Equations et Inéquations du $1^{ére}$ degré à une inconnue

IV) *Equations du $1^{ére}$ degré à une inconnue :*

1) ***Définitions :***

On appelle équation du ***$1^{ére}$ degré à une inconnue x, toute égalité de la forme a x + b = 0***

Avec $a \in IR^*$ et $b \in IR$

Exemple : *$-2x + 5 = 7$ est une équation du* ***$1^{ére}$ degré à une inconnue x.***

2) ***Egalités et opérations :***

$a \in IR$, $b \in IR$ et $c \in IR^*$ *on a :*

- $a = b$ *équivaut à* $a + c = b + c$ (1)
- $a = b$ *équivaut à* $a - c = b - c$ (2)
- $a = b$ *équivaut à* $a\,c = b\,c$ (3)
- $a = b$ *équivaut à* $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ (4)
- $ab = 0$ *équivaut à* $a = 0$ ou $b = 0$ (5)

3) ***Résolution de l'équation du $1^{ére}$ degré à une inconnue :***

- *Résoudre une équation du $1^{ére}$ degré à une inconnue x, c'est trouver toutes les valeurs que l'on peut donner à x pour que l'égalité soit juste.*

a) ***Equation du type a + x = b :***

- ***$a + x = b$*** *équivaut à* $a + x - a = b - a$ *équivaut à* ***$x = b - a$ donc $S_{IR} = \{b - a\}$***

Retenons :

L'équation du type ***$a + x = b$ admet une solution unique $x = b - a$ donc $S_{IR} = \{b - a\}$***

Exemples:

$2 + x = 9$ *équivaut à* $2 + x - 2 = 9 - 2$ *équivaut à* $x = 7$ ***. On vérifie :*** $2 + 7 = 9$

Conclusion : L'équation $2 + x = 9$ a une seule solution : 7 donc $S_{IR} = \{7\}$

- $-6 + x = 4$ *équivaut à* $-6 + x + 6 = 4 + 6$ *équivaut à* $x = 10$ ***donc $S_{IR} = \{10\}$***

b) ***Equation du type a x + b = 0 :***

$1^{ére}$ Cas : (Si ***$a \neq 0$***)

- ***Soient $a \in IR^*$ et $b \in IR$ $ax + b = 0$*** *équivaut à* $a\,x + b - b = 0 - b$ *équivaut à* ***$a\,x = -b$ $(a \neq 0)$***

  équivaut à $a\,x \times \frac{1}{a} = -b \times \frac{1}{a}$ *équivaut à* $x = -\frac{b}{a}$ ***. On vérifie :*** $a \times -\frac{b}{a} + b = -b + b = 0$

Conclusion : L'équation $a\,x + b = 0$ admet une solution unique : $x = -\frac{b}{a}$ ***donc $S_{IR} = \{-\frac{b}{a}\}$***

Retenons :

.

Soit $a \in IR^*$ et $b \in IR$ *L'équation du type* ***$a\,x + b = 0$ admet une solution unique $x = -\frac{b}{a}$ donc $S_{IR} = \{-\frac{b}{a}\}$***

Exemple:

1. ***$3x + 2 = 0$*** *équivaut à* $3x + 2 - 2 = 0 - 2$ *équivaut à* ***$3x = -2$*** *équivaut à* $3x \times \frac{1}{3} = -2 \times \frac{1}{3}$

équivaut à $x = -\frac{2}{3}$ ***. On vérifie :*** $3 \times -\frac{2}{3} + 2 = -2 + 2 = 0$

Conclusion : L'équation $3x + 2 = 0$ admet une solution unique : $x = -\frac{2}{3}$ ***donc $S_{IR} = \{-\frac{2}{3}\}$***

$2^{éme}$ **Cas :** (Si $a = 0$)

- ❖ Si $a=0$ **l'équation** $ax+b=0$ **devient** $0x + b = 0$ équivaut à $0x = -b$
- ▸ Si $b=0$ équivaut à $0x = 0$ **dans ce cas tout nombre réel est solution de l'équation donc** $S_{IR} = IR$
- ▸ Si $b \neq 0$ **dans ce cas** l'équation du type $0x = -b$ **n'a pas de solution donc** $S_{IR} = \varnothing$

Retenons : (**Cas particuliers)**

> ▸ Si $a=0$ **et** $b=0$ **l'équation** $ax+b=0$ **devient** $0x = 0$ **dans ce cas tout nombre réel est solution de l'équation donc** $S_{IR} = IR$
>
> ▸ Si $a=0$ **et** $b \neq 0$ **l'équation** $ax+b=0$ **devient** $0x = -b$ **dans ce cas** l'équation du type $0x = -b$ **n'a pas de solution donc** $S_{IR} = \varnothing$

c) **Equation du type $ax + b = cx + d$:**

❖ **Soient a ,b,c et d des réels tel que** $a - c \neq 0$

$ax + b = cx + d$ équivaut à $ax + b - cx = cx + d - cx$ équivaut à $ax + b - cx = d$ équivaut à à $(a-c)x + b = d$ équivaut à $(a-c)x + b - b = d - b$ équivaut à $(a-c)x = d - b$ $(a - c \neq 0)$ équivaut à $x = \dfrac{d-b}{a-c}$.

Conclusion : L'équation $ax + b = cx + d$ **admet une solution unique :** $x = \dfrac{d-b}{a-c}$ **donc** $S_{IR} = \{\dfrac{d-b}{a-c}\}$

Exemples:

1. $7x + 6 = 3x + 11$ équivaut à $7x + 6 - 3x = 3x + 11 - 3x$ équivaut à à $(7-3)x + 6 = 11$ équivaut à $4x + 6 - 6 = 11 - 6$ équivaut à $4x = 5$ équivaut à $x = \dfrac{5}{4}$.

Conclusion : L'équation $7x + 6 = 3x + 11$ **admet une solution unique :** $x = \dfrac{5}{4}$ **donc** $S_{IR} = \{\dfrac{5}{4}\}$

On vérifie : $x = \dfrac{5}{4}$ $7x + 6 = 7 \times \dfrac{5}{4} + 6 = \dfrac{35}{4} + \dfrac{24}{4} = \dfrac{59}{4}$ et $3x + 11 = 3 \times \dfrac{5}{4} + 11 = \dfrac{15}{4} + \dfrac{44}{4} = \dfrac{59}{4}$

2. $15x + 3\pi = 3(4x + \pi) + 3x$ équivaut à $15x + 3\pi = 12x + 3\pi + 3x$ équivaut à $15x + 3\pi = 15x + 3\pi$ équivaut à $(15-15)x = 3\pi - 3\pi$ équivaut à $0x = 0$ **dans ce cas tout nombre réel est solution de l'équation donc** $S_{IR} = IR$

3. $6x + 2\sqrt{3} = 2(3x + \sqrt{3}) + 3$ équivaut à $6x + 2\sqrt{3} = 6x + 2\sqrt{3} + 3$ équivaut à $6x + 2\sqrt{3} = 6x + 2\sqrt{3} + 3$ équivaut à $(6-6)x = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 3$ équivaut à $0x = 3$ Impossible, **dans ce cas** l'équation **n'a pas de solution donc** $S_{IR} = \varnothing$

V) Résolution de l'équation du type : $x^2 = a$

> **Retenons** : **On considère l'**équation du type $x^2 = a$ **ou** a **un réel donné.**
>
> $1^{ére}$ **Cas :** (Si $a > 0$)
>
> ❖ **Si** $a > 0$ **alors** $x = \sqrt{a}$ **ou** $x = -\sqrt{a}$ **donc** $S_{IR} = \{\sqrt{a}, -\sqrt{a}\}$
>
> $2^{éme}$ **Cas :** (Si $a < 0$)
>
> ❖ **Si** $a < 0$ **alors dans ce cas** l'équation du type $x^2 = a$ **n'admet pas de solution donc** $S_{IR} = \varnothing$
>
> $3^{éme}$ **Cas :** (Si $a = 0$)
>
> ❖ **Si** $a = 0$ **alors** $x = 0$ **dans ce cas** l'équation du type $x^2 = 0$ **admet une solution unique donc** $S_{IR} = \{0\}$

Exemples: 1 . *Résoudre l'équation* $x^2 = 5$

$x^2 = 5$ équivaut à $x = \sqrt{5}$ ou $x = -\sqrt{5}$ donc $S_{IR} = \{\sqrt{5}\ , -\sqrt{5}\ \}$

2. *Résoudre l'équation* $x^2 = -\pi$ Impossible

dans ce cas *l'équation* **n'a pas de solution donc** $S_{IR} = \varnothing$ (Car $-\pi < 0$)

III) Résolution de l'équation du type : $(ax+b)(cx+d)=0$

Retenons : *un produit de facteurs est nul, si et seulement si l'un des deux facteurs est nul.* **Si** $A \times B = 0$ **alors** $A = 0$ ou $B = 0$

Exemple: *Résoudre l'équation* $(5x-3)(7x+2)=0$

Solution : $(5x-3)(7x+2)=0$ équivaut à $5x-3=0$ ou $7x+2=0$ équivaut à $5x=3$ ou $7x=-2$

équivaut à $x = \frac{3}{5}$ ou $x = -\frac{2}{7}$ donc $S_{IR} = \{\frac{3}{5}\ , -\frac{2}{7}\ \}$

IV) Inéquations du 1ére degré à une inconnue :

1) Définitions :

On appelle inéquation du 1ére **degré à une inconnue x, toute inégalité de la forme** $ax+b \geq 0$ ou $ax+b \leq 0$ **ou** $ax+b > 0$ ou $ax+b < 0$ **avec** $a \in IR^*$ **et** $b \in IR$

Exemple : $-2x + 5 < 0$ est une inéquation du 1ére **degré à une inconnue x.**

2) Résolution de l'inéquation du 1ére degré à une inconnue :

- Résoudre une inéquation du 1ére degré à une inconnue x, c'est trouver toutes les valeurs que l'on peut donner à x pour que l'inégalité soit juste.

a) Propriétés : **Propriétés utiles à la résolution des inéquations** du 1ére degré à une inconnue **.**

$a \in IR$, $b \in IR$ on a :

- $a > b$ **et** $c \in IR$ équivaut à $a + c > b + c$ (1)
- $a > b$ **et** $c \in IR$ équivaut à $a - c > b - c$ (2)
- $a > b$ **et** $c > 0$ équivaut à $a\,c > b\,c$ (3)
- $a > b$ **et** $c < 0$ équivaut à $a\,c < b\,c$ (4)
- $a > b$ **et** $c > 0$ équivaut à $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ (5)
- $a > b$ **et** $c < 0$ équivaut à $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ (6)

b) Signe d'une expression du 1er degré ($ax + b$ avec $a \neq 0$ et $b \in IR$):

Propriété :

x	$-\infty$	$-b/a$	$+\infty$
Signe de $(a x + b)$	Signe de (-a)	0	Signe de (a)

Dans un tableau de signe :

« A gauche» de $-\frac{b}{a}$ **l'expression** $a\,x + b$ **est du signe contraire de** a

« A droite» de $-\frac{b}{a}$ **l'expression** $a\,x + b$ **est du signe de** a

Exemple 1:

Signe de $-3x+5$

- $-3x+5=0 \Leftrightarrow -3x=-5 \Leftrightarrow x=\dfrac{5}{3}$
- $-3x+5>0 \Leftrightarrow -3x>-5 \Leftrightarrow x<\dfrac{5}{3}$
- $-3x+5<0 \Leftrightarrow -3x<-5 \Leftrightarrow x>\dfrac{5}{3}$

Tableau de signe :

x	$-\infty$	$5/3$	$+\infty$
$-3x+5$	$+$	0	$-$

$\therefore$

- *Résoudre dans IR l'inéquation* $-3x+5<0$

  $-3x+5<0 \Leftrightarrow -3x<-5 \Leftrightarrow x>\dfrac{5}{3}$ *donc* $S_{IR}=\left]\dfrac{5}{3},+\infty\right[$

- *Résoudre dans IR l'inéquation :* $-3x+5>0$

  $-3x+5>0 \Leftrightarrow -3x>-5 \Leftrightarrow x<\dfrac{5}{3}$ *donc* $S_{IR}=\left]-\infty,\dfrac{5}{3}\right[$

- *Résoudre dans IR l'inéquation :* $-3x+5\geq 0$

  $-3x+5\geq 0 \Leftrightarrow -3x\geq -5 \Leftrightarrow x\leq\dfrac{5}{3}$ *donc* $S_{IR}=\left]-\infty,\dfrac{5}{3}\right]$

Exemple 2:

- *Résoudre dans IR l'inéquation :* $3x+4\leq 3(x-2)$

  $3x+4\leq 3(x-2) \Leftrightarrow 3x+4\leq 3x-6 \Leftrightarrow 3x+3x\leq -6-4 \Leftrightarrow 0x\leq -10$ *Impossible*

dans ce cas *l'inéquation* ***n'a pas de solution donc*** $S_{IR}=\varnothing$

Exemple 3:

- *Résoudre dans IR l'inéquation :* $5x-15<5(x-2)+6$

  $5x-15<5(x-2)+6 \Leftrightarrow 5x-15<5x-10+6 \Leftrightarrow 5x-15<5x-4 \Leftrightarrow 5x-5x<15-4$

$0x<11$ ***dans ce cas tout nombre réel est solution de l'équation donc*** $S_{IR}=IR$

♦ Équation du premier degré

- On appelle équation du premier degré une équation qui, après simplifications éventuelles, peut être écrite : $ax = b$ avec $a \neq 0$. Cette équation admet une solution unique égale à $\frac{b}{a}$.
- Exemple :

$$\frac{x-3}{4} - \frac{2x-5}{6} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{3x-9}{12} - \frac{4x-10}{12} = -\frac{4}{12} \Leftrightarrow 3x-9-(4x-10) = -4 \Leftrightarrow 3x-9-4x+10 = -4$$

$$\Leftrightarrow 3x-4x = 9-10-4 \Leftrightarrow -x = -5 \Leftrightarrow x = 5$$

"Équation-produit"

- On appelle "équation-produit" une équation du type $(ax+b)(cx+d).... = 0$
- $(ax+b)(cx+d).... = 0$ est équivalente à $\begin{cases} ax+b=0 \\ \text{ou} \\ cx+d=0 \\ \text{ou} \\ ... \end{cases}$
- Exemple : $(2x - 4)(-3x - 6) = 0 \Leftrightarrow 2x - 4 = 0$ ou $-3x - 6 = 0 \Leftrightarrow 2x = 4$ ou $-3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$

♦ Inéquation du premier degré à une inconnue

• On appelle inéquation du premier à une inconnue (notée x) une inéquation qui, après simplification, peut être mise sous la forme $ax < b$ ou $ax \leq b$ ou $ax > b$ ou $ax \geq b$ avec $a \neq 0$.

Si a est positif, les solutions de $ax < b$ sont les nombres inférieurs à $\frac{b}{a}$ mais si a est négatif, les solutions de $ax < b$ sont les nombres supérieurs à $\frac{b}{a}$.

Si a est positif, les solutions de $ax \leq b$ sont les nombres inférieurs ou égaux à $\frac{b}{a}$ mais si a est négatif, les solutions de $ax \leq b$ sont les nombres supérieurs ou égaux à $\frac{b}{a}$.

Si a est positif, les solutions de $ax > b$ sont les nombres supérieurs à $\frac{b}{a}$ mais si a est négatif, les solutions de $ax > b$ sont les nombres inférieurs à $\frac{b}{a}$.

Si a est positif, les solutions de $ax \geq b$ sont les nombres supérieurs ou égaux à $\frac{b}{a}$ mais si a est négatif, les solutions de $ax \geq b$ sont les nombres inférieurs ou égaux à $\frac{b}{a}$.

• Exemple : $-2x-4 \leq 5x+10 \Leftrightarrow -2x-5x \leq 10+4 \Leftrightarrow -7x \leq 14 \Leftrightarrow x \geq \frac{14}{-7} \Leftrightarrow x \geq -2$

♦ Inéquation du premier degré à deux inconnues

• On appelle inéquation du premier degré à deux inconnues une inéquation qui, après simplifications éventuelles, peut être mise sous la forme $y < ax+b$ ou $y \leq ax+b$ ou $y > ax+b$ ou $y \geq ax+b$ (a étant un nombre non nul)

• L'ensemble des couples solutions peut être représenté par une région du plan : l'ensemble E des points M dont les coordonnées x et y vérifient l'inéquation

Pour $y < ax + b$, E est le demi-plan ouvert situé **en dessous** de la droite D d'équation $y = ax+b$ (la droite D ne fait pas partie de l'ensemble E)

Pour $y \leq ax + b$, E est le demi-plan fermé situé **en dessous** de la droite D d'équation $y = ax+b$ (la droite D fait partie de l'ensemble E)

Pour $y > ax + b$, E est le demi-plan ouvert situé **au-dessus** de la droite D d'équation $y = ax+b$ (la droite D ne fait pas partie de l'ensemble E)

Pour $y \geq ax + b$, E est le demi-plan fermé situé **au-dessus** de la droite D d'équation $y = ax+b$ (la droite D fait partie de l'ensemble E)

N*MY

N*MY