{\frac{a+b}{2}}^{a}(a-t)g''(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(b-t)g''(t)\,\mathrm{d}t$$

Donc :

$$\left|g(b) + g(a) - 2g\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leqslant M\left(\int_{a}^{\frac{a+b}{2}}(t-a)\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(b-t)\,\mathrm{d}t\right) = \frac{M(b-a)^2}{4}$$

2) On a $u_n + v_n = f(1) - f(0)$ et :

$$u_n - v_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left[f\left(\frac{k+1}{n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right) - 2f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)\right].$$

En posant $K = \displaystyle\sup_{x\in[0,1]}|f''(x)|$, la question **1)** permet d'écrire :

$$\left|f\left(\frac{k+1}{n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right) - 2f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)\right| \leqslant \frac{K}{4n^2}.$$

Donc :

$$|u_n - v_n| \leqslant \frac{K}{4n} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0.$$

Il est alors aisé d'en déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{f(1) - f(0)}{2}.$$

3) On note :

$$a_n = \frac{(2n+1)(2n+3)\dots(4n-1)}{(2n)(2n+2)\dots(4n-2)} = \prod_{i=n}^{2n-1} \frac{2i+1}{2i}.$$

En posant $i = n + k$, on trouve :

$$a_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1 + \dfrac{2k+1}{2n}}{1 + \dfrac{k}{n}}$$

et

$$\ln(a_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \left[\ln\left(1 + \frac{2k+1}{2n}\right) - \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) \right]$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+1)(2n+3)\dots(4n-1)}{(2n)(2n+2)\dots(4n-2)} = \sqrt{2}.$$

14 La relation **(1)** peut s'écrire :

$$f(x) + x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

En dérivant, on trouve :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

Et enfin $f'' + f = 0$. Donc f est de la forme

$$f(x) = A\cos(x) + B\sin(x).$$

De **(1)** et **(2)**, on déduit que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$, donc il y a une seule solution possible :

$$f(x) = \cos(x).$$

Une simple intégration par parties permet de vérifier que la fonction cosinus vérifie **(1)**.

15 On note L_a, L_b et L_c les polynômes d'interpolation de Lagrange en a, b et c :

$$L_a(t) = \frac{(t-b)(t-c)}{(a-b)(a-c)}, \qquad L_b(t) = \frac{(t-c)(t-a)}{(b-c)(b-a)},$$

$$L_c(t) = \frac{(t-a)(t-b)}{(c-a)(c-b)} \quad \text{et} \quad Q(t) = (t-a)(t-b)(t-c).$$

1) • On suppose que $\displaystyle\int_a^b (t-a)(t-b)(t-c)\,\mathrm{d}t \neq 0$ et on considère quatre réels α, β, γ et δ tels que :

$$\alpha\, f_a + \beta\, f_b + \gamma\, f_c + \delta\Phi = 0_{E^*}$$

Alors :

$$\alpha\, f_a(Q) + \beta\, f_b(Q) + \gamma\, f_c(Q) + \delta\Phi(Q) = 0$$

$$= \delta\int_a^b (t-a)(t-b)(t-c)\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit : $\delta = 0$. On a donc $\alpha\, f_a + \beta\, f_b + \gamma\, f_c = 0_{E^*}$.
En utilisant L_a, L_b, L_c, on obtient $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
Ceci prouve que la famille (f_a, f_b, f_c, Φ) est libre.
(*N.B.* : Les élèves de *PSI* pourront prouver que (L_a, L_b, L_c) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et que (f_a, f_b, f_c) en est la base duale.)
• On démontre la réciproque par contraposée.
On suppose que :

$$\int_a^b (t-a)(t-b)(t-c)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Soit $g = \Phi(L_a)\, f_a + \Phi(L_b)\, f_b + \Phi(L_c)\, f_c$. L'application g est une forme linéaire sur E.
Par construction, $f_a(L_a) = 1$, $f_b(L_a) = 0$, $f_c(L_a) = 0$, donc $g(L_a) = \Phi(L_a)$.
On montre de même que :

$$g(L_b) = \Phi(L_b) \quad \text{et} \quad g(L_c) = \Phi(L_c).$$

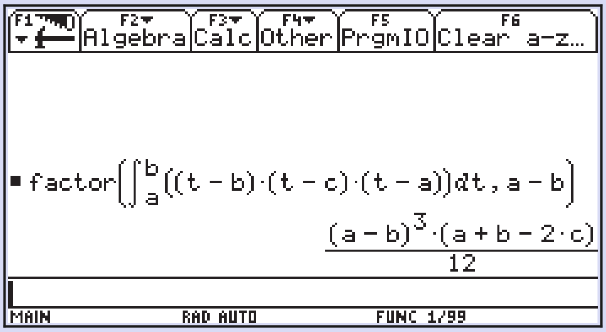
Enfin, $g(Q) = 0 = \Phi(Q)$.
Les deux formes linéaires g et Φ coïncident sur une base de E, elles sont donc égales.
Ceci prouve que :

$$\Phi \in \mathrm{Vect}(f_a, f_b, f_c).$$

La famille (f_a, f_b, f_c, Φ) est liée.

2) $\displaystyle\int_a^b (t-a)(t-b)(t-c)\,\mathrm{d}t$ est une expression polynômiale en a, b et c qui est nulle si $a = b$.

La TI permet de factoriser cette expression.



Donc $\displaystyle\int_a^b (t-a)(t-b)(t-c)\,\mathrm{d}t = 0$ si, et seulement si,

$$c = \frac{a+b}{2}.$$

3) Dans cette question, $c = \dfrac{a+b}{2}$. D'après **1)** :

$$\Phi = \Phi(L_a)\, f_a + \Phi(L_b)\, f_b + \Phi(L_c)\, f_c.$$

On effectue les calculs suivants en demandant à la machine la factorisation de $(a-b)$ comme précédemment.
On remplace c par $\dfrac{a+b}{2}$ et on trouve :

$$\Phi = \frac{b-a}{6}\,[\, f_a + 4\, f_c + \, f_b].$$

Cela signifie que, pour tout polynôme P de degré $\leqslant 3$, on a :

$$\int_a^b P(t)\,\mathrm{d}t = \frac{b-a}{6}\left[P(a) + 4P\left(\frac{a+b}{2}\right) + P(b)\right].$$

C'est la *formule de Simpson*.

16 **1)** Immédiat.

2) • Soit $f \in \operatorname{Ker}(\Phi)$. En dérivant $\Phi(f)$, on trouve :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x\, f(x) = 0.$$

Donc f est nulle sur $\mathbb{R}^*$. Sa continuité entraîne $f(0) = 0$.
$\operatorname{Ker}(\Phi) = \{0_E\}$ et Φ est injective.

• Tous les éléments de $\operatorname{Im}(\Phi)$ s'annulent en 0 et Φ n'est pas surjective.

3) Φ est injective, donc 0 n'est pas valeur propre de Φ.

Soit λ un réel non nul et f un élément de E tel que $\Phi(f) = \lambda f$.

On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{1}{\lambda} x\, f(x).$$

C'est une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre dont les solutions sont les fonctions f de la forme $f(x) = c\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2\lambda}}$ où c est une constante.

Par ailleurs, $\Phi(f)(0) = \lambda f(0) = 0$. On en déduit $c = 0$.
L'endomorphisme Φ n'a pas de valeur propre.

17 **1)** Étudier $h(x) = x^n \mathrm{e}^{-x}$.

2) $h(1) = \mathrm{e}^{-1} < 1$ et $h(n) > 1$, donc $u_n > 1$.
Fixons $\varepsilon > 0$

$$h(1+\varepsilon) = (1+\varepsilon)^n \mathrm{e}^{-1-\varepsilon} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} (1+\varepsilon)^n \mathrm{e}^{-1-\varepsilon} = +\infty$$

Donc, pour n suffisamment grand, u_n est entre 1 et $1+\varepsilon$.
Ceci prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

3) On peut écrire :

$$u_n = 1 + h_n \quad \text{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} h_n = 0.$$

Donc :

$$1 + h_n = n \ln(1+h_n) \sim n h_n.$$

Finalement :

$$\lim_{n\to+\infty} n h_n = 1 \quad \text{et} \quad u_n = 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Poursuivons le développement en écrivant :

$$u_n = 1 + \frac{1}{n} + k_n \quad \text{avec} \quad k_n = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Finalement :

$$u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{3}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

18 **1)** • La fonction $\left(t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\right)$ est continue et positive sur $\mathbb{R}^{+*}$. Pour tout $x > 0$, le segment d'extrémités x et x^2 est inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$, donc $f(x)$ est bien défini.

• Si $x \geqslant 1$, alors $x \leqslant x^2$ et $f(x) \geqslant 0$. Si $x \leqslant 1$, alors $x \geqslant x^2$ et $f(x) \leqslant 0$.

2) On note G une primitive, sur $\mathbb{R}^{+*}$, de la fonction :

$$\left(t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\right).$$

On a $f(x) = G(x^2) - G(x)$. Donc G est de classe $\mathcal{C}^1$.

3) $f'(x) = 2xG'(x^2) - G'(x) = 2x\dfrac{\mathrm{e}^{-x^4}}{x^2} - \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x}$

$$= \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x}\left(\exp\left[-x^4 + x^2 + \ln(2)\right] - 1\right).$$

On pose $h(x) = -x^4 + x^2 + \ln(2)$. On remarque que $h(1) > 0$ et $h(2) < 0$, donc f' s'annule au moins une fois entre 1 et 2. Étudier h sur $\mathbb{R}^+$ pour en déduire que f' n'a pas d'autre zéro.
La calculette permet de constater que $h(1,21) > 0$ et $h(1,22) < 0$, donc $\alpha \in]1,21; 1,22[$.

4) Si $x > 1$, alors :

$$\forall t \in [x, x^2] \quad \mathrm{e}^{-x^2} \geqslant \mathrm{e}^{-t^2} \geqslant \mathrm{e}^{-x^4}$$

et :

$$\mathrm{e}^{-x^2} \ln(x) \geqslant f(x) \geqslant \mathrm{e}^{-x^4} \ln(x).$$

On en déduit que :

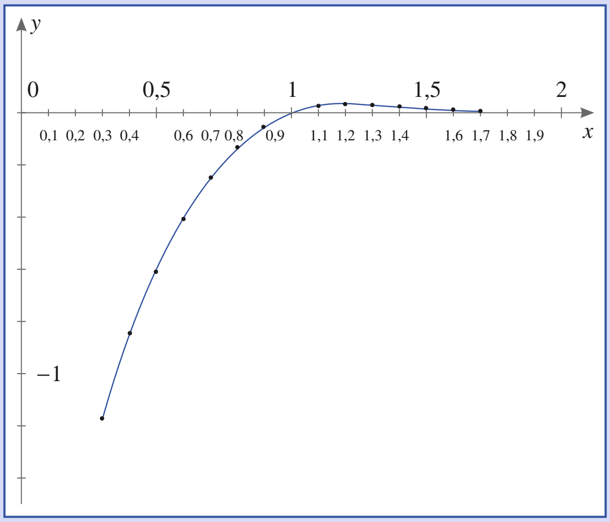
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \text{ et } f(x) =_{+\infty} o\left(\mathrm{e}^{-x}\right).$$

Pour x dans $]0, 1[$, on obtient de même :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad f(x) \sim_{0^+} \ln(x).$$

5) Le tableau des variations de f et le graphe de f sont ci-dessous.

x	0		1		$\alpha \approx 1{,}21$		
$f'(x)$		+		+	0	−	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$f(\alpha) \approx 0{,}033$	↘	0



x	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
$f(x)$	−1,59	−1,164	−0,85	−0,606	−0,409	−0,252	−0,133	−0,051	0	0,025	0,033	0,03	0,024	0,017	0,011	0,007

La calculette vous permettra de constater que $f(1,21)$ et $f(1,22)$ sont très proches de 0,033 et que $f(2) \approx 2 \cdot 10^{-3}$.

19 • Le domaine de définition de F est :

$$D =]0,1[\cup]1,+\infty[.$$

• Pour $x > 1$, on a $x \leqslant x^2$ et $F(x) \geqslant 0$. Pour x dans$]0,1[$, on a $x^2 \leqslant x$ et l'on obtient aussi $F(x) \geqslant 0$.

• On note G une primitive de la fonction $\left(t \mapsto \dfrac{1}{\ln t}\right)$ sur un de ses intervalles de définition.

On a $F(x) = G(x^2) - G(x)$, donc E est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D. De plus :

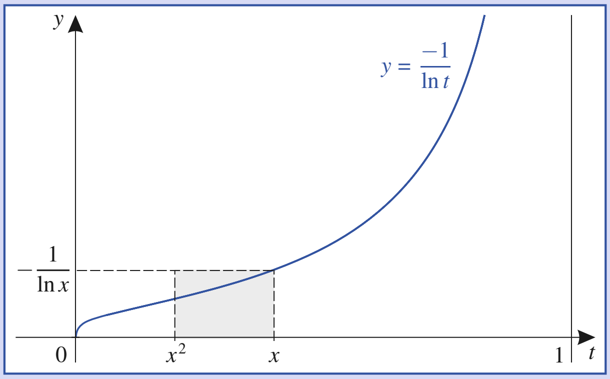
$$F'(x) = 2xG'(x^2) - G'(x) = \frac{x-1}{\ln x}.$$

On constate que F' est positive sur D, donc F est croissante sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$.

Étude en 0

Sur $]0,1[$, on a :

$$0 \leqslant F(x) = \int_{x^2}^{x} \frac{-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{-1}{\ln x}(x - x^2).$$



Donc $\lim\limits_{x\to 0} F(x) = 0$.

On prolonge F par continuité en 0 en posant $F(0) = 0$. On remarque que $\lim\limits_{x\to 0} F'(x) = 0$, donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$ et le graphe de F admet une tangente horizontale en $x = 0$.

Étude en 1

$$\frac{1}{\ln(t)} = \frac{1}{t-1} + \frac{1}{2} + \delta(t).$$

avec $\lim\limits_{t\to 1} \delta(t) = 0$. On pose :

$$h(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + \delta(t) & \text{si} \quad t > 0 \quad \text{et} \quad t \neq 1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad t = 1 \end{cases}$$

La fonction h est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$. Soit H une primitive de h. On peut écrire, pour tout x de D :

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t-1} + \int_x^{x^2} h(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \ln(x+1) + H(x^2) - H(x).$$

On en déduit :

$$\lim_{x\to 1} F(x) = \ln(2).$$

On prolonge F par continuité en 1 en posant $F(1) = \ln(2)$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \qquad F(x) = \ln(x+1) + H(x^2) - H(x).$$

Donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et :

$$F'(x) = \frac{1}{x+1} + 2x\,h(x^2) - h(x).$$

En particulier $F'(1) = \dfrac{1}{2} + h(1) = 1$.

Étude en $+\infty$

La fonction F est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

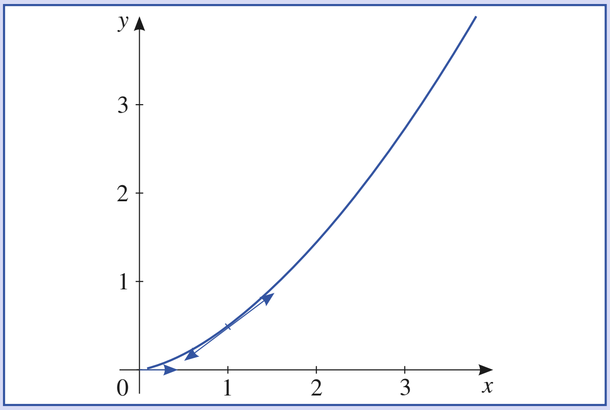
Une étude graphique similaire à celle de l'étude en 0 permettra de prouver que :

$$\forall x > 1 \quad F(x) \geqslant \frac{x^2 - x}{\ln(x^2)} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty.$$

Convexité

Faire l'étude du signe de F'' et en déduire que F est convexe.

Le graphe de F est tracé sur le *schéma* suivant :



20 **1) Première solution**

La *formule de Taylor* avec reste intégral appliquée à $T^n(f)$ donne la formule demandée.

Deuxième solution

On procède par récurrence et on intègre par parties.

Troisième solution (dans le cas où f est continue)

Le calcul d'intégrales doubles a été abordé en Première année. Celui-ci sera revu. On l'utilise pour donner une autre démonstration, également par récurrence. L'hypothèse de récurrence (H_n) est : pour toute f de E, pour tout x réel :

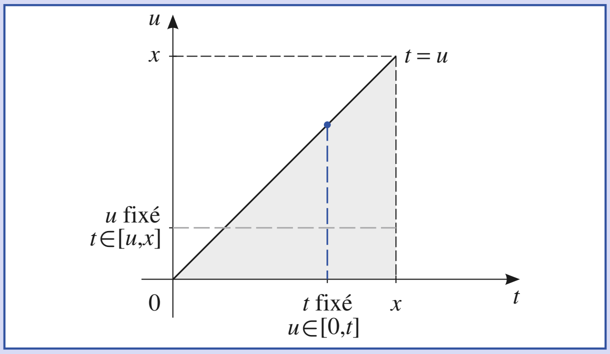
$$T^n(f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(H_1) est vraie. On suppose (H_n) vraie pour un entier $n \geqslant 1$. Pour toute application f de E, on a :

$$T^{n+1}(f) = \int_0^x T^n(f)(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\int_0^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!} f(u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t$$

L'intégrale double est calculée avec t variant dans $[0,x]$, et à t fixé, u variant dans $[0,t]$.

Le *schéma* indique que u varie dans $[0,x]$, et à u fixé, t varie dans $[u,x]$.



Donc :

$$\begin{aligned} T^{n+1}(f) &= \int_0^x \left(\int_0^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!} f(u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x f(u)\left(\int_u^x \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u \\ &= \int_0^x f(u)\frac{(x-u)^n}{n!}\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Ceci prouve que $(H_n) \Rightarrow (H_{n+1})$ et la récurrence est achevée.

2) Pour tout entier $n > 0$ et tout f de E, $T^n(f)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et $T^n(f)^{(n)} = f$.

• On en déduit que $T^n(f) = 0_E \Rightarrow f = 0_E$.

• Ainsi, T^n est injective et induit un isomorphisme de E dans $\mathrm{Im}(T^n)$.

• Soit :

$$V = \left\{g \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R},\mathbb{C})\,;\ g(0) = \ldots = g^{(n-1)}(0) = 0\right\}.$$

Par construction, $\mathrm{Im}(T^n) \subset V$.

Soit g un élément de V. Pour tout k de $[\![0, n-1]\!]$, $g^{(k)}$ est la primitive de $g^{(k+1)}$ qui s'annule en 0.

Donc :

$$T^n(g^{(n)}) = g.$$

On en déduit : $\mathrm{Im}(T^n) = V$.

3) D'après la question **2)**, 0 n'est jamais valeur propre de T^n.

Soit λ un scalaire non nul et f un élément de E tel que $T^n(f) = \lambda f$.

On a $f = T^n\left(\frac{1}{\lambda} f\right)$, donc f est dans $\mathrm{Im}(T^n)$.

On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ et solution de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} f^{(n)} = \dfrac{1}{\lambda} f \\ f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0 \end{cases}$$

Le cours de Première année sur les équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2 permet de conclure, dans les cas où n vaut 1 ou 2, que $f = 0_E$. Donc, $\mathrm{Sp}(T) = \mathrm{Sp}(T^2) = \varnothing$.

Le cours sur les systèmes différentiels, développé au tome *Algèbre-Géométrie*, permet de conclure que, pour tout n, $\mathrm{Sp}(T^n) = \varnothing$.

4) On note $\|f\|_{\infty,x} = \sup\{|f(t)|; t \in [\min(0,x), \max(0,x)]\}$.

$$|T^n(f)(x)| = \left|\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|x|^n}{n!}\|f\|_{\infty,x}$$

donc la série à termes complexes $\sum T^n(f)(x)$ est absolument convergente pour tout x de $\mathbb{R}$. La série de fonctions $\sum T^n(f)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

On fixe x dans $\mathbb{R}$.

$$\forall t \in [\min(0,x), \max(0,x)]\ \left|\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\right| \leqslant \frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!}\|f\|_{\infty,x}$$

Si $u_n(t) = \dfrac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)$, la majoration précédente prouve que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur le segment $[\min(0,x), \max(0,x)]$, donc :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} T^n(f)(x) &= \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \mathrm{e}^{x-t} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{e}^x \int_0^x \mathrm{e}^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

21 **1)** La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et :

$$f(0) = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2.$$

2) $f(x) - \ln 2 = \displaystyle\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n x^2}{n(n^2+x^2)}$.

Ainsi posée, la question incite à montrer la convergence uniforme de la série de fonctions obtenue sur un intervalle de la forme $[A, +\infty[(A > 0)$ pour utiliser le *théorème d'interversion des limites* en $+\infty$. La série de fonctions ne converge pas normalement sur un tel intervalle. Toutefois, il s'agit d'une série alternée et elle vérifie, lorsque x est fixé, le critère spécial des séries alternées. Ceci vous permettra de prouver qu'elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - \ln 2) = \sum_1^{\infty} \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{(-1)^n x^2}{n(n^2+x^2)} \right) = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

Puis : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

3) On pose $v_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^2}{n(n^2+x^2)}$. La convergence uniforme de la série de fonctions continues $\sum v_n$ sur $\mathbb{R}$ entraîne la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
De plus :

$$v_n(x) = \frac{(-1)^n}{n} + (-1)^{n+1} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+\mathrm{i}x} + \frac{1}{n-\mathrm{i}x} \right).$$

Les fonctions v_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $k \geqslant 1$, on a :

$$v_n^{(k)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{1}{2} k! \left(\frac{(-\mathrm{i})^k}{(n+\mathrm{i}x)^{k+1}} + \frac{\mathrm{i}^k}{(n-\mathrm{i}x)^{k+1}} \right).$$

D'où :

$$|v_n^{(k)}(x)| \leqslant \frac{1}{2} k! \left(\frac{1}{|n+\mathrm{i}x|^{k+1}} + \frac{1}{|n-\mathrm{i}x|^{k+1}} \right)$$
$$\leqslant \frac{k!}{(\sqrt{n^2+x^2})^{k+1}} \leqslant \frac{k!}{n^{k+1}}.$$

La série de fonctions $\sum v_n^{(k)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
La fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

22 Soit t dans $[0, T]$. On pose, pour tout entier $k \geqslant 1$:

$$v_k(u) = \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \mathrm{e}^{kx(t-u)} g(u)$$

et on considère la série de fonctions, définies sur $[0, T]$, $\sum v_k(u)$.
Si g est non nulle, on pose $M = \displaystyle\sup_{u\in[0,T]} |g(u)|$. Alors, pour tout u de $[0, T]$ et tout $x > 0$:

$$|v_k(u)| \leqslant \frac{M}{k!} \mathrm{e}^{kxt}.$$

Donc la série de fonctions $\sum v_k$ est normalement convergente par rapport à u sur $[0, T]$ et :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^T \mathrm{e}^{kx(t-u)} g(u)\,\mathrm{d}u
&= \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \mathrm{e}^{kx(t-u)} g(u)\,\mathrm{d}u \\
&= -\int_0^T \left[\exp(-\mathrm{e}^{x(t-u)}) - 1 \right] g(u)\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^t g(u)\,\mathrm{d}u + \int_t^T \left[1 - \exp(-\mathrm{e}^{x(t-u)}) \right] g(u)\,\mathrm{d}u \\
&\qquad - \int_0^t \exp(-\mathrm{e}^{x(t-u)}) g(u)\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

On montre ensuite que :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_t^T \left[1 - \exp\left(-\mathrm{e}^{x(t-u)} \right) \right] g(u)\,\mathrm{d}u = 0$$

$$\left| 1 - \exp\left(-\mathrm{e}^{x(t-u)} \right) \right| \leqslant \mathrm{e}^{x(t-u)}.$$

D'où :

$$\left| \int_t^T \left[1 - \exp\left(-\mathrm{e}^{x(t-u)} \right) \right] g(u)\,\mathrm{d}u \right| \leqslant \int_t^T \mathrm{e}^{x(t-u)} M\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{M}{x}$$

Enfin, on montre que :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^t \exp\left(-\mathrm{e}^{x(t-u)} \right) g(u)\,\mathrm{d}u = 0$$

$$\left| \int_0^t \exp\left(-\mathrm{e}^{x(t-u)} \right) g(u)\,\mathrm{d}u \right| \leqslant M \left| \int_0^t \exp\left(-\mathrm{e}^{x(t-u)} \right) \mathrm{d}u \right|.$$

Soit $\alpha \leqslant \inf\left(\dfrac{\varepsilon}{M}, t \right)$. Alors :

$$\left| \int_{t-\alpha}^t \exp\left(-\mathrm{e}^{x(t-u)} \right) g(u)\,\mathrm{d}u \right| \leqslant \varepsilon.$$

De plus, si $\alpha < t$, on a :

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^{t-\alpha} \exp\left(-\mathrm{e}^{x(t-u)} \right) g(u)\,\mathrm{d}u \right| &\leqslant M(t-\alpha) \exp\left(-\mathrm{e}^{\alpha x} \right) \\
&\leqslant M\,T \exp(-\mathrm{e}^{\alpha x}).
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

23 **1)** $E = [-1, 1]$. La série de fonctions $\sum \dfrac{x^n}{n^2}$ converge normalement sur $[-1, 1]$, donc la fonction f est continue sur $[-1, 1]$. Elle diverge grossièrement si $|x| > 1$.

2) La série de fonctions $\sum \dfrac{x^{n-1}}{n}$ converge normalement sur tout segment de $]-1, 1[$. La fonction f est donc dérivable sur $]-1, 1[$ et :

$$f'(x) = \sum_1^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}.$$

Soit x non nul dans $]-1,1[$. On écrit :

$$f'(x) = \frac{1}{x}\sum_{1}^{\infty}\frac{x^n}{n}.$$

La convergence normale sur tout segment de $]-1,1[$ de la série de fonctions $\sum x^{n-1}$ autorise à écrire :

$$x\,f'(x) = \int_0^x\left(\sum_1^{\infty} t^{n-1}\right)\mathrm{d}\,t = -\ln(1-x).$$

Puis : $\quad f'(x) = -\dfrac{\ln(1-x)}{x} \quad si \quad x \neq 0,\ f'(0) = 1.$

x	-1		0		1
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	1	$+$	$\Vert$
$f(x)$		$\nearrow$			$\dfrac{\pi^2}{6}$

3) $f(-1) = -\displaystyle\sum_1^{\infty}\frac{1}{n^2} + 2\sum_1^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} = -\frac{1}{2}\sum_1^{\infty}\frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$

4) $\displaystyle\lim_{x\to -1} f'(x) = \ln 2$ et $\displaystyle\lim_{x\to +1} f'(x) = +\infty.$

Le graphe de f admet une tangente de coefficient directeur $\ln 2$ au point d'abscisse -1 et la continuité de f sur $[-1,1]$ nous permet de dire qu'il existe une tangente verticale au point d'abscisse 1.

5) $D = \left[-1, \dfrac{1}{2}\right].$

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{1}{(x-1)^2}\,f'\left(-\frac{x}{1-x}\right) = \frac{\ln(1-x)}{(1-x)}.$$

D'où :

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2}(\ln(1-x))^2 + \varphi(0) = -\frac{1}{2}(\ln(1-x))^2.$$

Puis :

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(-1) = -\frac{1}{2}(\ln 2)^2.$$

Soit :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}(\ln 2)^2 + \frac{\pi^2}{12}.$$

Chapitre 7

1 La fonction $\left(t \mapsto \cos^2\left(\dfrac{1}{t}\right)\right)$ est continue, bornée et positive sur l'intervalle borné $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Elle est donc intégrable sur cet intervalle.

2 f est positive et continue sur $]0,1]$. On cherche une primitive sur $]0,1]$ de f.

La fonction $(u \mapsto x = \mathrm{e}^{-u})$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de $]-\infty, 0]$ sur $]0,1]$. Pour tout x de $]0,1]$, on pose $x = \mathrm{e}^{-u}$, $\mathrm{d}\,x = -\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}\,u$.

Et :

$$\int |\ln x|^n\,\mathrm{d}\,x = -\int u^n \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}\,u$$

$$= u^n\mathrm{e}^{-u} + nu^{n-1}\mathrm{e}^{-u}\ldots + n!\mathrm{e}^{-u} + C$$

$$= x((-\ln x)^n + n(-\ln x)^{n-1} + \ldots + n!) + C.$$

Cette dernière expression est bornée sur $]0,1]$, donc f est intégrable sur $]0,1]$ et $\displaystyle\int_0^1 |\ln x|^n\,\mathrm{d}\,x = n!.$

3 La fonction $\left(f : t \mapsto \dfrac{1}{(1+t)\sqrt[3]{t^2(1-t)}}\right)$ est continue et positive sur $]0,1[$.

On cherche une primitive F sur $]0,1[$ de f.

$$F(t) = \int \frac{\mathrm{d}\,t}{(1+t)t\sqrt[3]{\left(\frac{1}{t}-1\right)}}.$$

La fonction $\left(t \mapsto v = \sqrt[3]{\dfrac{1}{t}-1}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0,1[$ sur $]0,+\infty[$.

Soit $v = \sqrt[3]{\dfrac{1}{t}-1}$; on a : $t = \dfrac{1}{v^3+1}$, $\mathrm{d}\,t = -\dfrac{3v^2}{(v^3+1)^2}\,\mathrm{d}\,v$ et :

$$F(t) = \frac{1}{2^{1/3}}\int\left(\frac{1}{v+2^{1/3}} - \frac{1}{2}\frac{2v-2^{1/3}}{v^2-2^{1/3}v+2^{2/3}}\right)\mathrm{d}\,v$$

$$-\frac{3}{2}\int\frac{1}{v^2-2^{1/3}v+2^{2/3}}\,\mathrm{d}\,v$$

$$= \frac{1}{2}2^{2/3}\ln\left(v+2^{1/3}\right) - \frac{1}{4}2^{2/3}\ln\left(v^2-2^{1/3}v+2^{2/3}\right)$$

$$-\frac{1}{2}3^{1/2}2^{2/3}\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2^{2/3}v-1)\right) + \text{cte}.$$

On pose :

$$H(v) = \frac{1}{2}2^{2/3}\ln\left(v+2^{1/3}\right) - \frac{1}{4}2^{2/3}\ln\left(v^2-2^{1/3}v+2^{2/3}\right)$$

$$-\frac{1}{2}3^{1/2}2^{2/3}\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2^{2/3}v-1)\right).$$

La fonction $F : \left(t \mapsto H\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{t}-1}\right)\right)$ est une primitive de f sur $]0,1[$.

La fonction H est bornée sur $]0,+\infty[$, donc f est intégrable sur $]0,1[$ et :

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}\,t}{(1+t)\sqrt[3]{t^2(1-t)}} = \lim_{v\to 0}H(v) - \lim_{v\to+\infty}H(v) = 2^{2/3}\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

4 La fonction f est continue, positive et paire. Il suffit de prouver l'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}^+$. On montre la convergence de la série $\sum I_k$ avec $I_k = \displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2|\sin x|^{3/2}}$.

$$\begin{aligned} I_k &= \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+(t+k\pi)^2(\sin t)^{3/2}} \\ &\leqslant 2\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1+(k\pi)^2(\sin t)^{3/2}} \\ &\leqslant 2\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1+(k\pi)^2\left(\dfrac{2t}{\pi}\right)^{3/2}} \qquad \left(\sin t \geqslant \frac{2t}{\pi}\right) \\ &\leqslant 2\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1+k^2t^{3/2}}. \end{aligned}$$

Soit $u = k^2t^{3/2}$. On trouve :

$$I_k \leqslant \frac{4}{3k^{4/3}}\int_0^{b_k} \frac{\mathrm{d}u}{u^{1/3}(1+u)}$$

où $\lim\limits_{k\to+\infty} b_k = +\infty$.

La fonction $\left(u \mapsto \dfrac{1}{u^{1/3}(1+u)}\right)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, donc :

$$0 \leqslant I_k \leqslant \frac{4}{3k^{4/3}}\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^{1/3}(1+u)}.$$

Par conséquent, $I_k = O\left(\dfrac{1}{k^{4/3}}\right)$. La série $\sum I_k$ converge et la fonction est intégrable sur $\mathbb{R}$.

5 **1)** La fonction $\left(x \mapsto \dfrac{x}{\tan x}\right)$ prolongée par continuité en 0 et en $\dfrac{\pi}{2}$ est continue et positive sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Elle est donc intégrable sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. De plus :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\tan x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} x\mathrm{cotan}x\,\mathrm{d}x.$$

Soit a et b tels que $0 < a < b < \dfrac{\pi}{2}$. Alors :

$$\int_a^b x\mathrm{cotan}x\,\mathrm{d}x = [x\ln(\sin(x))]_a^b + \int_a^b -\ln(\sin(x))\,\mathrm{d}x$$

On fait tendre a vers 0 et b vers $\dfrac{\pi}{2}$.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\tan x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} -\ln(\sin(x))\,\mathrm{d}x = \frac{\pi\ln 2}{2}.$$

2) La fonction $\left(x \mapsto \dfrac{\mathrm{Arctan}\,(x)}{x(1+x^2)}\right)$ est continue et positive sur $\mathbb{R}^{+*}$. De plus, elle se prolonge par continuité en 0 et $\dfrac{\mathrm{Arctan}\,(x)}{x(1+x^2)} \leqslant \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{x^3}$.

La fonction $\left(x \mapsto \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{x^3}\right)$ est intégrable sur $[1+\infty[$, donc la fonction $\left(x \mapsto \dfrac{\mathrm{Arctan}\,(x)}{x(1+x^2)}\right)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Soit $A > 0$ et $u = \mathrm{Arctan}\,(x)$. On obtient :

$$\int_0^A \frac{\mathrm{Arctan}\,(x)}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\mathrm{Arctan}\,(A)} \frac{u}{\tan u}\,\mathrm{d}u.$$

Puis :

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{Arctan}\,(x)}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{x}{\tan x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi\ln 2}{2}.$$

6 La fonction : $\left(t \mapsto -\dfrac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}}\right)$ est continue et positive sur $]0,1[$ et se prolonge par continuité en 1. Or :

$$-\frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}} \sim_0 -\ln(t)$$

et la fonction $-\ln$ est intégrable sur $]0,1]$.

On en déduit l'intégrabilité sur $]0,1[$ de la fonction :

$$t \mapsto -\frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}}.$$

Soit a dans $\left]0, \dfrac{1}{2}\right[$. On calcule $\displaystyle\int_a^1 -\frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$ en intégrant par parties. Puis on fait tendre a vers 0.

$$\int_0^1 -\frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t = 4(1-\ln(2)).$$

7 **1)** La fonction f est continue et positive sur $]0,+\infty[$. Elle se prolonge par continuité en 0.

De plus $f(x) \sim_{+\infty} \dfrac{\pi}{4x\ln x}$. Or une primitive sur $[2,+\infty[$ de la fonction $\left(x \mapsto \dfrac{\pi}{4x\ln x}\right)$ est la fonction $\left(x \mapsto \dfrac{\pi}{4}\ln(\ln x).\right)$

Cette primitive n'est pas bornée sur $[2,+\infty[$, donc f n'est pas intégrable sur $]0,+\infty[$.

2) • Si $t > 1$ ou $t < 0$, la fonction f est continue et de signe constant sur $]0,1]$.

$f(x) \sim_0 -\dfrac{1}{t\sqrt{x}}$ et cette fonction est intégrable sur $]0,1]$. f l'est donc.

• Si $t = 1$, la fonction f est continue et négative sur $]0,1[$:

$$f(x) \sim_0 -\frac{1}{\sqrt{x}},\ f(x) \sim_1 -\frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

Ces deux fonctions sont intégrables sur $]0,1[$. f l'est aussi.

• Si $t = 0$, la fonction f est continue, positive sur $]0,1]$.

$$f(x) \sim_0 \frac{1}{x^{3/2}}.$$

f n'est pas intégrable sur $]0,1]$.

• Si $t \in\,]0,1[$, la fonction f n'est pas continue par morceaux sur $]0,1[$.

8 Les fonctions f_n sont continues et positives sur $]0,1]$. Si $n \geqslant 1$, f_n se prolonge par continuité en 0 avec $f_n(0) = 0$, donc f_n est intégrable sur $]0,1]$. Et $f_0(t) =_0 o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$, donc f_0 est aussi intégrable sur $]0,1]$.
On fixe a dans $]0,1[$.

$$\int_a^1 (\ln t)^2 \,\mathrm{d}t = \Big[t\,(\ln t)^2\Big]_a^1 - \int_a^1 2\ln t \,\mathrm{d}t.$$

D'où $u_0 = 2$.
Pour $n > 0$, en procédant de même : $u_n = \dfrac{2}{(n+1)^3}$.

$$\int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{t+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n}\left((-1)^k t^k (\ln t)^2\right)\mathrm{d}t + \int_0^1 (-1)^{n+1} t^{n+1}\frac{(\ln t)^2}{t+1}\,\mathrm{d}t.$$

Terminer en justifiant que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 (-1)^{n+1} t^{n+1}\frac{(\ln t)^2}{t+1}\,\mathrm{d}t = 0$ et en déduire :

$$\int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{t+1}\,\mathrm{d}t = \sum_0^{\infty}(-1)^n\frac{2}{(n+1)^3}.$$

9 f est continue et positive sur $]a,b[$.
Au voisinage de a, $f(x) = O\left(\dfrac{1}{\sqrt{(x-a)}}\right)$.
La fonction $\left(x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{(x-a)}}\right)$ est intégrable sur $\left]a, \dfrac{a+b}{2}\right]$, donc f l'est aussi.
On montre de même que f est intégrable sur $\left[\dfrac{a+b}{2}, b\right[$.
f est donc intégrable sur $]a,b[$.
L'application $\left(t \mapsto x = \dfrac{a+b}{2} + t\dfrac{b-a}{2}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et bijective de $]-1,1[$ sur $]a,b[$.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \pi.$$

10 La fonction $\left(t \mapsto -\dfrac{\ln(t)}{\sqrt{t}(1-t)^{3/2}}\right)$ est continue et positive sur $]0,1[$. De plus :

$$-\frac{\ln(t)}{\sqrt{t}(1-t)^{3/2}} \sim_1 \frac{1}{\sqrt{1-t}} \quad \text{et} \quad \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}(1-t)^{3/2}} =_0 o\left(t^{-3/4}\right)$$

La fonction $\left(t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$ est intégrable sur $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right[$ et la fonction $\left(t \mapsto t^{-3/4}\right)$ l'est sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right]$.
Donc f est intégrable sur $]0,1[$.
La fonction $\left(t \mapsto u = \dfrac{1}{t}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et bijective de $]0,1[$ sur $]1,+\infty[$.

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}(1-t)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t = -\int_1^{+\infty}\frac{\ln(u)}{(u-1)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u.$$

Puis en intégrant par parties :

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}(1-t)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t = -2\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u-1}}.$$

La fonction $\left(u \mapsto x = \sqrt{u-1}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et bijective de $]1,+\infty[$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}(1-t)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t = -2\pi.$$

11 Pour tout $x > 0$, on a :

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^B |f(t)|\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\sqrt{x}}\int_B^x |f(t)|\,\mathrm{d}t$$
$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^B |f(t)|\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{\int_B^x |f(t)|^2\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_B^x \mathrm{d}t}$$

en utilisant l'*inégalité de Cauchy-Schwarz*.

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^B |f(t)|\,\mathrm{d}t + \sqrt{\frac{x-B}{x}}\sqrt{\int_B^x |f(t)|^2\,\mathrm{d}t}$$
$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^B |f(t)|\,\mathrm{d}t + \sqrt{\int_B^{+\infty} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t}.$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Il existe $B > 0$ tel que :

$$\sqrt{\int_B^{+\infty} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t} < \varepsilon.$$

Ensuite, il existe $A > B$ tel que, pour tout $x \geqslant A$, on ait $\dfrac{1}{\sqrt{x}}\displaystyle\int_0^B |f(t)|\,\mathrm{d}t < \varepsilon$. Alors, pour tout $x \geqslant A$, on a :

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant 2\varepsilon.$$

12 La suite de fonctions (f_n) définies sur $[0,1]$ par :

$$f_n(x) = nx(1-x)^n$$

converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction nulle.
Pour tout x de $[0,1]$, on a $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \dfrac{1}{e}$.
Le *théorème de convergence dominée* s'applique.

13 Pour tout $x > 0$: $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1} = \displaystyle\sum_1^{\infty}\mathrm{e}^{-nx}$.
Poser, pour tout $x > 0$,

$$f_n(x) = \sin(x)\mathrm{e}^{-nx} \quad \text{et} \quad S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x).$$

Alors :

$$|S_n(x)| \leqslant \frac{|\sin(x)|}{\mathrm{e}^x - 1}.$$

Appliquer le *théorème de convergence dominée*.

14 $$e^{-x}\cos(\sqrt{x}) = \sum_0^{\infty}(-1)^n e^{-x}\frac{x^n}{(2n)!}$$

Poser, pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout $x \geqslant 0$: $f_n(x) = (-1)^n e^{-x}\dfrac{x^n}{(2n)!}$

15 F est définie sur $]1, +\infty[$. La fonction $\left(t \mapsto \dfrac{1}{1+t^\alpha}\right)$ est continue par rapport à t et la fonction $\left(\alpha \mapsto \dfrac{1}{1+t^\alpha}\right)$ par rapport à α. On note $f(\alpha, t) = \dfrac{1}{1+t^\alpha}$.
Soit a et b tels que $1 < a < b$. Pour tout α dans $[a, b]$, on a :

$$\left(t \geqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant \frac{1}{1+t^\alpha} \leqslant \frac{1}{1+t^a}\right)$$

et : $$\left(t < 1 \Rightarrow 0 \leqslant \frac{1}{1+t^\alpha} \leqslant \frac{1}{1+t^b}\right).$$

La fonction $\left(t \mapsto \sup\left(\dfrac{1}{1+t^a}, \dfrac{1}{1+t^b}\right)\right)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
Le *théorème de continuité* s'applique.

16 **1)** f vérifie les hypothèses du théorème et admet une dérivée partielle par rapport à α, $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}$, continue sur $]1, +\infty[\times\mathbb{R}^{+*}$. Pour tout $[a, b] \subset]1, +\infty[$, et pour tout (α, t) de $[a, b] \times \mathbb{R}^{+*}$:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, t)\right| \leqslant \sup\left(\frac{|\ln t|}{1+t^a}, \frac{|\ln t|}{1+t^b}\right).$$

2) On remarque que :

$$-\int_0^{\infty}\frac{t^\alpha \ln t}{(1+t^\alpha)^2}\,dt = -\int_0^1 \frac{t^\alpha \ln t}{(1+t^\alpha)^2}\,dt - \int_1^{\infty}\frac{t^\alpha \ln t}{(1+t^\alpha)^2}\,dt$$

Utiliser le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$ pour la première intégrale.

$$F'(\alpha) = \int_1^{\infty}\frac{t^\alpha \ln t}{(1+t^\alpha)^2}\left(\frac{1}{t^2} - 1\right)dt \leqslant 0.$$

3) Poser, pour tout $n \geqslant 2$ et tout t de $\mathbb{R}^+$, $f_n(t) = \dfrac{1}{1+t^n}$.
Puis montrer que le *théorème de convergence* dominée s'applique : $\lim\limits_{n\to+\infty} F(n) = 1$. La fonction F est décroissante.
Donc $\lim\limits_{+\infty} F = 1$.
4) L'application F est décroissante. F admet une limite l dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ lorsque α tend vers 1.
Montrer par l'absurde que $\ell = +\infty$.
Supposer que l appartienne à $\mathbb{R}$.

$$\forall A > 0 \quad F(\alpha) \geqslant \int_1^A \frac{dt}{1+t^\alpha}.$$

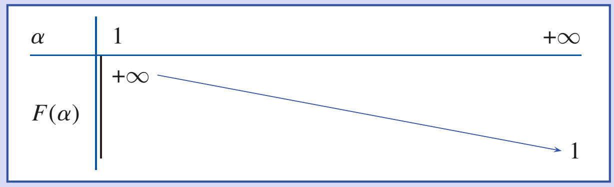
Les deux termes admettent une limite lorsque α tend vers 1.

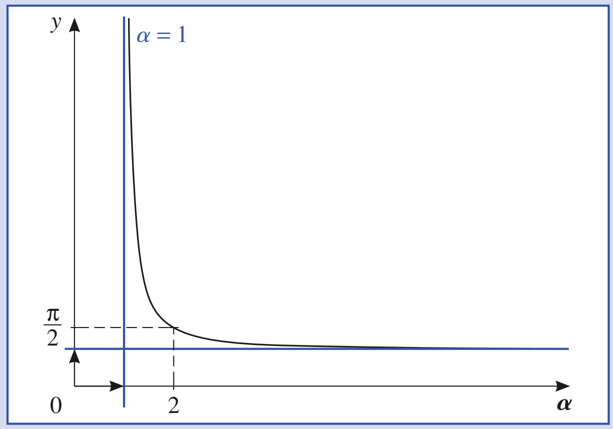
$$\forall A > 0 \quad l \geqslant \int_1^A \frac{dt}{1+t}.$$

Or la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.

D'où la contradiction cherchée.

5) $F(2) = \dfrac{\pi}{2}$.





17 **1)** $$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}}.$$

2) Montrer, en utilisant le *corollaire* 19.1, que, pour tout $p \geqslant 1$:

$$\frac{d^p}{d\alpha^p}\left(\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx\right) = \int_0^{+\infty}\frac{\partial^p(e^{-\alpha x^2})}{\partial \alpha^p} = \frac{d^p}{d\alpha^p}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}}\right)$$

D'où :

$$\int_0^{\infty} x^{2p}e^{-\alpha x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}1.3\ldots(2p-1)}{2^{p+1}}\frac{1}{\alpha^{p+1/2}}.$$

3) $$\int_0^{\infty} x e^{-\alpha x^2}\,dx = \frac{1}{2\alpha}.$$

4) On procède de même que dans la question **2)** :

$$\frac{d^p}{d\alpha^p}\left(\int_0^{\infty} x e^{-\alpha x^2}\,dx\right) = \frac{1}{2}(-1)^p\frac{p!}{\alpha^{p+1}}.$$

D'où :

$$\int_0^{\infty} x^{2p+1}e^{-\alpha x^2}\,dx = \frac{1}{2}\frac{p!}{\alpha^{p+1}}.$$

18 La fonction f est continue et positive sur $\mathbb{R}^{+*}$.
$f(x) \sim_0 x^{a-b}$. Donc f est intégrable sur $]0,1]$ si, et seulement si, $a-b>-1$.

On remarque également que, si $b>1$, alors, pour tout $x \geqslant 1$, $f(x) \leqslant \dfrac{1}{x^b}$ et f est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Si $b \leqslant 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|^a}{x^b}\,\mathrm{d}x$ et on étudie la convergence de la série $\sum I_n$.

• Si $b>0$, on a :

$$\frac{1}{((n+1)\pi)^b}\int_0^{\pi} |\sin x|^a\,\mathrm{d}x \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{(n\pi)^b}\int_0^{\pi} |\sin x|^a\,\mathrm{d}x.$$

• Si $b<0$, on a :

$$\frac{1}{(n\pi)^b}\int_0^{\pi} |\sin x|^a\,\mathrm{d}x \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{((n-1)\pi)^b}\int_0^{\pi} |\sin x|^a\,\mathrm{d}x.$$

Donc :

$$I_n \sim \frac{1}{(n\pi)^b}\int_0^{\pi} |\sin x|^a\,\mathrm{d}x.$$

La série $\sum I_n$ diverge et la fonction f n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$.
Donc f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ si, et seulement si :

$$1<b<a+1.$$

19 • $f>0$ et $\displaystyle\lim_{+\infty} \frac{f'}{f} = a < 0$.

Il existe donc $c \geqslant 0$ tel que f' soit négative sur $[c,+\infty[$. La fonction f est positive, décroissante sur $[c,+\infty[$. Elle a donc une limite $l \geqslant 0$ en $+\infty$.

• La fonction f' est de signe constant sur $[c,+\infty[$. Sa primitive f est bornée sur cet intervalle.
Donc f' est intégrable sur $[c,+\infty[$.

• $f' \sim_{+\infty} af$. f' est de signe constant et $a \neq 0$. f est donc intégrable sur $[c,+\infty[$. Or, elle est décroissante et positive sur cet intervalle. La série $\sum f(n)$ converge.

20 On vérifie tout d'abord l'existence de l'intégrale.

La fonction $\left(t \mapsto \dfrac{t^{a-1}}{1+t^b}\right)$ est continue, positive sur $]0,1]$ et :

$$\forall t \in]0,1] \quad \frac{t^{a-1}}{1+t^b} \leqslant t^{a-1}$$

L'application $\left(t \to t^{a-1}\right)$ est intégrable sur $]0,1]$ car $a>0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $S_n = \displaystyle\sum_0^n \frac{(-1)^k}{a+kb}$.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_0^n (-1)^k \int_0^1 t^{a+kb-1}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 t^{a-1}\frac{1-(-t^b)^{n+1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Les fonctions $\left(t \mapsto \dfrac{t^{a-1}}{1+t^b}\right)$ et $\left(t \mapsto t^{a-1}\dfrac{(-t^b)^{n+1}}{1+t^b}\right)$ sont intégrables sur $]0,1]$. D'où :

$$S_n = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 t^{a-1}\frac{(-t^b)^{n+1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t.$$

La deuxième intégrale tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ car :

$$\left|\int_0^1 t^{a-1}\frac{(-t^b)^{n+1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 t^{b(n+1)+a-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a+b(n+1)}$$

On en déduit alors l'égalité :

$$\sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb} = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t.$$

Pour $a=1$ et $b=3$, on obtient :

$$\sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+3n} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t = \frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Avec Maple :

```
> int(1/(1+t^3),t=0..1);
```

$$\frac{1}{3}\ln(2) + \frac{1}{9}\pi\sqrt{3}.$$

21 **1)** Pour $n \geqslant 2$, la fonction $f_n : \left(x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)\dots(n+x)}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et :

$$\frac{1}{(1+x)\dots(n+x)} =_{+\infty} O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Cette fonction est donc intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

$$0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^n} = \frac{1}{n-1}.$$

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
Pour calculer I_n, on décompose en éléments simples :

$$\frac{1}{(1+x)\dots(n+x)} = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k+x}$$

et :

$$a_k = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1}\frac{(-1)^{k-1}}{(n-1)!}.$$

Soit $A>0$.

$$\int_0^A f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^n \left[a_k \ln(A) + a_k \ln\left(1+\frac{k}{A}\right) - a_k \ln(k)\right].$$

Or, $\displaystyle\sum_{k=1}^n a_k = 0$, donc :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\dots(n+x)} &= -\sum_{k=1}^n a_k \ln(k) \\ &= -\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1}\frac{(-1)^{k-1}}{(n-1)!}\ln(k). \end{aligned}$$

2) $\dfrac{f_n'(x)}{f_n(x)} = -\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k+x}$. D'où, pour tout x de $[0,1]$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leqslant -\frac{f_n'(x)}{f_n(x)} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

$$-\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} f_n'(x) \leqslant f_n(x) \leqslant -\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}} f_n'(x).$$

En intégrant de 0 à 1, on obtient :

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \sim \frac{1}{(n+1)!\ln(n)}.$$

3) $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_1^{\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$

On pose $u = x-1$ dans $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

On obtient $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = nI_{n+1}$.

Puis $I_n \sim \dfrac{1}{(n+1)!\ln(n)}$. La série $\sum I_n$ converge.

22 **1)** La fonction g est positive et continue sur $]0,1[$.

De plus :

$$g(x) \sim_0 \frac{1}{x^{1-\lambda}} \quad \text{et} \quad 1-\lambda < 1$$
$$g(x) \sim_1 \frac{1}{(1-x)^{\lambda}} \quad \text{et} \quad \lambda < 1.$$

Donc g est intégrable sur $]0,1[$.

2) La fonction $\left(t \mapsto u = \dfrac{t}{1-t}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et bijective de $[0,1[$ dans $[0,+\infty[$.

$$I(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^{1-\lambda}(1+u)}.$$

3) $I(\lambda) - J(\lambda) = J(1-\lambda)$ en posant $v = \dfrac{1}{u}$.

4) $\displaystyle J(\lambda) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{u^{1-\lambda}(1+u)}$

$$= \int_0^1 \frac{1}{u^{1-\lambda}}\left(\sum_0^{n-1}(-1)^k u^k + (-1)^n \frac{u^n}{1+u}\right)\mathrm{d}u$$

$$= \sum_0^{n-1}\int_0^1 (-1)^k u^{k+\lambda-1}\,\mathrm{d}u + (-1)^n \int_0^1 \frac{u^{n+\lambda-1}}{1+u}\,\mathrm{d}u$$

car chaque intégrale a un sens. De plus :

$$0 < \int_0^1 \frac{u^{n+\lambda-1}}{1+u}\,\mathrm{d}u \leqslant \int_0^1 u^{n+\lambda-1}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{n+\lambda}$$

qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Donc :

$$J(\lambda) = \sum_0^{\infty}\int_0^1 (-1)^k u^{k+\lambda-1}\,\mathrm{d}u = \sum_0^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+\lambda}.$$

5) $\displaystyle I(\lambda) = J(\lambda) + J(1-\lambda) = \sum_0^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+\lambda} + \sum_0^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1-\lambda}$

$$= \frac{1}{\lambda} + 2\lambda\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^n}{\lambda^2 - n^2}.$$

23 **1)** $\displaystyle u_n = \int_0^1 \frac{f(n+x)}{n+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{f(x)}{n+x}\,\mathrm{d}x.$

Posons $\displaystyle v_n = \int_0^1 \frac{f(x)}{n}\,\mathrm{d}x$ et étudions $u_n - v_n$.

$$u_n - v_n = -\int_0^1 \frac{x\,f(x)}{n(n+x)}\,\mathrm{d}x.$$

Donc : $\displaystyle |u_n - v_n| \leqslant \frac{1}{2n^2}\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|.$

La série $\sum(u_n - v_n)$ est absolument convergente. La série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, la série $\displaystyle\sum\int_0^1 \frac{f(x)}{n}\,\mathrm{d}x$ converge, donc si, et seulement si, $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

2) Si la fonction $\left(t \mapsto \dfrac{f(t)}{t}\right)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, la fonction $\left(t \mapsto \dfrac{|f(t)|}{t}\right)$ l'est. $|f|$ est aussi continue et 1-périodique sur $\mathbb{R}$, et la série $\displaystyle\sum\int_n^{n+1}\frac{|f(t)|}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

D'après la question précédente, on en déduit que :

$$\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x = 0.$$

Puis $f = 0$.

3) Supposons l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ convergente, mais non absolument convergente. Alors $f \neq 0$. De plus, la série $\sum u_n$ converge. Donc $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Réciproquement, supposons $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ et $f \neq 0$.

Alors la série $\displaystyle\sum\int_n^{n+1}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

De plus, pour tout $x \in [n, n+1]$, on a :

$$\left|\int_n^x \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{n}\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|.$$

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente et :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_1^{\infty} u_n.$$

24 **1)** La fonction f est continue de $[1,+\infty[$ dans $\mathbb{C}$. De plus $|x^a e^{ix}| = x^a$.

f est intégrable sur $[1,+\infty[$ si, et seulement si, $a < -1$.

2) Soit a dans $[-1,0[$. Prenons $A > 1$ et calculons $\displaystyle\int_1^A x^a e^{ix}\,dx$.

$$\int_1^A x^a e^{ix}\,dx = \left[-ie^{ix}x^a\right]_1^A + ia\int_1^A x^{a-1}e^{ix}\,dx$$

$$= ie^{i} - ie^{iA}A^a + ia\int_1^A x^{a-1}e^{ix}\,dx.$$

Lorsque A tend vers $+\infty$, $e^{iA}A^a$ tend vers 0 et :

$\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{a-1}e^{ix}\,dx$ converge, car $a-1 < -1$.

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^a e^{ix}\,dx$ est convergente et :

$$\int_1^{+\infty} x^a e^{ix}\,dx = ie^{i} + ia\int_1^{+\infty} x^{a-1}e^{ix}\,dx.$$

3) On remarque que :

$$\int_{2n\pi-\pi/4}^{2n\pi+\pi/4} x^a \cos x\,dx \geqslant \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

On note $x_{2n} = 2n\pi - \dfrac{\pi}{4}$ et $x_{2n+1} = 2n\pi + \dfrac{\pi}{4}$, la suite $\displaystyle\int_{x_{2n}}^{x_{2n+1}} x^a \cos x\,dx$ ne tend pas vers 0, donc l'intégrale diverge.

Les intégrales proposées ne sont pas convergentes.

4) Lorsque $a < -1$, les fonctions $(x \mapsto x^a\cos x)$ et $(x \mapsto x^a \sin x)$ sont intégrables sur $[1,+\infty[$.

Lorsque $a \geqslant 0$, on montre de même que dans la question **3)** que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^a \sin x\,dx$ n'est pas convergente.

Lorsque a est dans $[-1,0[$, la question **2)** permet d'affirmer que les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^a\cos x\,dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^a \sin x\,dx$ convergent. De plus, pour tout x, on a :

$$|\sin x|x^a \geqslant (\sin^2 x)\quad x^a = \frac{x^a}{2} - \frac{\cos 2x}{2}x^a \geqslant 0.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2}x^a\,dx$ converge, mais l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x^a}{2}\,dx$ diverge. La fonction $(x \mapsto x^a\sin x)$ n'est donc pas intégrable sur $[1,+\infty[$. Montrer qu'il en est de même de la fonction $(x \mapsto x^a \cos x)$.

5) a) Posons $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} x^a \sin x\,dx$. On sait que la série $\sum u_n$ converge et que :

$$\int_0^{\infty} x^a \sin x\,dx = \sum_0^{\infty} u_n = \sum_0^{\infty}(-1)^n\int_0^{\pi}(n\pi+t)^a \sin t\,dt.$$

Cette série est alternée et vérifie le critère spécial des séries alternées. Sa somme a le signe de u_0. Donc $\displaystyle\int_0^{\infty} x^a \sin x\,dx > 0$.

b) La fonction $(x \mapsto \cos(x^2))$ est continue sur $\mathbb{R}$.

On remarque que :

$$\int_{\sqrt{-\pi/4+2n\pi}}^{\sqrt{\pi/4+2n\pi}}\left|\cos(x^2)\right|dx \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\pi}{4}\frac{1}{\sqrt{\dfrac{\pi}{4}+2n\pi}}.$$

La divergence de la série $\displaystyle\sum \frac{1}{\sqrt{\dfrac{\pi}{4}+2n\pi}}$ permet de dire que la fonction $(x \mapsto \cos(x^2))$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.

La fonction $(x \mapsto u = x^2)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et bijective sur $[0,+\infty[$.

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos(u)}{2\sqrt{u}}\,du = \int_0^{+\infty}\cos(x^2)\,dx.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty}\cos(x^2)\,dx$ converge.

La même technique permet d'établir que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty}\sin(x^2)\,dx$ est convergente.

De plus :

$$\int_0^{\infty}\sin(x^2)\,dx = \int_0^{\infty}\frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}}\,du > 0.$$

25 **1)** Considérer la suite de fonctions (f_n) définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin\,]-\infty,a] \\ \dfrac{n^2x^2e^{-n^2x^2}}{1+x^2} & \text{si} \quad x \in\,]-\infty,a] \end{cases}$$

La fonction $(u \mapsto ue^{-u})$ est positive sur $\mathbb{R}^+$ et atteint son maximum en $u = 1$. On en déduit que, pour tout x :

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{1}{e(1+x^2)}.$$

Appliquer le *théorème de convergence dominée* :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{a}\frac{n^2x^2e^{-n^2x^2}}{1+x^2}\,dx = 0.$$

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{a}\frac{n^3x^2e^{-n^2x^2}}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{na}\frac{u^2n^2e^{-u2}}{n^2+u^2}\,du \qquad (u = nx).$

On considére la suite de fonctions (f_n) définies par :

$$f_n(u) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad u \notin\,]-\infty,na] \\ \dfrac{u^2n^2e^{-u^2}}{n^2+u^2} & \text{si} \quad u \in\,]-\infty,na] \end{cases}$$

Pour tout réel u : $0 \leqslant f_n(u) \leqslant u^2 e^{-u}$. Si $a > 0$, en appliquant le *théorème de convergence dominée* :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{a} \frac{n^3x^2 e^{-n^2x^2}}{1+x^2}\,dx = \int_{\mathbb{R}} u^2 e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(cf. *exercice* 17).

• Si $a = 0$, de même :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{0} \frac{n^3x^2 e^{-n^2x^2}}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} u^2 e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

• Si $a < 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{a} \frac{n^3x^2 e^{-n^2x^2}}{1+x^2}\,dx = 0.$

26 **1)** On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n \ln(x) & \text{si} \quad x \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$, on a :

$$|f_n(x)| \leqslant \left|\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \ln(x)\right| = \left(1-\frac{x}{n}\right)^n |\ln(x)| \leqslant e^{-x}|\ln(x)|$$

Appliquez le *théorème de convergence dominée* :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{\infty} e^{-x}\ln(x)\,dx.$$

2) $\displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \ln(x)\,dx$

$$= \int_0^1 n(1-u)^n \ln(nu)\,du$$

$$= n\ln(n)\int_0^1 (1-u)^n\,du + n\int_0^1 (1-u)^n \ln(u)\,du$$

car les fonctions $\left(u \mapsto (1-u)^n\right)$ et $\left(u \mapsto (1-u)^n \ln(u)\right)$ sont intégrables sur $]0,1]$.

Intégrer par parties $\displaystyle\int_0^a (1-u)^n \ln(u)\,du$, avec a un réel de $]0,1[$.

$\displaystyle\int_0^a (1-u)^n \ln(u)\,du$

$$= \left[\frac{1-(1-u)^{n+1}}{n+1}\ln(u)\right]_0^a - \int_0^a \frac{1-(1-u)^{n+1}}{n+1}\frac{du}{u}.$$

Et :

$$-\int_0^1 \frac{1-(1-u)^{n+1}}{n+1}\frac{du}{u} = -\int_0^1 \frac{1-t^{n+1}}{1-t}\frac{1}{n+1}\,dt$$

$$= -\frac{1}{n+1}\int_0^1 \left(t^n + t^{n-1} + \ldots + 1\right) dt$$

$$= -\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2} + 1\right).$$

Puis :

$\displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \ln(x)\,dx$

$$= n\ln(n)\frac{1}{n+1} - \frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2} + 1\right)$$

$$= \frac{n}{n+1}\left(\ln(n) - \ln(n+1) - \gamma + o(1)\right)$$

D'où : $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\ln(x)\,dx = -\gamma.$

27 **1)** La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$ et $|\varphi| = O\left(\exp\left(-tx^2\right)\right)$ aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$.

2) Soit $u = \sqrt{t}\,x$ un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, $(a < b)$. Alors :

$$\left|\int_a^b f(x)\exp\left(-tx^2\right) dx\right| \leqslant \left|\int_{a\sqrt{t}}^{b\sqrt{t}} f\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right)\frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left(-u^2\right) du\right|$$

$$\leqslant \frac{\|f\|_\infty}{\sqrt{t}}\int_{a\sqrt{t}}^{b\sqrt{t}} \exp\left(-u^2\right) du.$$

Donc :

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\exp\left(-tx^2\right) dx\right| \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{\sqrt{t}}\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-u^2\right) du.$$

Puis :

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\exp\left(-tx^2\right) dx = 0.$$

3) On suppose $f(0) \neq 0$. Le calcul précédent donne :

$$\sqrt{t}\int_{\mathbb{R}} f(x)\exp\left(-tx^2\right) dx = \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right)\exp\left(-u^2\right) du.$$

On considère une suite (t_n) de réels > 0 tendant vers $+\infty$ et, pour tout n, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(u) = f\left(\frac{u}{\sqrt{t_n}}\right)\exp\left(-u^2\right).$$

On a $\forall u \in \mathbb{R} \quad |f_n(u)| \leqslant \|f\|_\infty \exp(-u^2)$. Le *théorème de convergence dominée* s'applique.

D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{u}{\sqrt{t_n}}\right)\exp\left(-u^2\right) du = f(0)\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-u^2\right) du$$

$$= \sqrt{\pi}\,f(0).$$

Ceci étant obtenu pour toute suite (t_n) de réels tendant vers $+\infty$:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\exp\left(-tx^2\right) dx \sim_{+\infty} \frac{\sqrt{\pi}\,f(0)}{\sqrt{t}}.$$

28 **1)** On pose, pour tout $x > 0$, $f_n(x) = f(x)e^{-nx}$. On a : $|f_n(x)| \leqslant \|f\|_\infty \exp(-x)$. Avec le *théorème de convergence dominée* :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^\infty f(x)e^{-nx}\,dx = 0.$$

2) Calculer $\int_0^\infty n\,f(x)e^{-nx}\,dx$ en effectuant le changement de variables $u = nx$ sur $\int_0^A nf(x)e^{-nx}\,dx$, avec $A > 0$.

$$\int_0^\infty n\,f(x)e^{-nx}\,dx = \int_0^\infty f\left(\frac{u}{n}\right)e^{-u}\,du$$

Poser, pour $n \geqslant 1$ et $u > 0$, $g_n(u) = f\left(\frac{u}{n}\right)e^{-u}$. La même majoration permet d'utiliser le *théorème de convergence dominée* :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^\infty f\left(\frac{u}{n}\right)e^{-u}\,du = f(0)\int_0^\infty e^{-u}\,du = f(0)$$

3) $I_n - L = \int_0^\infty n(f(x) - f(0))e^{-nx}\,dx$

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^x f'(t)\,dt\right) ne^{-nx}\,dx.$$

On fixe $A > 0$ et on intégre par parties. En faisant tendre A vers $+\infty$: $I_n - L = \int_0^\infty f'(x)e^{-nx}\,dx$ Donc :

$$I_n - L \sim \frac{f'(0)}{n}.$$

29 On vérifie que, pour tout $x \neq 0$, la fonction $t \mapsto \dfrac{h(t)}{\sqrt{x^2 - t^2}}$ est intégrable sur $]\min(0, x), \max(0, x)[$.

Soit $x \neq 0$. On pose $t = ux$.

$$F(x) = \int_0^1 \frac{h(ux)}{\sqrt{1-u^2}}\frac{x}{|x|}\,du.$$

En notant : $G(x) = \int_0^1 \dfrac{h(ux)}{\sqrt{1-u^2}}\,du$, pour $x \neq 0$, on a :

$$F(x) = \operatorname{sgn}(x)G(x).$$

Pour tout x réel, la fonction ($u \mapsto \dfrac{h(ux)}{\sqrt{1-u^2}}$) est continue et intégrable sur $[0, 1[$.

La fonction, φ, des deux variables admet une dérivée partielle par rapport à x, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x, u) = \dfrac{uh'(ux)}{\sqrt{1-u^2}}$, continue par rapport à x et continue par rapport à u. Soit A un réel tel que : $0 < A$.

Alors h' est bornée sur $[-A, A]$ et, pour tout x de $[-A, A]$, on a :

$$\left|\frac{uh'(ux)}{\sqrt{1-u^2}}\right| \leqslant \sup_{x\in[-A,A]} |h'(x)|\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\ .$$

Les fonctions dominantes sont intégrables sur $[0, 1[$, donc G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\lim_{x\to 0} G(x) = G(0) = \int_0^1 \frac{h(0)}{\sqrt{1-u^2}}\,du$$

$$\lim_{x\to 0} G'(x) = G'(0) = \int_0^1 \frac{uh'(0)}{\sqrt{1-u^2}}\,du.$$

On en déduit que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $h(0) = h'(0) = 0$.

30 **1)** On fixe $x > 0$. La fonction $t \mapsto e^{-xt} f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\left|e^{-xt} f(t)\right| \leqslant |f(t)|$. Donc elle est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

2) Pour tout $x \geqslant 0$:

$$x\varphi(x) = \int_0^1 xe^{-xt} f(t)\,dt + \int_1^\infty xe^{-xt} f(t)\,dt$$

$$\left|\int_1^\infty xe^{-xt} f(t)\,dt\right| \leqslant xe^{-x}\int_1^\infty |f|.$$

Donc $\lim_{x\to+\infty} \int_1^\infty xe^{-xt} f(t)\,dt = 0.$

Étude de $\int_0^1 xe^{-xt} f(t)\,dt$

Pour toute suite (x_n) tendant vers $+\infty$:

$$\int_0^1 x_n e^{-x_n t} f(t)\,dt = \int_0^{x_n} e^{-u} f\left(\frac{u}{x_n}\right)du.$$

On note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(u) = e^{-u} f\left(\frac{u}{x_n}\right) \quad \text{si} \quad u \in]0, x_n[\ ; \quad f_n(u) = 0 \quad \text{sinon.}$$

Avec le *théorème de convergence dominée* :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x_n e^{-x_n t} f(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-u} f(0)\,du = f(0).$$

En définitive, on obtient $\lim_{x\to+\infty} x\varphi(x) = f(0)$.

3) Pour tout $x \geqslant 0$, on a : $\left|e^{-xt} f(t)\right| \leqslant |f(t)|$ La fonction $|f|$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

31 **1)** On montre que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$ et, pour tout $k \geqslant 1$, :

$$f^{(k)}(x) = \int_0^\infty \frac{(-t)^k k!e^{-t}}{(1+xt)^{k+1}}\,dt.$$

En particulier :

$$f'(x) = -\int_0^\infty \frac{te^{-t}}{(1+xt)^2}\,dt \leqslant 0.$$

f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

2) $f(0) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = 1$ et $f'(0) = -\int_0^\infty te^{-t}\,dt = -1.$

On montre que $\lim_{n\to+\infty} f(n) = 0$. f est décroissante, donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

3) Cette équation différentielle est linéaire du premier ordre. On peut écrire ses solutions sous la forme :

$$y(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right)\int_0^x \frac{\exp\left(-\frac{1}{t}\right)}{t}\,\mathrm{d}t + C\exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

avec C dans $\mathbb{R}$.

L'expression $C\exp\left(\frac{1}{x}\right)$ tend vers l'infini, si $C \neq 0$, lorsque x tend vers 0.

On pose :

$$g(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right)\int_0^x \frac{\exp\left(-\frac{1}{t}\right)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\exp\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{t}\right)}{t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^\infty \frac{x\mathrm{e}^{-u}}{(1+xu)}\,\mathrm{d}u \qquad \left(u = \frac{1}{x}-\frac{1}{t}\right)$$

$$= x\,f(x).$$

De plus, on vérifie que $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$.

Enfin, $g(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right)\int_0^x \frac{\exp\left(-\frac{1}{t}\right)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Or $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 1$.

La fonction $\left(t \mapsto \frac{\exp\left(-\frac{1}{t}\right)}{t}\right)$ est continue, positive sur $\mathbb{R}^{+*}$. Elle est prolongeable par continuité en 0 et non intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

On en déduit :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{\exp\left(-\frac{1}{t}\right)}{t}\,\mathrm{d}t = +\infty.$$

Puis $\lim_{x\to+\infty}\exp\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ et enfin :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.$$

Chapitre 8

1 Pour tout complexe z, la suite $\left(\frac{z}{1+\sqrt{n}}\right)$ converge vers 0.

À partir d'un certain rang :

$$\left|\frac{1}{(1+\sqrt{n})^n}z^n\right| \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

La série $\sum \frac{1}{(1+\sqrt{n})^n}z^n$ converge absolument pour tout z et le rayon de convergence de la série entière est $+\infty$.

2 **1)** $\cos 2n = \cos^2 n - \sin^2 n$ et $1 = \cos^2 n + \sin^2 n$. Il est impossible d'avoir $\lim_{n\to\infty} \cos n = 0$.

2) La suite $(\cos n)$ ne converge pas vers 0. Donc $R \leqslant 1$.

La suite $(\cos n)$ est bornée. Donc d'après le *lemme d'Abel*, $R \geqslant 1$.

Finalement $R = 1$.

3) Pour tout x de $]-1,1[$, $\cos nx^n = \mathrm{Re}(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}})^n$ et la série géométrique $\sum (x\mathrm{e}^{\mathrm{i}})^n$ converge.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\cos(n)x^n = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}})^n\right) = \frac{1-x\cos 1}{x^2-2x\cos 1+1}.$$

3 Appliquons la *règle de d'Alembert*. Le rayon de convergence de la série entière est 8.

4 **1)** La *règle de d'Alembert* des séries entières s'applique à :

$$\sum \frac{z^{n+1}}{n(n+1)(2n+1)}$$

et donne 1 pour rayon de convergence.

En posant $z = x^2$, on en déduit que le rayon de convergence de la série entière de départ vaut 1 aussi.

2) Les séries entières suivantes ont 1 pour rayon de convergence :

$$\sum \frac{x^{2n+2}}{n}, \sum \frac{x^{2n+2}}{n+1}, \sum \frac{x^{2n+2}}{2n+1}.$$

Pour tout x de $]-1,1[$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}$$

$$= x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2)^{n+1}}{n+1} - 4x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Et :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n} = -\ln(1-x^2);\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2)^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x^2) - x^2\,;$$

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \ln(1+x) - \ln(1-x) - 2x.$$

D'où l'expression, valable pour tout x de $]-1,1[$:

$$f(x) = 3x^2 - (1-x)^2\ln(1-x) - (1+x)^2\ln(1+x).$$

3) Pour tout x de $[-1,1]$ et tout entier $n > 0$:

$$\left|\frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}\right| \leqslant \frac{1}{2n^3}.$$

La série de fonctions continues $\sum \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}$ converge normalement sur $[-1,1]$ et la fonction somme est continue sur $[-1,1]$. Ainsi :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = 3 - 4\ln(2).$$

La fonction étudiée est paire.

5 Le rayon de convergence de cette série entière vaut 1.
On pose $a_n = 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$, $b_0 = 0$ et $b_n = 1$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = n.$$

$$\forall x \in]-1,1[\quad \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

6 Dans les trois cas, le rayon de convergence est $R = 1$ et $]-1,1[\subset I \subset [-1,1]$.

• Dans le *premier cas*, il s'agit d'une série géométrique. Donc $I =]-1,1[$.

• Dans le *deuxième cas*, $I = [-1,1[$.

• Dans le *troisième cas*, $I = [-1,1]$.
La fonction somme d'une série entière est continue sur son intervalle ouvert de convergence (ici, $]-1,1[$).

• Dans le *deuxième cas*, pour $x \in [-1,0[$, on peut appliquer le critère spécial des séries alternées et majorer le reste. On en déduira la convergence uniforme sur $[-1,0[$, puis la continuité de la fonction somme sur $I = [-1,1[$.

• Dans le *troisième cas*, la série de fonctions continues est normalement convergente sur $[-1,1]$. Donc, la fonction somme est continue sur $I = [-1,1]$.

7 $R = 1$.
Notons S la fonction somme de cette série entière. Pour tout x de $]-1,1[$:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n+1}.$$

$$S'(x) = \begin{cases} -\ln(1-x^2) + \dfrac{1}{x^2}\ln(1-x^2) + 1 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Puisque $S(0) = 0$, S est la primitive de S' qui s'annule en 0.

$$S(x) = \begin{cases} -\left(x + \dfrac{1}{x}\right)\ln(1-x^2) + 2\ln\dfrac{1-x}{1+x} + 3x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

8 **1) Première méthode**
Pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$e^x \sin x = \operatorname{Im} e^{x(1+i)} = \operatorname{Im} \sum_{n=0}^{\infty} (1+i)^n \frac{x^n}{n!}.$$

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{2})^n \sin(n\frac{\pi}{4})\frac{x^n}{n!}.$$

Seconde méthode
Les fonctions exponentielle et sinus sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$. Donc, leur produit l'est aussi et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{1}{(n-k)!} \right) x^n,$$

$$\text{avec } a_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 2p \\ \dfrac{(-1^p)}{(2p+1)!} & \text{si } k = 2p+1 \end{cases}$$

Aprés simplification, on obtient :

$$e^x \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^{E((n-1)/2)} (-1)^p \binom{n}{2p+1} \right) \frac{x^n}{n!}.$$

2) L'unicité des coefficients permet de conclure que, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\sum_{p=0}^{E((n-1)/2)} (-1)^p \binom{n}{2p+1} = (\sqrt{2})^n \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right).$$

9 Pour tout x de $]-1,1[$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1-x^3) - \ln(1-x) - \ln(1+x^2) \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n}. \end{aligned}$$

10 L'équation caractéristique associée à la relation de récurrence **(1)** est :

$$r^2 - \alpha r - \beta = 0.$$

Puisque $\beta \neq 0$, ses racines ne sont pas nulles.

1) Deux cas sont possibles.

• $\alpha^2 + 4\beta \neq 0$.
L'équation caractéristique a deux racines complexes distinctes λ et μ et il existe $(c,d) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$a_n = c\lambda^n + d\mu^n.$$

Les deux séries entières $\sum \lambda^n x^n$ et $\sum \mu^n x^n$ ont des rayons de convergence respectifs de $\dfrac{1}{|\lambda|}$ et $\dfrac{1}{|\mu|}$, car ce sont des séries géométriques.
Donc la série entière $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence :

$$R \geqslant \min\left(\frac{1}{|\lambda|}, \frac{1}{|\mu|}\right).$$

• $\alpha^2 + 4\beta = 0$.
L'équation caractéristique a une racine double μ, et il existe $(c,d) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$a_n = (cn+d)\mu^n.$$

Les deux séries entières $\sum n\mu^n x^n$ et $\sum \mu^n x^n$ ont $\dfrac{1}{|\mu|}$ pour rayons de convergence.

Donc, la série entière $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence :

$$R \geqslant \frac{1}{|\mu|}.$$

2) Soit λ et μ les deux racines (éventuellement confondues) de l'équation caractéristique $r^2 - \alpha r - \beta = 0$. On note :

$$\rho = \min\left(\frac{1}{|\mu|}, \frac{1}{|\lambda|}\right).$$

La fonction somme de la série entière, f, est définie sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon ρ.
Pour tout z de ce disque, on a :

$$1 - \alpha z - \beta z^2 \neq 0 \text{ et } (1 - \alpha z - \beta z^2)\, f(z) = a_0 + (a_1 - \alpha a_0) z.$$

11 **1)** Le rayon de convergence est 1.

2) Pour tout x de $]-1, 1[$, on a :

$$(1 - x)\, f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} x^n \qquad \textbf{(1)}$$

Ainsi que :

$$(1 - x)^2\, f(x) =$$

$$x - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})(\sqrt{n-1} + \sqrt{n-2})(\sqrt{n-2} + \sqrt{n})} x^n \qquad \textbf{(2)}$$

3) Étude en -1^+

Pour x dans $[-1, 0[$, la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} x^n$ est alternée et vérifie le critère spécial des séries alternées. Pour tout x de $[-1, 0[$ et tout entier n :

$$|R_n(x)| \leqslant \left|\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} x^n\right| \leqslant \left|\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}\right|.$$

On en déduit que la série de fonctions continues :
$\sum \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} x^n$ converge uniformément sur $[-1, 0[$.
Le *théorème d'interversion des limites* s'applique :

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}.$$

4) Étude en 1^-

• La série $\sum \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$ est une série divergente à termes positifs. La suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$.
D'après **(1)**, pour tout x de $]0, 1[$:

$$(1 - x)\, f(x) \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} x^n = S_N(x).$$

On en déduira que $\lim_{x \to 1^-} (1 - x) f(x) = +\infty$.

• La série de fonctions :

$$\sum \frac{2}{(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})(\sqrt{n-1} + \sqrt{n-2})(\sqrt{n-2} + \sqrt{n})} x^n$$

converge normalement sur $[0, 1]$.
On note :

$$c = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})(\sqrt{n-1} + \sqrt{n-2})(\sqrt{n-2} + \sqrt{n})}.$$

D'après **(2)** et le *théorème d'interversion des limites* :

$$\lim_{x \to 1^-} (1 - x)^2\, f(x) = c.$$

De plus : $\quad c = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{N} + \sqrt{N-1}} = 0.$

Donc $\lim_{x \to 1^-} (1 - x)^2\, f(x) = 0$.

5) Soit un réel x de $]0, 1[$ et un entier n, on a :

$$n \geqslant 2 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{n}} x^n \leqslant \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} x^n \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n-1}} x^{n-1}.$$

On déduit de **(1)** que, pour tout x de $]0, 1[$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2\sqrt{n}} \leqslant (1 - x) f(x) \leqslant x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2\sqrt{n}}.$$

La fonction $g : \left(u \mapsto \frac{e^{u \ln(x)}}{2\sqrt{u}}\right)$ est continue, positive, décroissante et intégrable sur $]0, +\infty[$.
Pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\int_n^{n+1} g(u)\, du \leqslant \frac{x^n}{2\sqrt{n}} \leqslant \int_{n-1}^{n} g(u)\, du.$$

Donc : $\int_1^{\infty} \frac{e^{u \ln(x)}}{2\sqrt{u}}\, du \leqslant (1 - x) f(x) \leqslant x + \int_0^{\infty} \frac{e^{u \ln(x)}}{2\sqrt{u}}\, du.$

Le changement de variable $t = \sqrt{u}\sqrt{|\ln x|}$ donne :

$$\frac{1}{\sqrt{|\ln x|}} \int_{\sqrt{|\ln x|}}^{\infty} e^{-t^2}\, dt \leqslant (1 - x) f(x) \leqslant x + \frac{1}{\sqrt{|\ln x|}} \int_0^{\infty} e^{-t^2}\, dt.$$

donc :

$$\lim_{x \to 1^-} \sqrt{|\ln x|}(1 - x)\, f(x) = \int_0^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

De plus, $\sqrt{|\ln x|} \sim_{1^-} (1 - x)^{1/2}$. Finalement :

$$f(x) \sim_{1^-} \frac{\sqrt{\pi}}{2(1 - x)^{3/2}}.$$

12 Puisque $R > 1$, la série numérique $\sum a_k$ converge absolument.

On en déduit que la série de fonctions de la variable θ $\sum_k a_k e^{i k \theta} e^{-i n \theta}$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$. Donc :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(e^{i\theta}) e^{-i n \theta}\, d\theta = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\theta}\, d\theta.$$

Or $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\theta}\, d\theta = \delta_{n,k}$ (le symbole de Kronecker).
Le résultat en découle.

13 Le rayon de convergence de cette série entière est infini.

Première méthode

Pour tout x de $\mathbb{R}$: $S(x) + S'(x) + S''(x) = \mathrm{e}^x$.

On reconnaît une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

S est de la forme :

$$S(x) = \frac{1}{3}e^x + \alpha \mathrm{e}^{-x/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \beta \mathrm{e}^{-x/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

De plus, $S(0) = S'(0) = 0$. On en déduit :

$$\alpha = -\frac{1}{3} \text{ et } \beta = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Seconde méthode

On remarque que $1 + \mathrm{j}^{n+1} + \mathrm{j}^{2n+2} = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad n = 3k+2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Donc :

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k+2}}{(3k+2)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3}(1 + \mathrm{j}^{n+1} + \mathrm{j}^{2n+2})\frac{x^n}{n!}.$$

On en déduit : $S(x) = \dfrac{1}{3}(\mathrm{e}^x + \mathrm{j}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}x} + \mathrm{j}^2\mathrm{e}^{\mathrm{j}^2 x})$.

14 On écrit f sur $]-\pi, \pi[\setminus\{0\}$ sous la forme :

$$f(x) = \frac{\dfrac{\sin x - x}{x^2}}{\dfrac{\sin x}{x}}.$$

Les fonctions φ : $\left(x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}\right)$ et ψ : $\left(x \mapsto \dfrac{\sin x - x}{x^2}\right)$ se prolongent par continuité en 0.

De plus, sur $]-\pi, \pi[$, on a :

$$\varphi(x) = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} \quad \text{et} \quad \psi(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n+1)!}.$$

Elles sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\pi, \pi[$ et φ ne s'annule pas sur cet intervalle. Donc f est prolongeable en 0 en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\pi, \pi[$.

15 **1)** Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Sa fonction somme est notée y. Si y est solution de **(*E*)** sur $]-R, R[$, on a :

$$\begin{aligned} &xy''(x) - y'(x) + 4x^3 y(x) \\ &\quad = -a_1 + 3a_3 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty}(a_{n+1}(n-1)(n+1) + 4a_{n-3})x^n = 0 \end{aligned}$$

pour tout x de $]-R, R[$.

L'unicité du développement en série entière prouve que $a_1 = a_3 = 0$ et que :

$$\forall n \geqslant 0 \quad a_{n+4}(n+2)(n+4) + 4a_n = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

2) La relation **(1)** permet de démontrer, par récurrence, que $a_{4p+1} = 0$ pour tout entier p (respectivement $a_{4p+3} = 0$), car $a_1 = 0$ (respectivement $a_3 = 0$).

3) D'aprés **(1)**, pour tout entier $p \geqslant 1$:

$$a_{4p} = \frac{-1}{2p(2p-1)} a_{4(p-1)}.$$

On en déduit par récurrence que :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad a_{4p} = \frac{(-1)^p}{(2p)!} a_0.$$

De façon similaire, on prouve que :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad a_{4p+2} = \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} a_2.$$

4) Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est infini.

De plus, pour tout x de $\mathbb{R}$, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 \cos(x^2) + a_2 \sin(x^2).$$

5) Puisque la série entière obtenue a un rayon de convergence infini, sa fonction somme est solution de **(*E*)** sur $\mathbb{R}$.

L'ensemble des solutions de **(*E*)** sur un intervalle I ne contenant pas 0 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ de dimension 2, engendré par les restrictions à I des fonctions $(x \mapsto \cos(x^2))$ et $(x \mapsto \sin(x^2))$.

Donc, toute solution de **(*E*)** sur $\mathbb{R}$ est de la forme :

$$y : x \mapsto \begin{cases} a_0 \cos(x^2) + a_2 \sin(x^2) & \text{si } x \in \mathbb{R}^{+*} \\ b_0 \cos(x^2) + b_2 \sin(x^2) & \text{si } x \in \mathbb{R}^{-*} \end{cases}$$

avec a_0, a_2, b_0, b_2 quatre constantes.

La continuité de y en 0 entraîne $a_0 = b_0$.

De plus, y est deux fois dérivable en 0. On en déduit $a_2 = b_2$.

Donc, l'ensemble S des solutions de **(*E*)** définies sur $\mathbb{R}$ est le sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ engendré par les fonctions $(x \mapsto \cos(x^2))$ et $(x \mapsto \sin(x^2))$.

16 **1)** Pour tout x de $[-1, 1]$:

$$\left|\frac{x^n}{n^\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{n^\alpha}.$$

La série de fonctions $\sum \dfrac{x^n}{n^\alpha}$ converge normalement sur $[-1, 1]$.

• Le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{x^n}{n^\alpha}$ vaut 1.

Finalement le domaine de définition de f est $[-1, 1]$.

2) La convergence normale évoquée plus haut prouve la continuité de :

$$x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^\alpha} \text{ sur } [-1, 1].$$

La continuité de l'exponentielle entraîne la continuité de f sur son domaine de définition.

3) On pose $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$, car c'est la fonction somme d'une série entière de rayon de convergence 1.
La fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Donc, f l'est sur $]-1,1[$.

4) De plus, par définition de f, $f(0) = 1$. Donc, f est solution, sur $]-1,1[$, du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' &= S'(x)y \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$

On suppose l'existence d'une solution y de **(1)** développable en série entière sur $]-1,1[$ et notée :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Détermination des coefficients a_n
La fonction y est solution sur $]-1,1[$ de **(1)**. On en déduit :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{(k+1)^{\alpha-1}} \end{cases} \qquad \textbf{(2)}$$

Ceci détermine la suite (a_n) de manière unique par récurrence. Dans la suite de l'exercice, (a_n) désigne la suite calculée à partir de la relation **(2)**.

Minoration du rayon de convergence de $\sum a_n x^n$
On montre par récurrence que, pour tout n, $0 \leqslant a_n \leqslant 1$.
Soit R le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$. Puisque la suite (a_n) est bornée, $R \geqslant 1$.

Identification de f et de y sur $]-1,1[$
Puisque le rayon de convergence R de cette série entière est plus grand que 1, la fonction somme de cette série, y, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.
La relation **(2)** permet de prouver que la fonction y est solution, sur $]-1,1[$, du probléme de Cauchy :

$$\begin{cases} y' &= S'(x)y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Or, la fonction f est aussi solution de ce problème de Cauchy. D'après le *théorème de Cauchy-Lipschitz* :

$$\forall x \in]-1,1[\quad f(x) = y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

5) Les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum n a_n x^n$ ont le même rayon de convergence. Donc, pour tout entier naturel p, $\sum a_n x^n$ et $\sum n^p a_n x^n$ aussi.
Puisque la suite $(n^p a_n)$ ne converge pas vers 0, la série $\sum n^p a_n x^n$ ne converge pas pour $x = 1$.
On en déduit $R = 1$.

Application à la série étudiée
Soit un entier $p \geqslant \alpha$.

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{(k+1)^{\alpha-1}}$$

$$(n+1)^p a_{n+1} = (n+1)^{p-\alpha} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} \left(\frac{n+1}{k+1}\right)^{\alpha-1}$$

Donc, pour tout n :

$$(n+1)^p a_{n+1} \geqslant \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} \geqslant a_0 = 1.$$

La suite $(n^p a_n)$ ne converge pas vers 0. D'après ce qui précède, le rayon de convergence cherché est exactement 1.

17 **1)** Le critère spécial des séries alternées s'applique à la série $\sum (-1)^{n-1} \frac{n}{x^2+n^2}$ qui converge pour tout x de $\mathbb{R}$.

2) Dans toute la question, x est fixé dans $\mathbb{R}$.
• La fonction : $\left(t \mapsto \cos(xt)e^{-nt}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. Pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$|\cos(xt)e^{-nt}| \leqslant e^{-t}.$$

Donc, elle est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
Une double intégration par parties vous permettra de prouver la formule demandée.
• Pour tout $t > 0$, $e^{-t} \in]0,1[$ et :

$$\frac{\cos(xt)}{e^t+1} = \frac{\cos(xt)e^{-t}}{1+e^{-t}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cos(xt)e^{-nt}.$$

On note S_n la n-ième somme partielle de cette série de fonctions de la variable t. Pour tout t de $\mathbb{R}^{+*}$:

$$S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cos(xt)e^{-kt} = \cos(xt)e^{-t} \frac{1-(-1)^n e^{-nt}}{1+e^{-t}}.$$

$$|S_n(t)| \leqslant 2e^{-t}.$$

Le *théorème de convergence dominée* s'applique et permet de conclure :

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(xt)}{e^t+1} \, dt = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \int_0^{\infty} \cos(xt)e^{-nt} \, dt = f(x).$$

3) La fonction cosinus est développable en série entière et :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \quad \frac{\cos(xt)}{e^t+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \frac{t^{2n}}{e^t+1}.$$

Soit x dans $\mathbb{R}$. On pose $v_n(t) = (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \frac{t^{2n}}{e^t+1}$.
Alors :

$$0 \leqslant a_n = \int_0^{\infty} \frac{t^{2n}}{e^t+1} \, dt \leqslant \int_0^{\infty} t^{2n} e^{-t} \, dt = (2n)!$$

Si $x \in]-1,1[$, la série $\sum \int_0^{\infty} |v_n(t)| \, dt$ est convergente, le *théorème d'intégration terme à terme* s'applique et permet d'écrire :

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(xt)}{e^t+1}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}a_n.$$

Ceci prouve que la fonction f est développable en série entière sur $]-1,1[$. De plus :

$$a_n \geqslant \int_0^{\infty} \frac{t^{2n}e^{-t}}{2}\,dt = \frac{1}{2}(2n)!$$

La série $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}a_n$ diverge grossièrement pour $x=1$ et le rayon de convergence de cette série entière est exactement 1.

18 **1)** De la formule :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\qquad \frac{d\tan}{dx}(x) = 1+\tan^2(x)$$

on déduit par récurrence que, pour tout entier n :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\qquad f^{(n)}(x) = P_n(f(x))$$

où P_n est un polynôme à coefficients réels positifs de degré $n+1$. De fait, on trouve :

$$P_{n+1}(y) = P_n'(y)(1+y^2).$$

Puisque f est positive sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, $f^{(n)}$ l'est aussi car P_n est à coefficients positifs.

2) Soit $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$. D'après la première question, la série :

$$\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

est à termes positifs.

La formule de Taylor avec reste intégral nous apprend que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt \geqslant 0 \qquad \forall n\in\mathbb{N}\ \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \leqslant f(x).$$

La série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ converge pour tout x de $[0,\frac{\pi}{2}[$ et son rayon de convergence R est tel que $R \geqslant \frac{\pi}{2}$.

3) Puisque $R \geqslant \frac{\pi}{2}$, la dérivée de g sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ est obtenue par dérivation terme à terme :

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} = 1+\sum_{n=1}^{\infty} f^{(n+1)}(0)\frac{x^n}{n!}.$$

Par ailleurs, l'expression de g^2 sur cet intervalle s'obtient en effectuant le produit de Cauchy :

$$g^2(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}(0)f^{(n-k)}(0)\right)\frac{x^n}{n!}.$$

Pour $n \geqslant 1$, la formule de Leibniz permet d'écrire :

$$f^{(n+1)}(x) = (1+f^2(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}(x)f^{(n-k)}(x).$$

Or, $f(0)=0$. D'où la formule :

$$g'(x) = 1+\sum_{n=1}^{\infty} f^{(n+1)}(0)\frac{x^n}{n!} = 1+g^2(x) \text{ valable sur } \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[.$$

4) On a :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\qquad \frac{g'(x)}{1+g^2(x)} = 1.$$

Le changement de variable $y=g(x)$ dans :

$$\int \frac{g'(x)}{1+g^2(x)}\,dx$$

permet de conclure qu'il existe un réel c tel que :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\qquad \operatorname{Arctan}(g(x)) = x+c.$$

Or, $g(0)=f(0)=0$. Donc $c=0$ et :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\qquad g(x) = \tan x.$$

Ceci prouve que la fonction tangente est développable en série entière sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. De plus, cette fonction n'est pas continue à gauche en $\frac{\pi}{2}$; donc le rayon de convergence de sa série de Taylor est exactement $\frac{\pi}{2}$.

Chapitre 9

1 **1)** Si $a \in i\mathbb{Z}$, $a = im$, $f(x) = e^{imx}$, avec m dans $\mathbb{Z}$. Dans ce cas :

$$c_m(f) = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \neq m \quad c_n(f) = 0.$$

2) Sinon, on a : $c_n(f) = (-1)^n \dfrac{\operatorname{sh}(a\pi)}{\pi(a-in)}$.

2 La fonction f est à valeurs complexes et paire. Les coefficients $b_n(f)$ sont nuls.

1) Si $a \in i\mathbb{Z}$, $a = im$ et :

$$f(x) = \frac{e^{imx}+e^{-imx}}{2} = \cos(mx).$$

Dans ce cas :

$$c_m(f) = \frac{1}{2}, \quad c_{-m}(f) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad a_{|m|}(f) = 1.$$

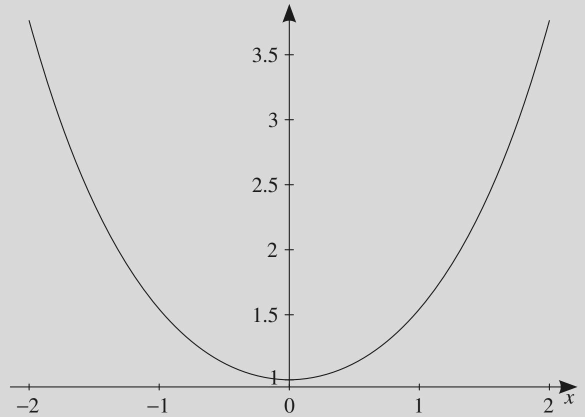
$$\forall n \in \mathbb{Z}\setminus\{m,-m\} \quad c_n(f) = 0.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{|m|\} \quad a_n(f) = 0.$$

2)

Avec Maple :

```
> plot(cosh(x),x=-2..2,scaling=constrained) ;
```



Pour tout $n \geqslant 0$:

$$a_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(e^{ax}+e^{-ax})(e^{inx}+e^{-inx})\,dx$$
$$= (-1)^n 2\frac{a}{\pi}\frac{\operatorname{sh}(a\pi)}{n^2+a^2}.$$

3 Pour la première fonction, si $a \in i\mathbb{Z}$,

$$a = im,\ f(x) = e^{imx},$$

et pour tout $p \geqslant |m|$, $S_p(f) = f$. En effet, f est un polynôme trigonométrique.
Sinon, la somme partielle $S_p(f)$ de la série de Fourier de f est :

$$S_p(f)(x)$$
$$= \frac{\operatorname{sh}(a\pi)}{\pi}\left(\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{p}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2}[(a+in)e^{inx}+(a-in)e^{-inx}]\right)$$

Pour la seconde fonction, si $a = im \in i\mathbb{Z}$, $f(x) = \cos(mx)$
f est un polynôme trigonométrique.

Si $|p| < |m|$, $S_p(f) = 0$.

Si $|p| \geqslant |m|$, $S_p(f) = f$.

Sinon, si $a \in \mathbb{R}^{+*}$:

$$S_p(f)(x) = \frac{\operatorname{sh}(a\pi)}{a\pi}\Big[1+2\sum_{n=1}^{p}(-1)^n\frac{a^2}{n^2+a^2}\cos(nx)\Big].$$

4 On sait que :

$$\inf\{\|f-Q\|_2 ; Q \in \mathcal{P}_n\} = \|f-S_n(f)\|_2.$$

Par conséquent :
Si $a \in i\mathbb{Z}$, $a = im$, $f(x) = e^{imx}$.
Pour tout $n \geqslant |m|$, $S_n(f) = f$ et :

$$\inf\{\|f-Q\|_2 ; Q \in \mathcal{P}_n\} = 0.$$

Pour tout $n < |m|$, $S_n(f) = 0$ et :

$$\inf\{\|f-Q\|_2 ; Q \in \mathcal{P}_n\} = \|f\|_2 = 1.$$

Si $a \in \mathbb{C}\backslash i\mathbb{Z}$, la somme partielle $S_n(f)$ de la série de Fourier de f est :

$$\frac{\operatorname{sh}(a\pi)}{\pi}\left(\frac{1}{a}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{a^2+k^2}[(a+ik)e^{ikx}+(a-ik)e^{-ikx}]\right).$$

Dans ce cas, $\inf\{\|f-Q\|_2 ; Q \in \mathcal{P}_n\} = \|f-S_n(f)\|_2$ et le *théorème de Pythagore* permet de calculer :

$$\|f-S_n(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|S_n(f)\|_2^2.$$

Avec :

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|e^{ax}|^2\,dx = \begin{cases}\dfrac{\operatorname{sh}(2\pi\operatorname{Re} a)}{2\pi\operatorname{Re} a} & \text{si}\quad \operatorname{Re} a \neq 0\\ 1 & \text{si}\quad \operatorname{Re} a = 0\end{cases}$$

et :

$$\|S_n(f)\|_2^2 = \sum_{k=-n}^{n}|c_k(f)|^2$$
$$= \left|\frac{\operatorname{sh}(a\pi)}{a\pi}\right|^2 + \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\operatorname{sh}(a\pi)}{a^2+k^2}\right|^2[|a+ik|^2+|a-ik|^2].$$

5 Si la série trigonométrique $\sum\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ était la série de Fourier d'une fonction de $\mathcal{CM}_{2\pi}$, d'après l'*inégalité de Bessel*, la série $\sum\frac{1}{n}$ serait convergente, ce qui est faux.

6 • En ce qui concerne la fonction f de l'*exercice* 1, elle n'est pas continue, sauf dans le cas $a \in i\mathbb{Z}$.
• La fonction f de l'*exercice* 2 est continue, la suite $(S_n(f))$ converge en moyenne quadratique vers f.
Si $a \in \mathbb{R}^{+*}$:

$$S_p(f)(x) = \frac{\operatorname{sh}(a\pi)}{a\pi}\Big[1+2\sum_{n=1}^{p}(-1)^n\frac{a^2}{n^2+a^2}\cos(nx)\Big].$$

Finalement :

$$\left(\frac{\operatorname{sh}(a\pi)}{a\pi}\right)^2\left[1+2\sum_{0}^{\infty}\Big(\frac{a^2}{n^2+a^2}\Big)^2\right] = \frac{1}{2}+\frac{\operatorname{sh}(2a\pi)}{4a\pi}.$$

7 La fonction f de l'*exercice* 1 appartient à l'espace $\mathcal{D}_{2\pi}$.
La formule de Parseval s'applique :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|e^{at}|^2\,dt$$
$$= \frac{|\operatorname{sh}(a\pi)|^2}{\pi^2}\left(\frac{1}{|a|^2}+\sum_{1}^{\infty}\frac{2}{(|a^2+n^2|)^2}[|a|^2+n^2]\right)$$

Si $\mathrm{Re}(a) = 0$, alors :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\mathrm{e}^{at}|^2 \,\mathrm{d}t = 1.$$

Si $\mathrm{Re}(a) \neq 0$, alors :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\mathrm{e}^{at}|^2 \,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{sh}\,(2\mathrm{Re}(a)\pi)}{2\mathrm{Re}(a)\pi}.$$

8 • La fonction f de l'*exercice* 1 n'est pas continue. Le *théorème de convergence normale* ne s'applique pas à elle.

• La fonction f de l'*exercice* 2 est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Le *théorème de convergence normale* s'applique.

La série de Fourier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$. En particulier, pour tout x de $[-\pi, \pi]$, lorsque $a > 0$:

$$\mathrm{ch}\,(ax) = \frac{\mathrm{sh}\,(a\pi)}{a\pi}\left[1 + 2\sum_{1}^{\infty}(-1)^n \frac{a^2}{n^2 + a^2}\cos(nx)\right].$$

9 La fonction f de l'*exercice* 1 est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, donc le *théorème de convergence simple* s'applique :
$\forall x \in \mathbb{R}$

$$f_r(x) = \frac{\mathrm{sh}\,(a\pi)}{\pi}\left(\frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2}[(a + i\,n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} + (a - \mathrm{i}n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}]\right)$$

Mais, de plus, pour $x = (2k+1)\pi$,

$$f(x) = \mathrm{ch}\,(a\pi) = \frac{\mathrm{e}^{a\pi} + \mathrm{e}^{-a\pi}}{2} = f_r(x).$$

Ainsi :

$$f(2\pi) = f(0) = 1 = \frac{\mathrm{sh}\,(a\pi)}{\pi}\left(\frac{1}{a} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n a}{a^2+n^2}\right)$$

et :

$$f(\pi) = \mathrm{ch}\,(a\pi) = \frac{\mathrm{sh}\,(a\pi)}{\pi}\left(\frac{1}{a} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{a^2+n^2}\right).$$

On en déduit les sommes de séries suivantes :

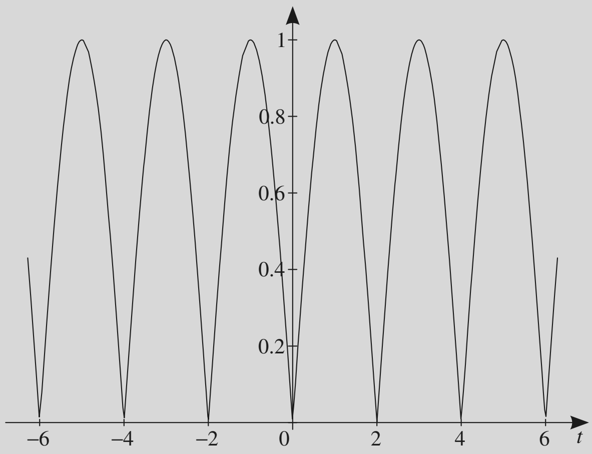
$$\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2} = \frac{\pi}{2a\,\mathrm{sh}\,(a\pi)} - \frac{1}{2a^2}$$

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{a^2+n^2} = \frac{\pi\mathrm{ch}\,(a\pi)}{2a\,\mathrm{sh}\,(a\pi)} - \frac{1}{2a^2}.$$

10 **1)** La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, T-périodique et paire.

Avec Maple :

```
> plot(abs(sin(Pi*t/2)),t=-2*Pi..2*Pi) ;
```



Les coefficients $b_n(f)$ sont nuls et :

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)\cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)\mathrm{d}t = \frac{4}{\pi(1-4n^2)}.$$

2) La formule de Parseval donne :

$$\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2\left(\frac{\pi t}{T}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2} = \frac{4}{\pi^2} + \frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}\frac{16}{\pi^2(1-4n^2)^2}.$$

D'où : $$\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} = \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{(1-4n^2)^2}.$$

La fonction f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Le *théorème de convergence normale* s'applique.
En particulier :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \left|\sin(\frac{\pi t}{T})\right| = \frac{2}{\pi} + \sum_{1}^{\infty}\frac{4}{\pi(1-4n^2)}\cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right).$$

11 On montre tout d'abord qu'il existe une suite $(\alpha_{\varphi(n)})$, extraite de la suite (α_n), telle que la série $\sum \alpha_{\varphi(n)}$ converge.

• Puisque la suite (α_n) converge, il existe N tel que, pour tout $n \geqslant N$, on ait $\alpha_n < 1$.
On pose $\varphi(0) = N$. Il existe $N_1 > N$ tel que, pour tout $n \geqslant N_1$, on ait $\alpha_{\varphi(0)} + \alpha_n < 1$.
On pose $\varphi(1) = N_1$. En itérant le procédé, on construit une suite $(\alpha_{\varphi(n)})$, extraite de la suite (α_n) qui convient.

• On considère alors la série de fonctions $\sum a_n \cos(nt)$ dans laquelle $a_n = \alpha_n$ s'il existe un entier p tel que :
$n = \varphi(p)$ et $a_n = 0$ sinon.
La série $\sum a_n$ est une série à termes positifs convergente et il existe une infinité de valeurs de n telles que $a_n = \alpha_n$.
La série de fonctions $\sum a_n \cos(nt)$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. Sa fonction somme est continue, 2π-périodique. Elle vérifie la condition souhaitée.

12 **1)** Les fonctions f et g sont 2π-périodiques et paires. Les coefficients $b_n(f)$ et $b_n(g)$ sont nuls.

$$a_0(f) = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} x^4 \,\mathrm{d}x = \frac{T^4}{40}$$

$$a_n(f) = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} x^4 \cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)\mathrm{d}x$$

$$= (-1)^n T^4\left(\frac{1}{2n^2\pi^2} - \frac{3}{n^4\pi^4}\right).$$

$$a_0(g) = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{T^2}{6}$$

$$a_n(g) = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} x^2 \cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n T^2}{n^2\pi^2}.$$

2) Les fonctions f et g sont continues et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Chacune est la somme de sa série de Fourier et la convergence est normale sur $\mathbb{R}$.
En particulier :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x)$

$$= \frac{T^4}{80} + T^4\sum_1^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2n^2\pi^2} - \frac{3}{n^4\pi^4}\right)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)$$

et : $$g(x) = \frac{T^2}{12} + \sum_1^{\infty}\frac{(-1)^n T^2}{n^2\pi^2}\cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right).$$

On en déduit :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) - \frac{T^2}{2}g(x)$

$$= -\frac{7T^4}{240} - \sum_1^{\infty}\frac{3(-1)^n T^4}{n^4\pi^4}\cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right).$$

3) Avec la formule de Parseval, on obtient :

$$\sum_1^{\infty}\frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{9450}.$$

13 Les fonctions f et f' sont continues et 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$. On sait que :

$$\int_0^{2\pi}|f|^2 = 2\pi\|f\|_2^2 \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi}|f'|^2 = 2\pi\|f'\|_2^2.$$

De plus, la formule de Parseval permet d'écrire :

$$\|f\|_2^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty}|c_n(f)|^2 \quad \text{et} \quad \|f'\|_2^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty}|c_n(f')|^2.$$

Or, par hypothèse, $c_0(f) = 0$ et, pour tout n :

$$c_n(f') = \mathrm{i}nc_n(f).$$

D'où le résultat.

L'égalité n'est possible que si, pour tout n :

$$n^2|c_n(f)|^2 = |c_n(f)|^2.$$

Cette condition équivaut à :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad |n| > 1 \Rightarrow c_n(f) = 0.$$

Les fonctions vérifiant l'égalité sont nécessairement de la forme :

$$t \mapsto \lambda e^{\mathrm{i}t} + \mu e^{-\mathrm{i}t},\ \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2.$$

Vérifier que toutes conviennent.

14 La fonction $x \mapsto |\sin x|$ est continue, paire, π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Elle est donc la somme de sa série de Fourier.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_1^{\infty}\frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1}.$$

Cherchons une solution f paire, somme de sa série de Fourier. On suppose donc qu'il existe une suite (a_n) telle que la série $\sum a_n \cos(2nx)$ converge. Soit f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} a_n \cos(2nx).$$

Supposons de plus cette fonction solution de l'équation différentielle. Elle est donc deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, on a $f''(x) = |\sin x| - f(x)$. Ceci entraîne que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
On suppose enfin que les dérivées de f s'obtiennent en dérivant terme à terme la série.
Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = -\sum_1^{\infty} 4n^2 a_n \cos(2nx).$$

La fonction f est donc solution de l'équation différentielle si, et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_1^{\infty}\frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1} = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} a_n(1 - 4n^2)\cos(2nx)$$

On prend $\frac{a_0}{2} = \frac{2}{\pi}$ et, pour tout $n > 0$, $a_n = \frac{4}{\pi}\frac{1}{(4n^2 - 1)^2}$.
On vérifie que la série de fonctions :

$$\sum \frac{4}{\pi}\frac{1}{(4n^2 - 1)^2}\cos(2nx)$$

est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, ainsi que les séries dérivées terme à terme d'ordre 1 et 2. Les hypothèses émises sur f sont donc justifiées *a posteriori*.
Les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions :

$$x \mapsto a\cos x + b\sin x + \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_1^{\infty}\frac{1}{(4n^2 - 1)^2}\cos(2nx)$$

avec a et b deux constantes.

15 **1)** La fonction f est définie, continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.
Le calcul direct des coefficients de Fourier serait fort malaisé, à cause des intégrales. Procédons différemment.
Tout d'abord :

$$\frac{1}{\operatorname{ch} a+\cos x}=\frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}}{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}+\mathrm{e}^{a})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}+\mathrm{e}^{-a})}.$$

On pose $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}=u$ pour réduire en éléments simples.
D'où :

$$\frac{1}{\operatorname{ch} a+\cos x}=\frac{1}{\operatorname{sh} a}\left(\frac{1}{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x-a}}-\frac{\mathrm{e}^{-a-\mathrm{i}x}}{1+\mathrm{e}^{-a-\mathrm{i}x}}\right).$$

Avec $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x-a}|=\mathrm{e}^{-a}<1$ et $|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x-a}|=\mathrm{e}^{-a}<1$, on peut utiliser le développement en série entière de $\dfrac{1}{1+v}$, pour $|v|<1$, et on écrit :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\operatorname{ch} a+\cos x}&=\frac{1}{\operatorname{sh} a}\left(\sum_0^\infty(-1)^n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x-a})^n-\sum_0^\infty(-1)^n(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x-a})^{n+1}\right)\\&=\frac{1}{\operatorname{sh} a}\left(1+2\sum_1^\infty(-1)^n\mathrm{e}^{-na}\cos(nx)\right).\end{aligned}$$

2) Mais, si cette expression « ressemble » à une série de Fourier, rien ne prouve pour l'instant qu'il s'agisse effectivement de la série de Fourier de f, car elle n'a pas été obtenue par le calcul des coefficients de Fourier de f.
Pourtant, si l'on considère la série de fonctions :

$$\frac{1}{\operatorname{sh} a}\left(1+2\sum(-1)^n\mathrm{e}^{-na}\cos(nx)\right)$$

on a : $\forall x\in\mathbb{R}\quad |(-1)^n\mathrm{e}^{-na}\cos(nx)|\leqslant \mathrm{e}^{-na}$ et la série géométrique de terme général $(\mathrm{e}^{-a})^n$ converge, donc la série de fonctions converge normalement sur $\mathbb{R}$. Elle est donc la série de Fourier de sa somme $f(x)=\dfrac{1}{\operatorname{ch} a+\cos x}$.

3) On en déduit : $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(nx)}{\operatorname{ch} a+\cos x}\,\mathrm{d}x=\pi a_n(f)$

Si $n=0$: $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch} a+\cos x}=\frac{2\pi}{\operatorname{sh} a}$.

Si $n\neq 0$: $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(nx)}{\operatorname{ch} a+\cos x}\,\mathrm{d}x=\frac{2\pi(-1)^n\mathrm{e}^{-na}}{\operatorname{sh} a}$.

16 • Avant même la recherche des solutions, on peut remarquer que la fonction sinus convient et que toute combinaison linéaire de solutions est solution. L'ensemble des solutions est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, de dimension supérieure ou égale à 1.
• Soit f une solution. Puisque f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et 2π-périodique, f est la somme de sa série de Fourier qui converge normalement sur $\mathbb{R}$.
Donc, pour tout x réel :

$$f(x)=c_0(f)+\sum_1^\infty\left(c_n(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nx}+c_{-n}(f)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\right).$$

On en déduit que :

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f(2x)=c_0(f)+\sum_1^\infty\left(c_n(f)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}nx}+c_{-n}(f)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}nx}\right).$$

De plus, f' est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ et 2π-périodique, donc f' est aussi la somme de sa série de Fourier qui converge normalement sur $\mathbb{R}$.
On sait que $c_n(f')=(\mathrm{i}n)c_n(f)$.
D'où $c_0(f')=0$ et :

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=\sum_1^\infty(\mathrm{i}n)\left(c_n(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nx}-c_{-n}(f)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\right).$$

Donc :
$\forall x\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}2\sin x f'(x)&=2\sin x\sum_1^\infty(\mathrm{i}\,n)\left(c_n(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nx}-c_{-n}(f)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,nx}\right)\\&=(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})\sum_1^\infty n\left(c_n(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nx}-c_{-n}(f)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\right)\\&=\sum_1^\infty n\left(c_n(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(n+1)x}-c_{-n}(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(1-n)x}\right.\\&\qquad\left.-c_n(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(n-1)x}+c_{-n}(f)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+1)x}\right).\end{aligned}$$

Et finalement :
$\forall x\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}c_0(f)+\sum_1^\infty\left(c_n(f)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}nx}+c_{-n}(f)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}nx}\right)&=\sum_1^\infty n\left(c_n(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(n+1)x}-c_{-n}(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(1-n)x}\right.\\&\qquad\left.-c_n(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(n-1)x}+c_{-n}(f)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+1)x}\right).\end{aligned}$$

Ceci traduit l'égalité, pour tout x réel, de $f(2x)$ et $2\sin x\, f'(x)$.
De plus, puisque f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, pour tout $k\geqslant 2$, et pour tout n de $\mathbb{Z}$:

$$|c_n(f)|=o\left(\left|\frac{1}{n}\right|^k\right),$$

donc les deux séries trigonométriques ci-dessus sont normalement convergentes. Elles sont les séries de Fourier de leurs sommes qui sont des fonctions continues, égales. D'après l'unicité du développement en série de Fourier pour une fonction continue, 2π-périodique, on peut identifier les coefficients et on obtient :

• $c_0(f)=-c_{-1}(f)-c_1(f)$
(coefficient de e^0) ;

• $0=2nc_{2n}(f)-(2n+2)c_{2n+2}(f)$
(coefficient de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(2n+1)x}$) ;

• $0=-(2n+2)c_{-(2n+2)}(f)+2nc_{-2n}(f)$
(coefficient de $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2n+1)x}$) ;

• $c_1(f)=c_1(f)-3c_3(f)$
(coefficient de $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}$) ;

• $c_n(f)=(2n-1)c_{2n-1}(f)-(2n+1)c_{2n+1}(f)$
(coefficient de $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}nx}$) ;

La deuxième relation nous indique que le terme $2\,nc_{2n}(f)$ est constant et la troisième qu'il en est de même de $2\,nc_{-2n}(f)$.
Or, si l'on considère que, pour tout $k \geqslant 2$, et pour tout n de $\mathbb{Z}$:

$$|c_n(f)| = o\left(\left|\frac{1}{n}\right|^k\right).$$

Ceci entraîne que ce produit est nul et donc que, pour n non nul, $c_{2n}(f) = 0$.
La quatrième relation indique que $c_3(f) = 0$.
Par récurrence, le lecteur montrera alors que, pour tout $n \geqslant 1$, $c_{2n+1}(f) = 0$ et $c_{-(2n+1)}(f) = 0$.
En résumé, seuls $c_0(f), c_{-1}(f)$ et $c_1(f)$ sont éventuellement non nuls, et, $c_0(f) = -c_{-1}(f) - c_1(f)$.
On obtient alors :

$$f(x) = c_1(f)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - 1) + c_{-1}(f)(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} - 1).$$

On vérifie que les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \alpha(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - 1) + \beta(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} - 1)$$

sont solutions.
L'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2.

17 Tout d'abord, si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie la relation indiquée, on démontre sans difficulté, par récurrence, que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Elle est donc la somme de sa série de Fourier qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ et il en est de même de sa dérivée f'.
Les fonctions $(x \mapsto f(x+1) - f(x-1))$ et $(x \mapsto \lambda f'(x))$, étant continues et égales, le développement en série de Fourier est unique et :
$\forall n \in \mathbb{Z}$

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t+1)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi nt/T}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{T}\int_0^T f(t-1)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi nt/T}\,\mathrm{d}t = \lambda\frac{1}{T}\int_0^T f'(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi nt/T}\,\mathrm{d}t.$$

Or :

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t+1)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi nt/T}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_1^{T+1} f(u)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi n(u-1)/T}\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi n/T}c_n(f)$$

et, de même :

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t-1)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi nt/T}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi n/T}c_n(f).$$

De plus, $c_n(f') = \dfrac{2\mathrm{i}\pi n}{T}c_n(f)$. Donc finalement :

$$\forall n \in \mathbb{Z}^* \quad 2\mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi n}{T}\right)c_n(f) = \lambda\frac{2\mathrm{i}\pi n}{T}c_n(f).$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{Z}^* \quad c_n(f)\left(\lambda - \frac{\sin\left(\frac{2\pi n}{T}\right)}{\frac{\pi n}{T}}\right) = 0.$$

On introduit alors la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$g(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

La relation précédente s'écrit :

$$\forall n \in \mathbb{Z}^* \quad c_n(f)\left(\lambda - 2g\left(\frac{2\pi n}{T}\right)\right) = 0.$$

Or, la fonction g se prolonge par continuité en 0, tend vers 0 en $+\infty$, donc est bornée sur $\mathbb{R}^+$.
Donc, si λ n'est pas réel ou si $|\lambda|$ est strictement supérieur à $2\sup\limits_{t\in\mathbb{R}^+}|g(t)|$, tous les coefficients $c_n(f)$, pour n dans $\mathbb{Z}^*$, sont nuls et E_λ est l'espace vectoriel des fonctions constantes. Il est donc de dimension 1.
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} g\left(\dfrac{2\pi n}{T}\right) = 0$, donc, à partir d'un certain rang N_0 :

$$\lambda - 2g\left(\frac{2\pi n}{T}\right) \neq 0, \quad \text{soit} \quad c_n(f) = 0.$$

E_λ est un sous-espace vectoriel de P_{N_0}, donc de dimension finie.

Chapitre 10

1 Il s'agit de calculer :

$$I = \int_0^{2\pi}[(y(t) - z(t))x'(t) + (z(t) - x(t))y'(t) + (x(t) - y(t))z'(t)]\,\mathrm{d}t.$$

On obtient :

$$I = -2\pi R(h+R).$$

2 Vérifier qu'en notant :

$$P(x,y,z) = 3x^2y + z^3,\ Q(x,y,z) = 3y^2z + x^3$$

et

$$R(x,y,z) = 3xz^2 + y^3,$$

on a : $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}\ ;\ \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x}\ ;\ \dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y}.$

Ainsi, ω est une forme fermée, donc exacte sur $\mathbb{R}^3$.
On cherche une fonction f telle que :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P\ ;\ \frac{\partial f}{\partial y} = Q\ ;\ \frac{\partial f}{\partial z} = R.$$

Une première condition est :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 3x^2y + z^3.$$

On intègre par rapport à x :

$$f(x,y,z) = x^3y + xz^3 + g(y,z).$$

Le calcul de $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ permet de préciser g.
Finalement :
$f(x,y,z) = x^3y + xz^3 + y^3z + c$, où c est une constante.

3 Soit $\overrightarrow{OM}(\theta) = r(\theta)\overrightarrow{u}(\theta)$.

Puisque $r(\theta + \pi) = -r(\theta)$, on a :

$$\overrightarrow{OM}(\theta + \pi) = \overrightarrow{OM}(\theta).$$

La courbe s'obtient en totalité en effectuant l'étude sur :

$$\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[.$$

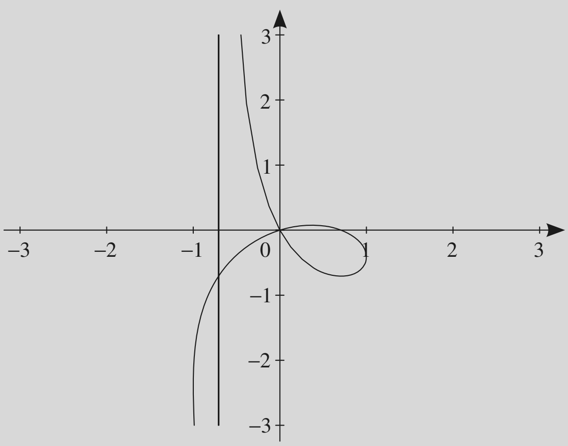
Il y a une direction asymptotique en $\theta = \pm\dfrac{\pi}{2}$.
On cherche donc une asymptote verticale :

$$\lim_{\theta \to \pm\frac{\pi}{2}} x(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Le signe de $x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ donne la position par rapport à l'asymptote.

Avec Maple :

```
> with(plots) :
polarplot(cos(2*t+Pi/4)/cos(t),
t=-Pi/2..Pi/2,view=[-3..3,-3..3]) ;
```



La boucle de la strophoïde est décrite pour θ variant de :

$$-\frac{3\pi}{8} \quad \text{à} \quad \frac{\pi}{8}.$$

Son aire est :

$$A = \int_{-3\pi/8}^{\pi/8} \frac{1}{2} r^2(\theta)\, \mathrm{d}\,\theta.$$

Après calculs, $A = \sqrt{2} + \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}$ unités d'aire.

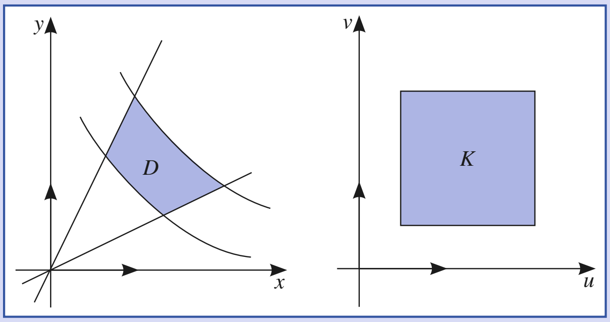
4 On remarque que, pour tout (x, y) de D :

$$\frac{1}{b} \leqslant xy \leqslant b \quad \text{et} \quad \frac{1}{a} \leqslant \frac{y}{x} \leqslant a.$$

Soit $U = \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$, $K = \left[\dfrac{1}{b}, b\right] \times \left[\dfrac{1}{a}, a\right]$, $u = xy$, $v = \dfrac{y}{x}$.

• $\varphi : (x, y) \longmapsto (u, v) = \left(xy, \dfrac{y}{x}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

• Par construction, $\varphi(D) = K$.



• φ est une bijection de U dans U car :

$$u = xy \quad \text{et} \quad v = \frac{y}{x} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{v}{u}} \quad \text{et} \quad y = \sqrt{uv}.$$

• En tout point (x, y) de U, le jacobien de φ est :

$$\frac{\mathrm{D}(u, v)}{\mathrm{D}(x, y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x} \end{vmatrix} = 2\frac{y}{x} = 2v \neq 0.$$

Ceci prouve que φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U dans lui-même.

• La formule d'inversion des matrices donne :

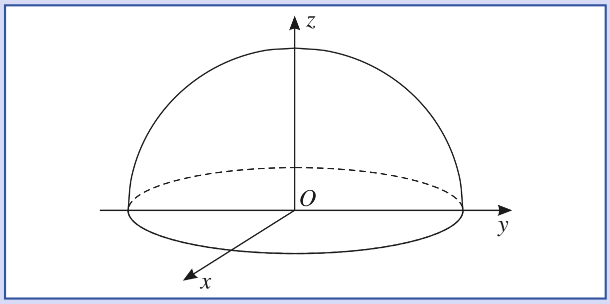
$$\frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(u, v)} = \frac{1}{2v}.$$

• Puisque $\varphi(D) = K$, l'aire de D est :

$$\iint_D \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \iint_K \frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(u, v)}\, \mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v$$

$$= \left(b - \frac{1}{b}\right) \ln(a) \text{ unités d'aire.}$$

5



Par raison de symétrie, le centre de gravité G, de coordonnées (x_G, y_G, z_G) appartient à l'axe (Oz).

$$z_G = \frac{\displaystyle\iiint_K z\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z}{\displaystyle\iiint_K \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z} = \frac{3}{2\pi R^3} \iiint_K z\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z.$$

Utilisons les coordonnées sphériques.

$$\iiint_K z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^R \rho^3\,\mathrm{d}\rho\right)\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi R^4}{4}.$$

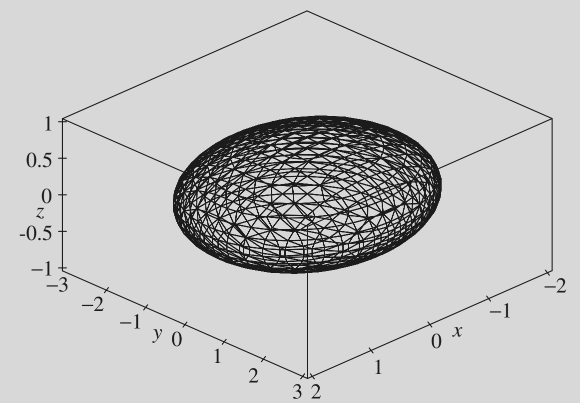
Finalement, la cote de G est : $z_G = \dfrac{3R}{8}$.

6 Reconnaissons un ellipsoïde.
Soit le changement de variable défini par :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v, w) \longmapsto (x, y, z) = (au, bv, cw) \end{cases}$$

Avec Maple :

```
> with(plots) :
implicitplot3d(x^2/3+y^2/5+2*z^2-1,
x=-2..2,y=-3..3,z=-1..1,grid=[20,20,20],
axes=boxed) ;
```



φ définit un automorphisme de $\mathbb{R}^3$, donc un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}^3$. Son jacobien est indépendant de

(u, v, w) : $$\frac{\mathrm{D}(x, y, z)}{\mathrm{D}(u, v, w)} = abc.$$

Le domaine E est l'image par φ de la boule :

$$\mathrm{D} = \{(u, v, w) | u^2 + v^2 + w^2 \leqslant 1\}.$$

Le volume de E est :

$$\iiint_E \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_D abc\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w = \frac{4\pi}{3}abc \text{ unités de volume.}$$

7 **Première méthode**

Par raison de symétrie :

$$\iint_K (x + y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_K x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_K y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$= 2\int_0^1\left(\int_0^{(1-x2)1/2} y\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 (1 - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}.$$

Deuxième méthode

En utilisant les coordonnées polaires.

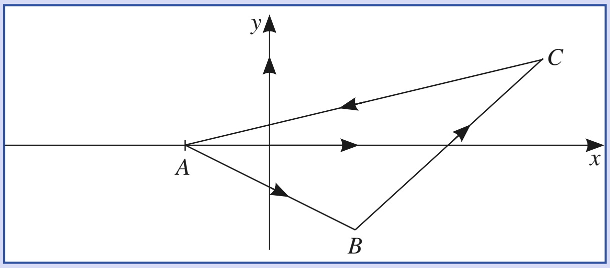
$$\iint_K (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left[\int_0^{\pi/2}(\cos t+\sin t)\,\mathrm{d}t\right]\left(\int_0^1 r^2\,\mathrm{d}r\right) = \frac{2}{3}.$$

Troisième méthode

La formule de Green-Riemann permet d'écrire, en notant D le bord orienté dans le sens positif du domaine K :

$$\iint_K (x + y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_D \left(\frac{x^2}{2} + xy\right)\mathrm{d}y$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{1 - y^2}{2} + y\sqrt{1 - y^2}\right)\mathrm{d}y = \frac{2}{3}.$$

8 Soit K le compact délimité par le triangle, D son bord orienté.



Osons la formule de Green-Riemann pour calculer l'aire du triangle :

$$\iint_K \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_D x\,\mathrm{d}y$$
$$= \int_{-1}^1 x\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x + \int_1^3 x\,\mathrm{d}x + \int_3^{-1} x\left(\frac{1}{4}\right)\mathrm{d}x$$
$$= 3 \text{ unités d'aire.}$$

9 Le *théorème de Cauchy-Lipschitz* s'applique car l'application $(y \longmapsto \mathrm{sh}\, y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

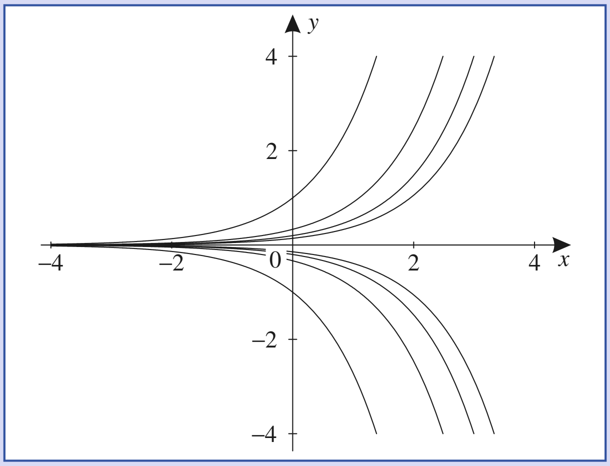
L'application nulle est solution de l'équation différentielle. Donc c'est la seule solution maximale qui s'annule. On cherche les solutions qui ne s'annulent pas.

Une telle solution vérifie $\dfrac{y'}{\mathrm{sh}\, y} = 1$ et :

$$y = 2\mathrm{Argth}\left[\mathrm{th}\,\frac{y_0}{2}\mathrm{e}^{x-x_0}\right].$$

Le domaine de définition de ces fonctions est :

$$\left]-\infty, x_0 - \ln\left|\mathrm{th}\,\frac{y_0}{2}\right|\right[.$$



10 La fonction $\left((x, y) \longmapsto e^{-x^2-y^2}\right)$ est continue et positive, donc :

$$\iint_{C_{a/2}} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy \leqslant \iint_{K_a} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy \leqslant \iint_{C_{a'}} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy.$$

Par passage en coordonnées polaires, on obtient :

$$\pi\left(1 - e^{-a^2/4}\right) \leqslant \left[\int_{-a/2}^{a/2} e^{-x^2}\, dx\right]^2 \leqslant \pi\left(1 - e^{-a^2/2}\right).$$

On fait tendre a vers $+\infty$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

11 **1)** Soit $M(x, y, z)$ un point de $\mathbb{R}^3$.

$$M \in C \Leftrightarrow \exists m \in D \quad M \in [O, m]$$
$$\Leftrightarrow \exists (X, Y) \in D \quad \exists t \in [0,1] \begin{cases} x = tX \\ y = tY \\ z = h(1-t) \end{cases}$$

Ces équations caractérisent un point M du cône K et sont une représentation paramétrique de K.

2) Soit $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (X, Y, t) \longmapsto (x, y, z) = (tX, tY, h(1-t)) \end{cases}$

• La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$.

• Le cône C est l'image par φ du compact :

$$K = \{(X, Y, t) \mid (X, Y) \in D \quad \text{et} \quad t \in [0, 1]\}.$$

• L'ensemble K^0 des points intérieurs à K est :

$$K^0 = \{(X, Y, t) | (X, Y) \in D^0 \quad \text{et} \quad t \in]0, 1[\}.$$

– La restriction de φ à K^0 est injective.

– Le jacobien de φ est : $\dfrac{D(x, y, z)}{D(X, Y, t)} = \begin{vmatrix} t & 0 & X \\ 0 & t & Y \\ 0 & 0 & -h \end{vmatrix} = -ht^2.$

Il ne s'annule pas sur K^0. Donc :

$$\iiint_K dx\, dy\, dz = \int_0^1 ht^2\left(\iint_D dX\, dY\right) dt = \frac{1}{3} h A(D)$$

où $A(D)$ est l'aire de la base du cône.

12 Le *théorème de Cauchy-Lipschitz* s'applique car l'application $(x \longmapsto \sin x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

La fonction sinus s'annule pour $x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, donc les fonctions constantes $(x \longmapsto y(x) = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z}))$ sont des solutions de l'équation.

On cherche les solutions telles que :

$$\forall x \quad y(x) \in]k\pi, (k+1)\pi[\; (k \in \mathbb{Z}).$$

Une telle solution vérifie $y' = \sin y$, soit :

$$\frac{dy}{\sin y} = dx.$$

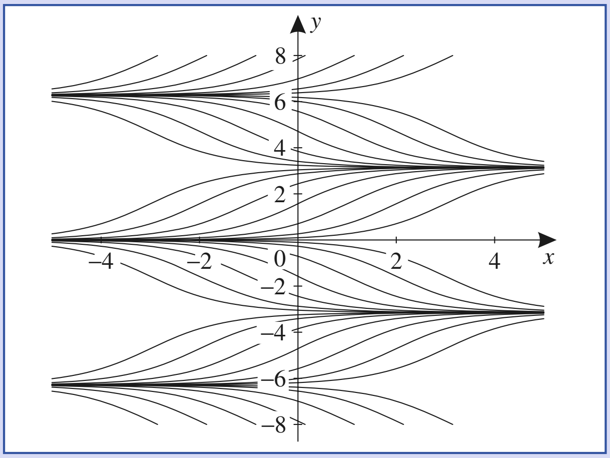
Après intégration :

$$\exists c \in \mathbb{R} \quad \ln\left(\left|\tan \frac{y}{2}\right|\right) = x - c.$$

Puisque $y \in]k\pi, (k+1)\pi[$, $\tan \dfrac{y}{2}$ garde un signe constant.

Pour $k = 2p$, on obtient : $y = k\pi + 2\mathrm{Arctan}\,(e^{x-c})$.

Pour $k = 2p + 1$, on a : $y = (k+1)\pi - 2\mathrm{Arctan}\,(e^{x-c})$.



13 **1)** Soit I le domaine de définition de f et g la fonction définie sur $-I$ par : $g(x) = -f(-x)$.
La fonction g est solution du même problème de Cauchy que f. Donc $g = f, I = -I$ et f est impaire.
2) On suppose que I est borné : $I =]-a, a[$, avec $a \in \mathbb{R}$.
La fonction f est croissante sur I.
Donc :

$$\forall x \geqslant 0 \quad f(x) \geqslant 0.$$

Puis :

$$\forall x \geqslant 0 \quad 0 \leqslant f'(x) \leqslant 1.$$

Intégrons :

$$\forall x \geqslant 0 \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant x.$$

La fonction f est alors croissante et majorée sur I. Elle admet un prolongement par continuité en a. La fonction prolongée est $\mathcal{C}^1$ et est solution de l'équation, ce qui contredit le fait que f est une solution maximale. Donc I n'est pas borné, $I = \mathbb{R}$.
3) Puisque la fonction f est strictement croissante, on peut écrire :

$$\forall x \geqslant 1 \quad 0 < f'(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x\, f(1)}.$$

Or $f(1) > 0$, donc f' est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et :

$$\lim f(x) = l \in \mathbb{R}.$$

De plus : $\forall x \geqslant 0 \quad f(x) < l \quad$ et : $\quad \forall x \geqslant 0 \quad f'(x) > \mathrm{e}^{-xl}$.
Ainsi :

$$\int_0^{\infty} f'(x)\,\mathrm{d}x = \ell > \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-xl}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{l} \quad \text{et} \quad \ell > 1.$$

D'après le *théorème des valeurs intermédiaires* :

$$\exists a \in \mathbb{R}^{+*}\ f(a) = 1$$

Ainsi : $\displaystyle\int_a^{\infty} f'(x)\,\mathrm{d}x = \ell - 1 < \int_a^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{e}$.
D'où $\ell < 1 + \dfrac{1}{e}$.

14 La fonction y est solution de $y'' = -\dfrac{\omega^2}{my^2}$.
Multiplions les deux membres de l'équation différentielle par $2y'$.
On a : $2y'y'' = -2\dfrac{\omega^2}{my^2}y'$ donc $y'^2 = y_0'^2 + 2\dfrac{\omega^2}{m}\left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{y_0}\right)$.
Traitons le cas $y_0' > 0$. Il y a deux possibilités.

• $y_0'^2 - 2\dfrac{\omega^2}{m}\dfrac{1}{y_0} \geqslant 0$.

Dans ce cas, la fonction y' est toujours positive et :

$$y' = \sqrt{y_0'^2 + 2\frac{\omega^2}{m}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right)}.$$

On en déduit :

$$t = \int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{y_0'^2 + 2\frac{\omega^2}{m}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{y_0}\right)}}.$$

La solution maximale est donc définie sur $\mathbb{R}^+$. Le point M s'éloigne sur le demi-axe (Oy) lorsque le temps t tend vers $+\infty$.

• $y_0'^2 - 2\dfrac{\omega^2}{m}\dfrac{1}{y_0} < 0$.

La vitesse y' s'annule, à l'instant t_1, lorsque :

$$y_1 = 2\frac{\omega^2}{m}\frac{1}{2\frac{\omega^2}{m}\frac{1}{y_0}} - y_0'^2.$$

On a :

$$t_1 = \int_{y_0}^{y} 1\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{y_0'^2 + 2\frac{\omega^2}{m}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{y_0}\right)}}.$$

L'abscisse du point mobile croît de y_0 à y_1 lorsque t croît de 0 à t_1, sa vitesse est alors positive. Puis le point rebrousse chemin. Son abscisse décroît, sa vitesse est négative.
L'abscisse du point M décroît de y_1 à 0. Elle tend vers 0 lorsque t tend vers t_2 défini par :

$$t - t_2 = \int_{y_0}^{y1} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{y_0'^2 + 2\frac{\omega^2}{m}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{y_0}\right)}}.$$

Toutefois, lorsque t tend vers t_2, la vitesse du point M tend vers $-\infty$. La solution ne peut être prolongée au-delà de t_2. La solution maximale est alors définie sur $[0, t_2[$.

15 **1)** L'application $((t, x) \longmapsto \sin(tx))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Le *théorème de Cauchy-Lipschitz* s'applique. Pour tout couple (t_0, x_0) de réels, il existe une unique solution maximale φ de l'équation différentielle telle que : $\varphi(t_0) = x_0$. De plus, cette application φ est définie sur un intervalle $I =]b, a[$ et vérifie :

$$\forall t \in I \quad |\varphi'(t)| \leqslant 1.$$

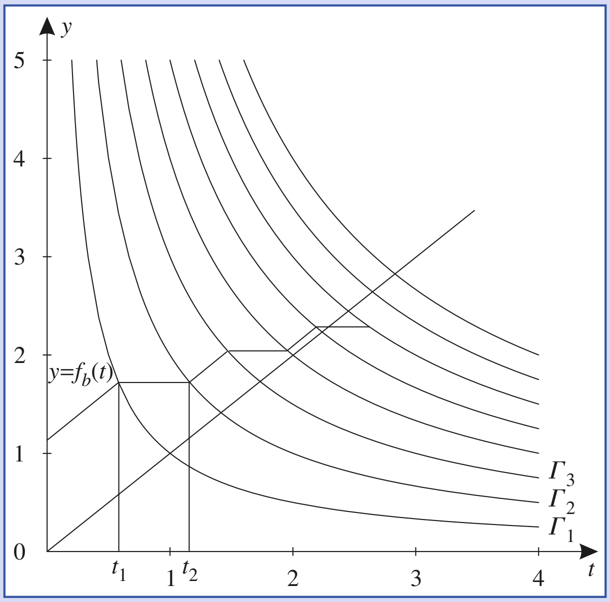
On suppose que $a \in \mathbb{R}$.
La fonction φ' est intégrable sur $[t_0, a[$. Donc, φ admet une limite réelle en a. Prolongée par continuité, elle est aussi dérivable à gauche en a et $\varphi'(a) = \sin(a\varphi(a))$. Ceci contredit le fait que φ est maximale.
On a prouvé par l'absurde que $a = +\infty$.
On montre de même que $b = -\infty$ et ainsi $I = \mathbb{R}$.

2) On pose : $y_b(t) = x_b(-t)$.
La fonction y_b est définie sur $\mathbb{R}$, elle vérifie l'équation différentielle et $y_b(0) = b$. Donc, $y_b = x_b$. La fonction x_b est paire.
De plus, la fonction $-x_b$ est solution du même problème de Cauchy que x_{-b}. D'où :

$$x_{-b} = -x_b.$$

3) On suppose qu'il existe un réel t_0 tel que : $x_b(t_0) = 0$. La fonction nulle est solution de l'équation différentielle. D'après l'unicité dans le *théorème de Cauchy-Lipschitz*, on sait que x_b est l'application nulle. Ceci est faux, donc x_b est à valeurs strictement positives.

4)



On note $I = \{t \geqslant 0 ; \forall u \in [0,t] \quad x_b(u) \leqslant f_b(u)\}$.
On sait que $x_b(0) = f_b(0) = b$ et que $x_b'(0) = 0$ et $f_b'(0) = 1$.
Il existe donc $\delta > 0$ tel que : $[0,\delta] \subset I$. Supposons I majoré et notons $\theta = \sup I$. La continuité des fonctions x_b et f_b entraîne que θ est dans I et :

$$x_b(\theta) \leqslant f_b(\theta).$$

Or l'application f_b est dérivable à droite en tout point et :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad f_b'(t^+) \geqslant \sin(t f_b(t)).$$

Plus précisément :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \setminus 2\pi\mathbb{Z} \quad f_b'(t^+) > \sin(t f_b(t)).$$

Il existe donc un voisinage à droite de θ sur lequel :

$$x_b'(t) < f_b'(t).$$

Ce voisinage est contenu dans I et $I = \mathbb{R}$.

5) On appelle, pour k dans $\mathbb{N}$, (t_k, y_k) les coordonnées du point d'intersection du graphe de la fonction f_b avec Γ_k et φ la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\varphi(t) = f_b(t) - t.$$

Alors $t_1 y_1 = \pi$, $y_2 = y_1$, $t_2 y_2 = 2\pi$. Donc, $t_2 = 2t_1$.
On montre de même que, pour tout entier k impair :

$$t_{k+1} = \left(1 + \frac{1}{k}\right) t_k$$

et

$$\varphi(t_{k+1}) = y_{k+1} - t_{k+1} = y_k - t_k - \frac{1}{k} t_k = \varphi(t_k) - \frac{1}{k} t_k.$$

Que se passe-t-il si k est pair ?

$$\begin{aligned}\varphi(t_{k+1}) &= y_{k+1} - t_{k+1} \\ &= [y_k + (t_{k+1} - t_k)] - t_{k+1} = y_k - t_k = \varphi(t_k).\end{aligned}$$

En définitive, pour tout entier naturel j :

$$\begin{cases} \varphi(t_{2j+2}) - \varphi(t_{2j+1}) = -\dfrac{1}{2j+1} t_{2j+1} \\ \varphi(t_{2j+1}) - \varphi(t_{2j}) = 0 \end{cases}$$

On additionne ces expressions :

$$\varphi(t_{2j+2}) - \varphi(t_{2j}) = -\frac{1}{2j+1} t_{2j+1} < -\frac{1}{2j+1} t_1.$$

D'où :

$$\varphi(t_{2n+2}) < -\left(\sum_0^n \frac{1}{2j+1}\right) t_1 + b.$$

Or la série $\sum \dfrac{1}{2j+1}$ diverge et $\varphi(0) > 0$.

Il existe donc $u > 0$ tel que : $f_b(u) = 0$.

D'après la question **4)**, on en déduit qu'il existe $t_0 > 0$ tel que :

$$x_b(t_0) = t_0.$$

On considère la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\psi(t) = x_b(t) - t.$$

Elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$. En effet, les points tels que : $x_b'(t) = 1$ sont des points isolés.

Index

H Prépa *La collection de référence des classes préparatoires scientifiques*

Analyse

2e année PC-PC* PSI-PSI*

1. Séries numériques
2. Espaces vectoriels normés
3. Continuité
4. Suites et séries de fonctions
5. Dérivation, intégration des fonctions vectorielles
6. Lien entre dérivation et intégration
7. Fonctions intégrables
8. Séries entières
9. Séries de Fourier
10. Calcul différentiel

I.S.B.N. 978-2-01-181903-1

HACHETTE Supérieur