

Concepts clés et situations-problèmes en mathématiques

Odette Bassis

NUMERATION :

LES ÉTAPES DE LA DÉMARCHE

Séance 1 :

- **Étape 1 : FAIRE ... quand l'impossible à compter peut être déjoué !**

Matériel : allumettes, élastiques (mais pas tout de suite), feuilles

Un tas d'allumettes est donné à chaque enfant :

30 allumettes = 1 gros paquet (de 4*4) 3 paquets (de 4) 2 seuls au pays des 4

39 allumettes = 213 (se lit : deux_un_trois, nous ne sommes pas dans la lecture décimale !!!) au pays des 4

« Imaginez que vous habitez dans un pays où on ne sait compter et écrire les nombres que jusqu'à quatre (compris). On l'appellera le PAYS DE QUATRE. Dans ce pays, vous avez un troupeau de moutons à vendre (ou à échanger). Pour cela, vous avez besoin de savoir combien il y en a. Cherchez que faire pour trouver combien vous avez de moutons. »

Confrontation au bout de **15 minutes** :

- Il devient nécessaire, pour s'en sortir, de faire des groupements.
- Pour compter les objets, on en vient à compter leurs groupements.

Distribution des élastiques.

- **Étape 2 : DU FAIRE AU DIRE**

« Cherchez comment dire ce que vous avez fait. Ce qu'il y a maintenant dans votre champ. »

Verbaliser : Attention : 8 paquets de 4 , mais 8 n'existent pas !!!

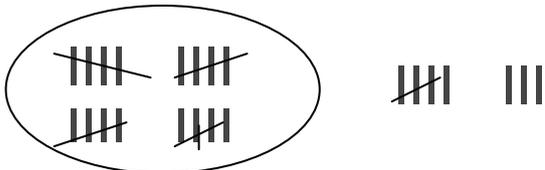
Il devient nécessaire :

- de regrouper des groupements
- de trouver des mots différents pour désigner les groupements différents : Rajouter des élastiques.

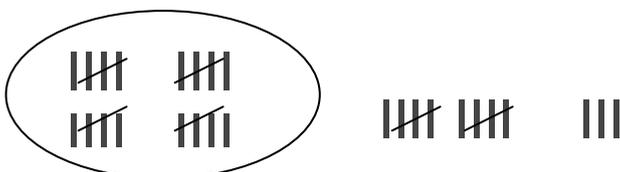
Organisation par l'enseignant du va-et-vient entre faire et dire : c'est la première phase de mise à distance réflexive pour distinguer les actions différentes de groupement et leurs désignations.

Proposer une phrase pour illustrer son explication :

Ex : 1 gros paquet ; 1 petit paquet, et 3 seuls.



Proposer de faire $27 = 123$ en base 4.



Séance 2 :

• Étape 3 FORMULER

« Après ce que vous avez fait, cherchez une phrase qui explique comment comprendre combien vous avez d'allumettes. »

- entente collective de groupements par 4 et 4X4 au pays de quatre.
- prise en compte de la coexistence des groupements de type différents pour dénombrer.
- nécessité d'une dénomination commune pour les groupements choisis, pour faciliter la communication : choix collectif de mots pour désigner les groupes différents.

Présenter les différents travaux des élèves.

Arriver à un choix de mots justifiés et collectifs.

Répéter la situation de départ : A quoi correspond : 1 gros paquet/ 2 petits paquets ...

Changement de pays :

Au pays des 5 : $45 = 132 \blacktriangleright 1*(5*5) + 3*(5)+2$ $22= 42 \blacktriangleright 4*(5)+2$

Au pays des 6 : $51 = 123 \blacktriangleright 36+12+3$ $33= 53 \blacktriangleright 30+3$

Tous les matins : un pays

Séance 3 :

• Étape 4 : CODIFIER ... *inventer une écriture codifiée*

« Voilà qu'il arrive une maladie curieuse dans ce pays : les habitants ne savent plus écrire de mots. Ils ne savent écrire que les chiffres (jusqu'à 4 compris). Alors, comment faire pour qu'on comprenne le message ? » \blacktriangleright les signes et les dessins sont acceptés

Phase de travail dans le symbolique : passage des mots trouvés à l'invention de dessins/codages, confrontation et élaboration d'un codage commun.

Ex : ☀ un gros paquet de $4 * 4$

▲ un paquet de 4

□ mouton seul pour unité 1

- Possibilité d'écriture de type additive :

☀☀ □ ▲▲▲ = $2*16+ 1+ 3*4$

- Possibilité d'écriture de type multiplicative :

$2☀1□3▲$

Envoi entre les groupes.

Travail sur les écritures égyptiennes et mayas

Séance 4 :

• Étape 5 : ECRIRE UN NOMBRE AVEC DES CHIFFRES

« Une anomalie arrive encore : les gens ne savent même plus dessiner ! Ds ne savent écrire que des chiffres. »

Émergence de propositions multiples (couleurs, grandeurs, positions...) pour représenter les unités d'ordres différents. Confrontation et analyse qui introduit à l'écriture positionnelle.

Une invention : l'écriture positionnelle ! Unité à droite et paquet qui vont vers la gauche.

L'introduction du « 0 » va prendre toute son importance.

Séance 5 :

• Étape 6 : LE ZERO

... quand représenter « rien » devient indispensable pour faire lien !

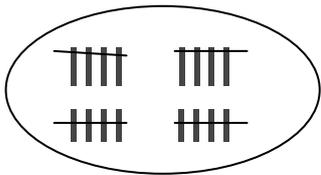
« Maintenant que vous savez comment écrire ce que vous avez compté d'un tas d'objets, vous allez chercher à coder, au pays de quatre, les nombres suivants (donnés à partir du système décimal) : « 18 », « 24 », « 6 ». »

Pour écrire ce qui est compté, on doit inventer un signe là où il y a un manque.

Des nombres qu'on peut écrire grâce à « 0 ».

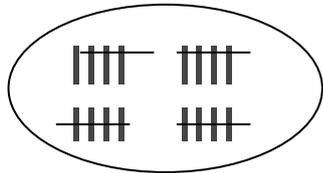
Mise en commun :

18 =



II = 102

24 =



III- III- = 120

6 = III- II = 012

• Étape 7 : LA SUITE DES NOMBRES

... quand le chiffre 4 en base quatre disparaît et que s'installe 10 !

« Individuellement, écrivez la suite des nombres, au pays de quatre. »

- Écriture de 1 en 1, jusqu'à un nombre de quatre chiffres.
- Découverte de l'évacuation définitive du chiffre 4 et de l'importance du 0 dans l'écriture positionnelle.
- Systématisation et réinvestissement dans d'autres bases.
- Suite des nombres de 10 en 10 et de 100 en 100.

Base 4 : 0-1-2-3-10-11-12-13-20-21-22-23-30-31-32-33-100-101-102-103-110-111-112-113-120

Si le chiffre 4 apparaît, ne rien dire, prendre les allumettes et observer.

BILAN : Au pays des 4, le chiffre 4 disparaît de l'écriture de tous les nombres (4, unités d'un groupe devient 1 unité d'un groupe d'ordre supérieur). Ce qui rend l'usage du zéro définitivement indispensable.

A l'oral compter en base 5, 6 .

Base 5 : 0-1-2-3-4-10-11-12-13-14-20

18 = 33

24 = 44

6 = 11

32 = 112

Séance 6 :

• Étape 8 : LA NUMÉRATION DÉCIMALE

... *quand la numération décimale dévoile ses secrets !*

- Réinvestissement des acquis précédents en base dix.

Une écriture universelle pour tous les nombres.

Faire compter les enfants en base 10.

0-1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-12-13-14-15-16-17-18-19-20-21-22...

Que constatez-vous ? C'est notre système de numération.

Choix de 10, car nous avons 10 doigts.

Ainsi : 10 = 1 paquet de 10 et 0 seuls

203 = 2 paquets de (10*10=100) et 3 seuls ...

• Étape 9 : VOCABULAIRE DE LA BASE DIX

... *quand le vocabulaire est plein d'histoire !*

Comment l'énonciation des nombres garde trace de leur histoire.

L'essentiel de l'activité mathématique est terminé, sur la numération. Reste à aborder le vocabulaire spécifique de la base dix. Mais il doit être clair que c'est maintenant seulement un problème de vocabulaire.

Les mots « dizaine » et « centaine » ont été abordés juste avant pour désigner les groupements correspondants. De plus, dès les classes de l'école maternelle, et en liaison avec le vocabulaire entendu, utilisé « à la maison » ou à tant d'occasions, d'autres mots ont été retenus et utilisés, sous forme de comptine ou autre.

1) Avec le mot « dix », l'élève peut lire directement 17, 18, 19 à la place de «un-sept, un-huit, un-neuf » suivant l'usage oral convenu dans les bases précédentes. Remarquer que dire « dix-sept » permet ici de mieux qualifier le fait que I désigne une dizaine, est donc placé à gauche du chiffre des unités.

2) Mais il faut lui apprendre le vocabulaire particulier de « onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize », en constatant que là, dans la racine des mots, est indiqué d'abord le nombre des unités (un pour onze, deux pour douze, trois pour treize, quatre pour quatorze, cinq pour quinze et six pour seize).

Il est temps de faire observer que le langage et les mots utilisés sont liés aux habitudes et cultures de chaque pays. Et de même que dans les étapes vécues de la démarche, à l'échelle de la classe, des mots et expressions ont été utilisés, chemin faisant, de même au cours de siècles des habitudes de langage se sont installées, et parfois avec des incohérences.

Cela dit, pour se faire comprendre, il faut bien utiliser le même vocabulaire et cela, on ne peut le choisir tout seul : il faut se mettre d'accord. Il n'y a aucun inconvénient, au contraire, en classe de nommer les nombres 12,13, 14, 15, 16 avec le vocabulaire : dix-deux, dix-trois... dix-six.

On peut attendre plus tard (surtout au Cours préparatoire) pour en venir au vocabulaire usuel.

3) Il peut être vraiment préférable de commencer par le vocabulaire des dizaines, de dix à soixante. Ainsi, les élèves sont capables de lire tous les nombres de 17 à 69 inclus, et donc directement après la connaissance toute simple du mot «dix».

Là aussi on voit que la progression proposée ici, dans l'introduction du vocabulaire, ne suit pas une progression linéaire.

Cette progression va délibérément dans le sens d'une progression qui s'appuie sur la construction conceptuelle, surtout d'abord lorsqu'il y a un lien, cohérence avec le vocabulaire usuel.

4) « Cent » doit être rapidement introduit, puisqu'il décuple les pouvoirs de lecture et d'écriture. Ainsi, par exemple, 845 est plus aisément lu que 71. Avec « cent », la lecture de toutes les centaines est appropriée d'un coup. Il en sera de même pour « mille ».

S) La désignation orale de 70 à 99 pourra aisément passer d'abord par l'usage des mots « septante, octante, nonante » utilisés dans un français ancien et bien plus conformes à la cohérence entre unités et lecture orale (et avec le même type de désignation que quarante, cinquante, soixante). La référence aux langues belges, suisses, espagnoles à ce sujet est aussi fort utile tant sur le plan mathématique que culturel.

Mais on peut observer que le seul chiffre des unités « non entendu » dans l'énonciation correspond à la présence du zéro.

Et donc il y a une forme d'anomalie de ne pas le nommer alors qu'on a pu en apprécier dans la démarche toute l'importance. Là aussi, question d'habitudes sociales (et vestige aussi d'une difficulté à nommer ce qui manque...).

