

# Géométrie - notion : Angles, cercles, triangles ...

## 1. Angles

### a) Vocabulaire

**Angle nul :** L'angle nul est formé par deux demi-droites identiques et donc de même origine.

**Angle plat :** Un angle est plat si les deux demi-droites côtés de l'angle, forme une droite et ne sont pas égales.

**Angle droit :** L'angle droit mesure  $90^\circ$

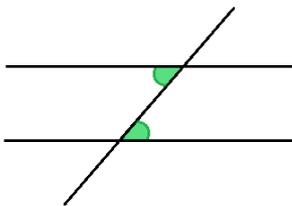
**Angles complémentaires :** deux angles sont complémentaires lorsque leur somme est égale à l'angle droit.

**Angle supplémentaires :** deux angles sont supplémentaires lorsque leur somme est égale à l'angle plat.

**Angle aigu :** un angle géométrique est aigu s'il est plus petit que l'angle droit.

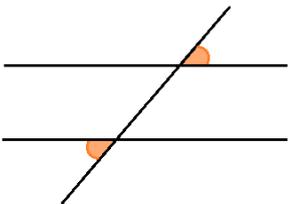
**Angle obtus :** un angle géométrique est obtus s'il est plus grand que l'angle droit et plus petit que l'angle plat.

### Angles alternes-internes :



- Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors elles forment des angles alternes-internes de même mesure.
- Réciproquement, si deux droites coupées par une sécante forment des angles alternes-internes de même mesure, alors ces deux droites sont parallèles.

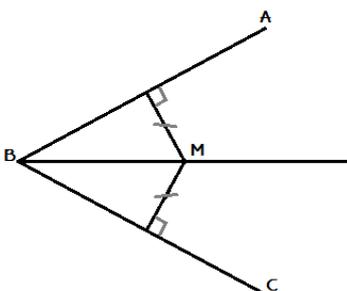
### Angles alternes-externes :



- Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors elles forment des angles alternes-externes de même mesure.
- Réciproquement, si deux droites coupées par une sécante forment des angles alternes-externes de même mesure, alors ces deux droites sont parallèles.

### b) Bissectrice

La bissectrice d'un angle géométrique est la demi-droite qui partage cet angle en deux angles adjacents entre eux.



#### Propriétés :

Si un point M appartient à la bissectrice d'un angle  $\widehat{ABC}$  alors il est équidistant des demi-droites côtés de cet angle

#### Réciproquement :

Si un point, situé dans le secteur angulaire entre les demi-droites côtés d'un angle saillant, est équidistant des côtés de l'angle alors il appartient à la bissectrice de cet angle.

## 2. Cercles et disques

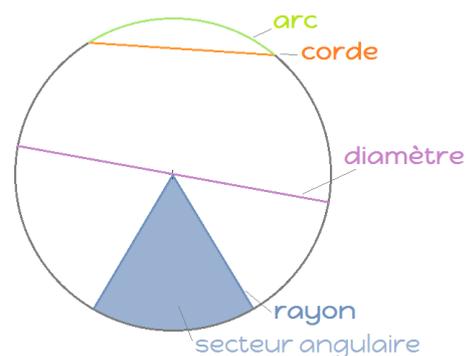
### a) Définitions

Un **cercle** est l'ensemble des points équidistants d'un point donné appelé **centre** de ce cercle.

L'ensemble des points situés à une distance inférieure ou égale à  $R$  d'un point  $O$  donné est le **disque** de centre  $O$  et de rayon  $R$ .

Un segment qui joint deux points d'un cercle est appelé **corde** de ce cercle.

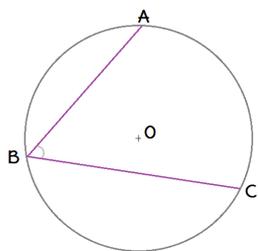
Un **diamètre** d'un cercle est une corde qui passe par le centre de ce cercle.



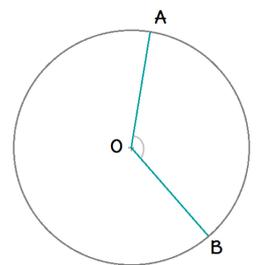
### b) Angle inscrit et angle au centre

Un angle inscrit dans un cercle est un angle dont le sommet est sur le cercle et les côtés sont les cordes issues de ce sommet.

Un angle au centre est un angle qui a pour sommet le centre de ce cercle.



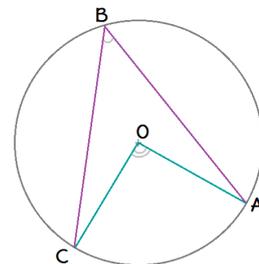
L'angle inscrit  $\widehat{ABC}$  intercepte l'arc  $\widehat{AC}$ .



L'angle au centre  $\widehat{AOB}$  intercepte l'arc  $\widehat{AB}$ .

### Propriétés :

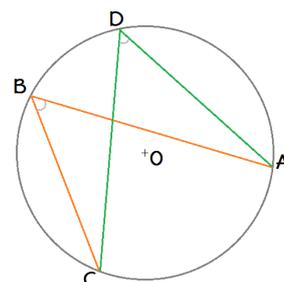
Dans un cercle, l'angle au centre a une mesure égale au double de celle d'un angle inscrit interceptant le même arc.



Si deux angles sont inscrits dans le même cercle et s'ils interceptent le même arc de, alors ils ont la même mesure.

Les angles  $\widehat{ABC}$  et  $\widehat{ADC}$  sont inscrits dans le même cercle. Ils interceptent tous les deux l'arc  $\widehat{AC}$ .

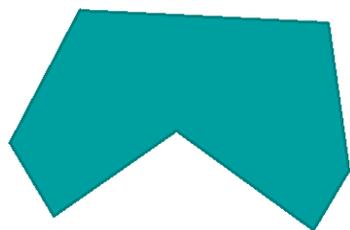
Donc les angles  $\widehat{ABC}$  et  $\widehat{ADC}$  ont la même mesure.



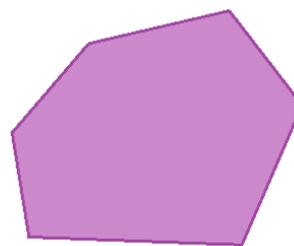
### 3. Polygones

#### a) Définition

Un polygone est une figure géométrique plane définie par une ligne brisée fermée.



Polygone non convexe



Polygone convexe

#### b) Polygones réguliers

Un polygone est **régulier** si tous ses côtés ont même longueur et si les angles au sommet sont égaux.

Un **triangle équilatéral** est le seul polygone régulier à trois côtés.

Un **carré** est le seul polygone régulier à quatre côtés.

Au-delà de quatre côtés, les polygones réguliers n'ont pas de désignation particulière, on parle alors :

- de pentagone régulier,
- d'hexagone régulier,
- d'heptagone régulier,
- d'octogone régulier ...

### 4. Triangles

#### a) Généralités

La somme des angles d'un triangle est égale à **180°**.

Dans un triangle, la longueur de n'importe quel côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés.

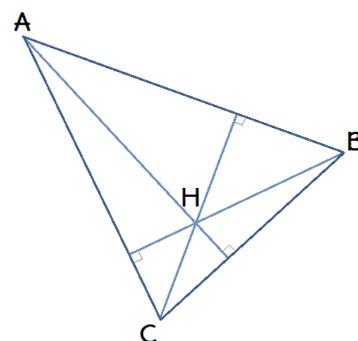
#### b) Droites et points remarquables dans le triangle

##### • Les trois hauteurs d'un triangle

Dans un triangle, on appelle **hauteur** une droite qui passe par un sommet du triangle et qui est perpendiculaire au côté opposé à ce sommet.

Théorème :

Dans un triangle quelconque, les trois hauteurs sont sécantes en un unique point appelé l'**orthocentre** du triangle.



- Les trois médianes d'un triangle

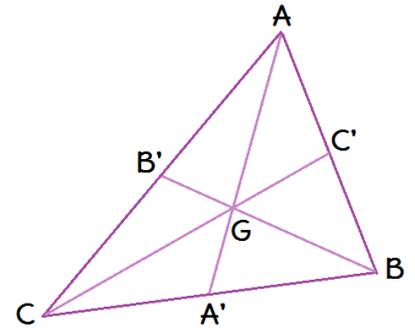
Dans un triangle, on appelle **médiane** la droite qui joint un sommet du triangle au milieu du côté opposé à ce sommet.

Théorème :

Dans un triangle quelconque, les trois médianes sont sécantes en un unique point appelé le **centre de gravité du triangle**.

Le centre de gravité est situé aux deux tiers de chaque médiane à partir du sommet.

$$AG = \frac{2}{3} AA' ; BG = \frac{2}{3} BB' \text{ et } CG = \frac{2}{3} CC'$$



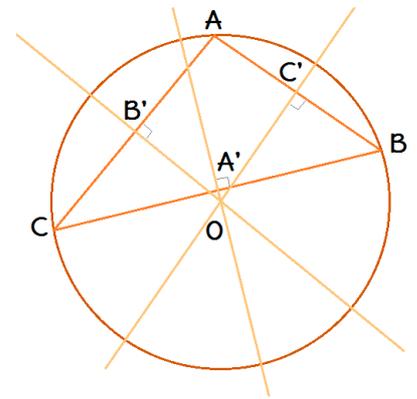
- Les trois médiatrices d'un triangle

La **médiatrice** d'un segment est la droite qui passe par le milieu du segment perpendiculairement à ce segment.

Théorème :

Dans un triangle quelconque, les trois médiatrices sont sécantes en un unique point appelé le **centre du cercle circonscrit**.

O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.



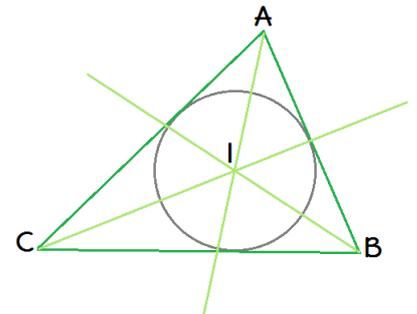
- Les trois bissectrices d'un triangle

La **bissectrice** d'un angle est la demi-droite qui le partage en deux angles égaux

Théorème :

Dans un triangle quelconque, les trois bissectrices sont sécantes en un unique point appelé le **centre du cercle inscrit**.

I est le centre du cercle inscrit au triangle ABC.



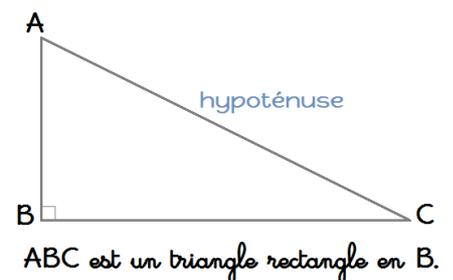
### c) Triangles particuliers

- Le triangle rectangle

Définition :

Un **triangle rectangle** est un triangle qui a un angle droit. On indique en quel sommet le triangle est droit.

Le côté opposé à ce sommet est appelé **hypoténuse** signifiant en grec « se tenant sous ».



### Propriétés :

L'**hypoténuse** d'un triangle rectangle est le plus long des côtés.

Tout triangle rectangle est inscrit dans un cercle dont un des diamètres est l'hypoténuse.

Dans un triangle rectangle, la longueur de la médiane issue de l'angle droit est égale à la moitié de la longueur de l'hypoténuse.

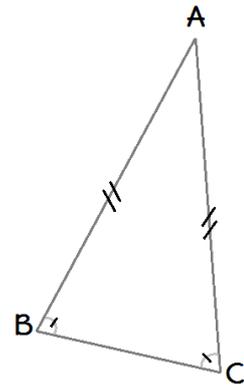
L'orthocentre est le sommet où l'angle est droit.

- **Le triangle isocèle**

#### Définition :

Un **triangle isocèle** est un triangle qui a deux côtés de même longueur.

On indique en quel sommet le triangle est isocèle, sommet appelé **sommet principal**, le côté opposé au sommet principal est appelé **base** du triangle isocèle.



ABC est un triangle isocèle en A.

#### Propriétés :

Dans un triangle isocèle, **les angles adjacents à la base sont égaux**.

Un triangle isocèle en A possède un axe de symétrie, c'est la médiatrice du côté opposé au sommet A.

- **Le triangle équilatéral**

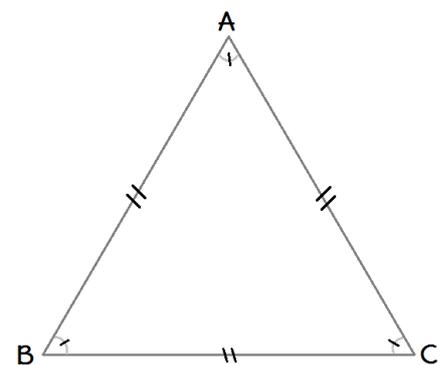
#### Définition :

Un **triangle équilatéral** est un triangle qui a trois côtés de même longueur.

#### Propriétés :

Dans un triangle équilatéral, **tous les angles sont égaux à  $60^\circ$** .

Un triangle équilatéral possède trois axes de symétrie, ce sont les médiatrices des côtés.



ABC est un triangle équilatéral.

Les droites particulières relatives à chacun des sommets sont confondues. Les points particuliers (centre des cercles circonscrit et inscrit, centre de gravité et orthocentre) sont confondus.

## 5. Les quadrilatères

### a) Définitions

Un quadrilatère non croisé est un **trapèze** s'il a deux côtés parallèles, appelés bases.

Un quadrilatère est un **parallélogramme** s'il a des côtés opposés parallèles deux à deux.

Un quadrilatère est un **losange** s'il a quatre côtés de même longueur.

Un quadrilatère est un **rectangle** s'il a trois angles droits (et dans ce cas il en a nécessairement un quatrième).

Un quadrilatère est un **carré** si c'est à la fois un rectangle et un losange.

### Trapèzes particuliers :

Un trapèze est un **trapèze rectangle** s'il possède un angle droit (et dans ce cas il possède nécessairement deux angles droits).

Un trapèze est **isocèle** si ses deux bases ont même médiatrice, laquelle est alors un axe de symétrie du trapèze.

### b) Démonstrations

#### Montrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme

Un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si :

- Il a deux paires de côtés opposés parallèles ;
- Ou bien, il est non croisé et il a une paire de côtés opposés parallèles et de même longueur ;
- Ou bien, il est non croisé et il a deux paires de côtés opposés de même longueur ;
- Ou bien, ses diagonales se coupent en leur milieu.

#### Montrer qu'un quadrilatère est un rectangle

Un quadrilatère est un rectangle si et seulement si :

- Il a trois angles droits ;
- Ou bien, c'est un parallélogramme et ses diagonales ont même longueur ;
- Ou bien, c'est un parallélogramme et il a un angle droit ;
- Ou bien, c'est un quadrilatère qui a ses diagonales de même longueur et qui se coupent en leur milieu ;
- Ou bien il est inscrit dans un cercle, ses diagonales étant des diamètres du cercle.

#### Montrer qu'un quadrilatère est un losange

Un quadrilatère est un losange si et seulement si :

- Il a quatre côtés de même longueur ;
- Ou bien, c'est un parallélogramme et ses diagonales sont perpendiculaires ;
- Ou bien, c'est un parallélogramme et il a deux côtés adjacents de même longueur ;
- Ou bien, c'est un quadrilatère et ses diagonales sont perpendiculaires et qui se coupent en leur milieu.

## Montrer qu'un quadrilatère est un carré

Un quadrilatère est un carré si et seulement si :

- Il est à la fois losange et rectangle ;
- Ou bien, c'est un losange ayant un angle droit ;
- Ou bien, c'est un losange et ses diagonales ont même longueur ;
- Ou bien, c'est un rectangle et il a deux côtés adjacents de même longueur ;
- Ou bien, c'est un rectangle et ses diagonales sont perpendiculaires ;
- Ou bien, c'est un parallélogramme et ses diagonales sont perpendiculaires et de même longueur ;
- Ou bien, c'est un quadrilatère et ses diagonales sont de même longueur, perpendiculaires et se coupent en leur milieu.