Exercice 1:

La courbe représentative ($\mathscr{C}_f$) ci-dessous est celle d'une fonction f définie sur]- ∞ ,13]

La droite D_1 tangente à ($\mathscr{C}_f$) en B (4,0)

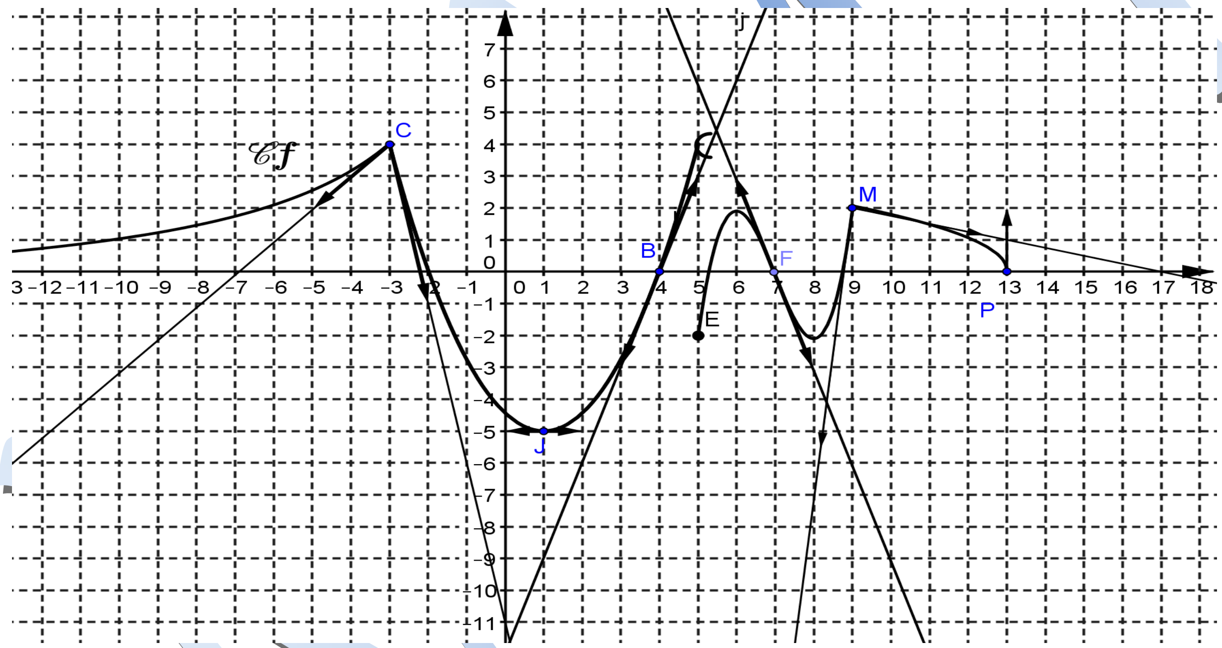
$\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont deux vecteurs directeurs des demi- tangentes à ($\mathscr{C}_f$) en C(-3,4)

$\vec{W}$ est un vecteur directeur de demi- tangente à ($\mathscr{C}_f$) en P (13 ,0).

La droite D_2 tangente à ($\mathscr{C}_f$) en F(7,0).

$\vec{U_1}$ et $\vec{V_1}$ sont deux vecteurs directeurs des demi- tangentes à ($\mathscr{C}_f$) en M(9,2)

Par lecture graphique déterminer *:*



1) Determiner : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x)$.

2) f est elle dérivable en 5 ?

3) a) f est elle dérivable en 4 ? Déterminer f'(4) ?

   b) Déterminer l'équation cartésienne de la tangente ou point d'abscisse 4

4) a) f est elle dérivable en – 3?

   b) Déterminer $f'_d(-3)$ et $f'_g(-3)$?

5) a) f est elle dérivable en 1 ? Déterminer f'(1) ?

   b) Déterminer l'équation cartésienne de la tangente ou point d'abscisse1.

6) a) f est elle dérivable a gauche en 13 ?

   b) Déterminer $\lim\limits_{x \to 13^-} \dfrac{f(x)-f(13)}{x-13}$.

7) a) f est elle dérivable en 9?

   b) Déterminer $f'_d(9)$ et $f'_g(9)$?

Exercice 2: Soit la fonction f définie par : $f(x)=\begin{cases} x^3-2x^2+1 & si\ x\le 2 \\ \dfrac{3x^2-5x+2}{x+2} & si\ x\ge 2\end{cases}$

On désigne par ($\mathscr{C}$f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé (o,i ,,j)

1) Montrer que f est continue en 2.

2) Etudier la dérivabilité de f en 2.

3) a) Montrer que f est dérivable sur] - ∞ ,2] ? et calculer f'(x)

b) Soit x ∈]- ∞ ,2] Déterminer les points de (C) en les quels la tangente est perpendiculaire à la droite D : x – y +1 = 0

c) Déterminer f'' dérive seconde de f sur] - ∞ ,2]

4) Soit x∈]2 ,+ ∞ [

a) Montrer que f'(x) = $\dfrac{3x^2+12x-12}{(x+2)^2}$

b) Soit $x_0 > 2$ (C) admet elle des tangentes au point d'abscisse x_0 parallèle à la droite D : y= $\dfrac{3}{2}$ x+2 ?

Exercice 3: Soit f la fonction définie sur IR par : $\begin{cases} f(x)=2\sqrt{x}+1 \text{ si } x\ge 1 \\ f(x)=ax^2+bx \text{ si } x<1\end{cases}$

1) Déterminer une relation entre les réels a et b pour que f soit continue au point 1
2) Déterminer les réels a et b pour que f soit dérivable au point 1
3) On suppose : a = - 2 et b = 5
   a) Montrer que f est dérivable en tout réel x_0 et déterminer $f'(x_0)$
   b) Ecrire une équation de la tangente (T) à la courbe (C) de f au point d'abscisse x_0
   c) Soit A(0 ;3). Existe-il des tangentes à la courbe (C) de f passant par le point A ?

Exercice 4: Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x-2} \text{ si } x\ge 2 \\ f(x)=x^2-x-2 \text{ si } x<2\end{cases}$.

On désigne par ζf sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$

1- Etudier la continuité de f en 2

2- a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 2 puis interpréter graphiquement le Résultat

b Etudier la dérivabilité de f à gauche en 2 puis écrire l'équation de la demi Tangente notée Tg

c) f est elle dérivable en 2? Représenter les deux demi tangentes

3- Soit $x_0 \in]2,+\infty[$

a) Montrer que f est dérivable en x_0 et on a: $f'(x_0)=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0-1}}$

b) Existe t-il des points de ζf d'abscisse >2 où la tangente soit parallèle à la droite D:y= $\dfrac{1}{4}$x+1

4- Montrer que f est dérivable sur $]-\infty,2[$

a) Calculer f '(x)

b) Ecrire une équation cartésienne de la tangente à ζf au point d'abscisse 0 notée T_0

c) Etudier la position relative de ζf et T_0

Exercice 1:

La courbe représentative ($\mathscr{C}_f$) ci-dessous est celle d'une fonction f définie sur]- ∞ ,13]

La droite D_1 tangente à ($\mathscr{C}_f$) en B (4,0)

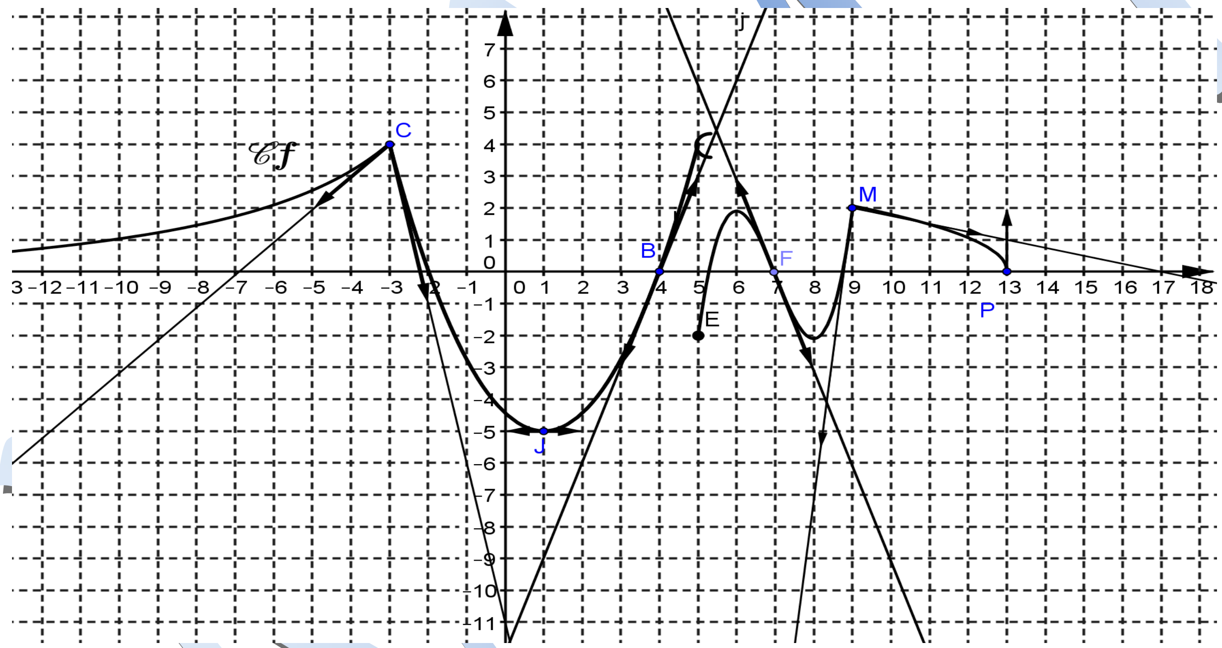
$\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont deux vecteurs directeurs des demi- tangentes à ($\mathscr{C}_f$) en C(-3,4)

$\vec{W}$ est un vecteur directeur de demi- tangente à ($\mathscr{C}_f$) en P (13 ,0).

La droite D_2 tangente à ($\mathscr{C}_f$) en F(7,0).

$\vec{U_1}$ et $\vec{V_1}$ sont deux vecteurs directeurs des demi- tangentes à ($\mathscr{C}_f$) en M(9,2)

Par lecture graphique déterminer *:*



5) Determiner : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x)$.

6) f est elle dérivable en 5 ?

7) a) f est elle dérivable en 4 ? Déterminer f'(4) ?

   b) Déterminer l'équation cartésienne de la tangente ou point d'abscisse 4

8) a) f est elle dérivable en – 3?

   b) Déterminer $f'_d(-3)$ et $f'_g(-3)$?

5) a) f est elle dérivable en 1 ? Déterminer f'(1) ?

   b) Déterminer l'équation cartésienne de la tangente ou point d'abscisse1.

6) a) f est elle dérivable a gauche en 13 ?

   b) Déterminer $\lim\limits_{x \to 13^-} \dfrac{f(x)-f(13)}{x-13}$.

7) a) f est elle dérivable en 9?

   b) Déterminer $f'_d(9)$ et $f'_g(9)$?

Exercice 2: Soit la fonction f définie par : $f(x)=\begin{cases} x^3-2x^2+1 & si\ x\le 2 \\ \dfrac{3x^2-5x+2}{x+2} & si\ x\ge 2 \end{cases}$

On désigne par ($\mathscr{C}$f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé (o,i ,,j)

1) Montrer que f est continue en 2.
2) Etudier la dérivabilité de f en 2.
3) a) Montrer que f est dérivable sur] - ∞ ,2] ? et calculer f'(x)

   b) Soit x ∈]- ∞ ,2] Déterminer les points de (C) en les quels la tangente est perpendiculaire à la droite D : x – y +1 = 0

   c) Déterminer f'' dérive seconde de f sur] - ∞ ,2]
4) Soit x∈]2 ,+ ∞ [

   a) Montrer que f'(x) = $\dfrac{3x^2+12x-12}{(x+2)^2}$

   b) Soit $x_0 > 2$ (C) admet elle des tangentes au point d'abscisse x_0 parallèle à la droite D : y= $\frac{3}{2}$ x+2 ?

Exercice 3: Soit f la fonction définie sur IR par : $\begin{cases} f(x)=2\sqrt{x}+1 \text{ si } x\ge 1 \\ f(x)=ax^2+bx \text{ si } x<1 \end{cases}$

1) Déterminer une relation entre les réels a et b pour que f soit continue au point 1
2) Déterminer les réels a et b pour que f soit dérivable au point 1.
3) On suppose : a = - 2 et b = 5
   a) Montrer que f est dérivable en tout réel x_0 et déterminer $f'(x_0)$
   b) Ecrire une équation de la tangente (T) à la courbe (C) de f au point d'abscisse x_0
   c) Soit A(0 ;3). Existe-il des tangentes à la courbe (C) de f passant par le point A ?

Exercice 4: Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x-2} \text{ si } x\ge 2 \\ f(x)=x^2-x-2 \text{ si } x<2 \end{cases}$.

On désigne par ζf sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$

1. Etudier la continuité de f en 2
2. a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 2 puis interpréter graphiquement le Résultat .
   b) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 2 puis écrire l'équation de la demi Tangente notée Tg
   c) f est elle dérivable en 2? Représenter les deux demi tangentes
3. Soit $x_0 \in]2,+\infty[$
   a) Montrer que f est dérivable en x_0 et on a: $f'(x_0)=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0-1}}$
   b) Existe t-il des points de ζf d'abscisse >2 où la tangente soit parallèle à la droite D:y= $\frac{1}{4}$x+1
4. Montrer que f est dérivable sur $]-\infty,2[$
   a) Calculer f '(x)
   b) Ecrire une équation cartésienne de la tangente à ζf au point d'abscisse 0 notée T_0
   c) Etudier la position relative de ζf et T_0

Exercice 5:

Soit f la fonction définie par: $f(x)= \begin{cases} \dfrac{(x-1)^2}{x-2} \; si \; x<1 \\ (x-1)\sqrt{x} \; si \; x \geq 1 \end{cases}$. On désigne par C$f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. Déterminer le domaine de définition de f
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$
3. a. Pour x<0 déterminer les réels a et b pour que: $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x-2}$

   b. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]$
4. a. Montrer que f est continue en 1

   b. Etudier la dérivabilité de f en 1
5. a. Calculer f '(x) pour x<1 et pour x>1

   b. Dresser le tableau de variation de f

Dérivabilité – Fonctions dérivées

I) Dérivabilité en un point $x_0 \in \mathbb{R}$

*** Définition 1 :**

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant x_0. f est dérivable en x_0 s'il existe un réel ℓ tel que :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell$$

On note alors $\ell = f'(x_0)$. ℓ s'appelle le nombre dérivée de f en x_0.

*** Définition 2 :**

Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]x_0 - h, x_0]$ où $h > 0$).

On dit que f est dérivable à gauche en x_0 s'il existe un réel ℓ tel que : $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell$. on note $f'_g(x_0) = \ell$.

*** Définition 3 :**

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[x_0, x_0 + h[$ (avec $h > 0$). On dit que f est dérivable à droite en x_0 s'il existe un réel ℓ tel que : $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell$ et on note $f'_d(x_0) = \ell$.

<u>Théorème 1</u> :

Une fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 et $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

<u>Théorème 2</u> :

Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.

II) Tangentes – Demi tangentes :

<u>Th1</u> :

Si f est dérivable en x_0 alors la courbe de f dans un repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, possède en $M_0(x_0, f(x_0))$ une tangente d'équation $\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$.

<u>Th2</u> :

Si f est dérivable à droite en x_0 alors la courbe de f possède une demi tangente en $M_0(x_0, f(x_0))$ d'équation

$$\begin{cases} y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ \text{et} \\ x \geq x_0 \end{cases}$$

<u>Th3</u> :

Si f est dérivable à gauche en x_0 alors la courbe de f possède une demi tangente en $M_0(x_0, f(x_0))$ d'équation :

$$\begin{cases} y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ \text{et} \\ x \leq x_0 \end{cases}$$

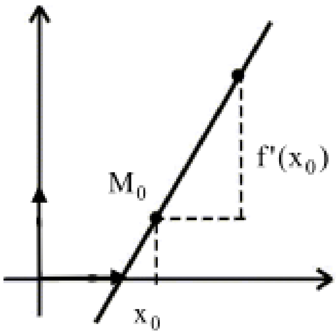
<u>Construction</u> :

* Si f est dérivable en x_0, un vecteur directeur de la tangente à C_f en $M_0(x_0, f(x_0))$ est $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_0) \end{pmatrix}$.

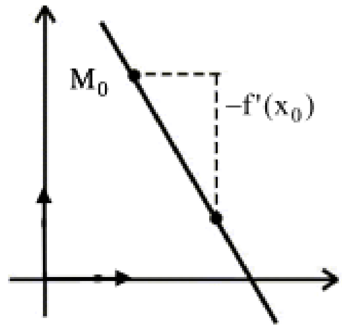
* Si f est dérivable à droite en x_0, $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ f'_d(x_0) \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la demi tangente à droite.

* Si f est dérivable à gauche en x_0 ; $\vec{u''}\begin{pmatrix} 1 \\ f'_g(x_0) \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de demi tangente à gauche

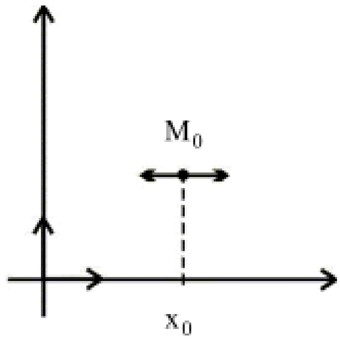
Construction de la tangente $\quad T : y = f'(x_0)\,(x - x_0) + f(x_0)$



$\boxed{\text{si } f'(x_0) > 0}$



$\boxed{\text{si } f'(x_0) < 0}$



$\boxed{\text{si } f'(x_0) = 0}$

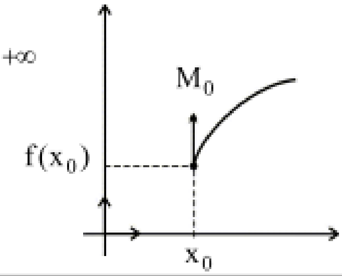
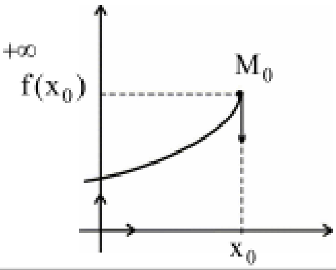
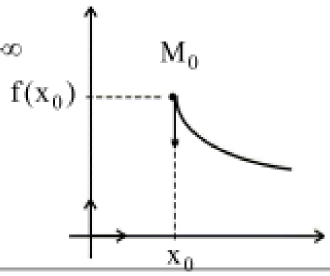
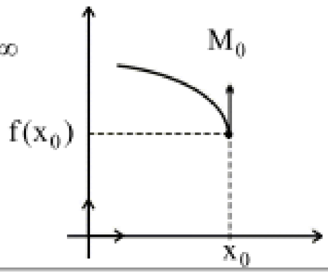
***<u>Remarque</u>* :**

On construit de la même façon la $\frac{1}{2}$ tangente à gauche ou à droite en remplaçant $f'(x_0)$ par $f'_g(x_0)$ ou $f'_d(x_0)$.

III) Cas de non dérivabilité :

* **<u>1er cas :</u>** si $f'_g(x_0) \neq f'_d(x_0)$ f n'est pas dérivable en x_0 et le point $M_0(x_0, f(x_0))$ est un point anguleux de la courbe de f.

* **<u>2ème cas :</u>** si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$;

(1) $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ 	(2) $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ 
(3) $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$ 	(4) $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$ 

IV) Dérivabilité sur un intervalle :

1/ Définitions : Soit f une fonction numérique.

* f est dérivable sur $]a, b[$; avec $(a < b)$ $\Leftrightarrow$ f dérivable en tout $x_0 \in]a, b[$.

* f est dérivable sur $]a, b]$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \text{f est dérivable sur }]a, b[\\ \text{et f est dérivable à gauche en b.} \end{cases}$

* f est dérivable sur $[a, b[$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \text{f est dérivable à droite en a} \\ \text{et f dérivable sur }]a, b[. \end{cases}$

* f est dérivable sur $[a, b]$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} .\text{f dérivable à droite en a} \\ .\text{f est dérivable sur }]a, b[. \\ .\text{f est dérivable en b à gauche.} \end{cases}$

2) Fonction dérivée :

Définition :

Soit f une fonction dérivable sur un domaine D.

On appelle, fonction dérivée de f la fonction notée :

$$f' : D \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f'(x)$$

Théorème : (Opérations sur les fonctions dérivables).

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

(1) Les fonctions $(f+g)$; $(f\times g)$ et (γf), (où $\gamma \in \mathbb{R}$), sont dérivables sur I et on a : Pour tout $x \in I$.

$\boxed{(f+g)'(x) = f'(x)+g'(x)}$; $\boxed{(fg)'(x) = f'(x)g(x)+f(x)\cdot g'(x)}$ et $\boxed{(\gamma f)'(x) = \gamma \cdot f'(x)}$.

(2) si de plus : $(g(x) \neq 0, \forall x \in I)$ alors : $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables sur I et on a :

$\boxed{\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-g'(x)}{[g(x)]^2}}$ et $\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2} \ ; \ (\forall x \in I).}$

OPERATIONS
$(kf)' = k.f'$
$(f+g)' = f'+g'$
$(fg)' = f'g+fg'$
$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$

3) Dérivée d'une fonction composée

Théorème 1 : Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$ alors $g\circ f$ est dérivable en x_0 et on a : $(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$

Théorème 2 :

Si f dérivable sur un intervalle I et g est dérivable sur $f(I)$ alors $g\circ f$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$ on a : $(g\circ f)'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x)$ c'est à dire : $\boxed{(g\circ f)' = (g'\circ f)\times f'}$

DERIVEES USUELLES		
Sur	f(x)	f'(x)
IR	$x \mapsto a$	$x \mapsto 0$
IR	$x \mapsto x$	$x \mapsto 1$
IR	$x \mapsto ax+b$	$x \mapsto a$
IR	$x \mapsto x^n$	$x \mapsto nx^{n-1}$
IR*	$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \frac{-1}{x^2}$
IR*	$x \mapsto \frac{1}{x^n}$	$x \mapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$
IR*$_+$	$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$(f^n)' = nf'.f^{n-1}$
$(g\circ f)' = (g'\circ f)\times f'$
$\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2}$
$(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$

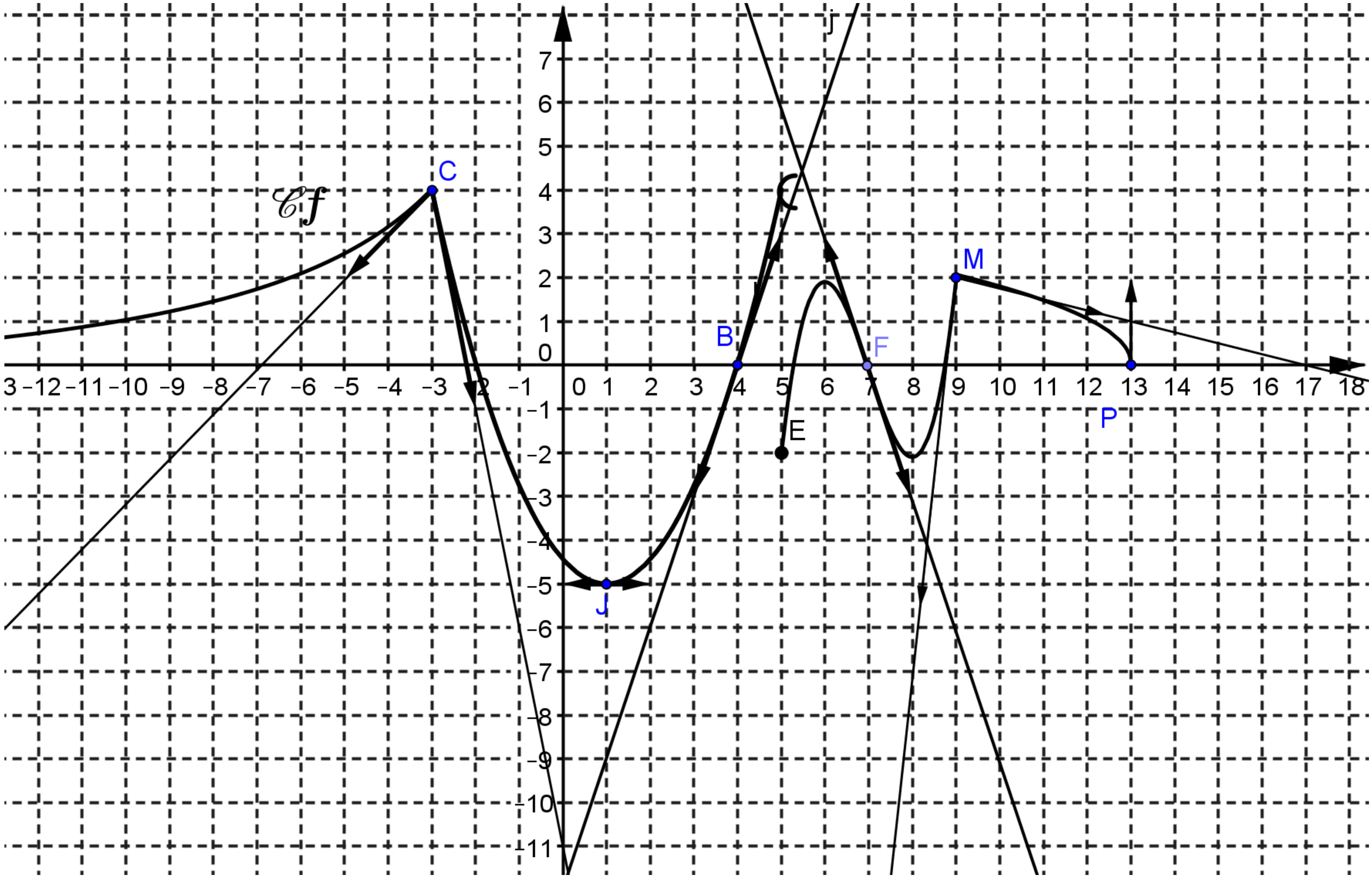
3) Conséquences :

(a) Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.

(b) Toute fonction rationnelle est dérivable sur son domaine.

Théorème :

si f est $\begin{cases} \text{dérivable sur un intervalle I} \\ \text{et} \\ \text{strictement positive sur I} \end{cases}$ Alors $\sqrt{f}$ est dérivable sur I ; et pour tout $x \in I$; $(\sqrt{f})'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$



$\mathscr{C}f$
C
B
F
M
P
J
E
j