Nombres et calculs - notion : équations, inéquations et systèmes

1. Equations et inéquations du premier degré à une inconnue :

a) Equation du premier degré à une inconnue

Il s'agit d'équations qui peuvent être mises sous la forme $a\,x = b$

- Si $a \neq 0$, l'équation ne possède qu'une solution : $x = \frac{b}{a}$
- Si $a = 0$ et $b \neq 0$, l'équation n'a pas de solution
- Si $a = 0$ et $b = 0$, tout réel est solution de l'équation

b) Inéquation du premier degré à une inconnue

Il s'agit d'inéquations qui peuvent être mises sous la forme $a\,x < b$

- On <u>ne change pas</u> le sens de l'inégalité en <u>additionnant</u> ou en <u>soustrayant</u> un même nombre à ses deux membres.
- On <u>ne change pas</u> le sens de l'inégalité en <u>multipliant</u> ou en <u>divisant</u> ses deux membres par un <u>nombre supérieur à 0</u>.
- On <u>change</u> le sens de l'inégalité en <u>multipliant</u> ou en <u>divisant</u> ses deux membres par un même <u>nombre inférieur à 0</u>.

2. Equations du second degré

Propriété

Un produit de facteurs est nul si et seulement si au moins un des facteurs est nul.

> Exemple :
>
> Résoudre $(3x + 1)(2x - 5) = (x + 6)(3x + 1)$
>
> $(3x + 1)(2x - 5) - (x + 6)(3x + 1) = 0$
>
> $(3x + 1)(2x - 5 - x - 6) = 0$
>
> $(3x + 1)(x - 11) = 0$
>
> $3x + 1 = 0$ ou $x - 11 = 0$
>
> $S = \left\{ -\frac{1}{3} \,;\, 11 \right\}$

Formules de résolution d'une équation du second degré

Si *a* est un réel non nul, si *b* et *c* sont des réels :

Pour résoudre $ax^2 + bx + c = 0$, on nomme $\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta < 0$, il n'y a pas de solution dans $\mathbb{R}$
- Si $\Delta = 0$, il y a une solution dans $\mathbb{R}$ qui est donnée par : $x = \frac{-b}{2a}$
- Si $\Delta > 0$, il y a deux solutions dans $\mathbb{R}$ qui sont données par :

$$X_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad X_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

3. Système de deux équations du premier degré à deux inconnues.

Il s'agit d'équations qui peuvent être mises sous la forme :

$$\begin{cases} a\,x + b\,y = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Pour des valeurs données de a, a', b, b', c et c' ; on cherche les couples (x ; y) qui sont simultanément solutions des deux équations.

Résolution par combinaison :

$$\begin{cases} 5\,x - 4\,y = 8 \\ 2\,x + 5\,y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5 \times (5\,x - 4\,y) = 8 \times 5 \\ 4 \times (2\,x + 5\,y) = 1 \times 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25\,x - 20\,y = 40 \\ 8\,x + 20\,y = 4 \end{cases}$$

$25\,x + 8\,x = 40 + 4$

$33\,x = 44$

$x = \dfrac{44}{33}$

$x = \dfrac{4}{3}$

$5 \times \dfrac{4}{3} - 4\,y = 8$

$\dfrac{20}{3} - 4\,y = 8$

$-4\,y = \dfrac{4}{3}$

$y = -\dfrac{1}{3}$

Donc le couple $\left(\dfrac{4}{3}\,;\,-\dfrac{1}{3}\right)$ est solution de ce système.

Résolution par substitution

$$\begin{cases} -3\,x + y = 9 \\ 4\,x - 3\,y = -17 \end{cases}$$

$y = 9 + 3\,x$

$4\,x - 3\,(9 + 3\,x) = -17$

$4\,x - 27 - 9\,x = -17$

$-5\,x = 10$

$x = -2$

$y = 9 + 3 \times (-2)$

$y = 9 - 6$

$y = 3$

Le couple (-2 ; 3) est solution de ce système.