LA CONTINUITÉ

Théorème 01

- f est continue en a si $\Leftrightarrow$ $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- f est continue à droite en a $\Leftrightarrow$ $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.
- f est continue à gauche en a $\Leftrightarrow$ $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.
- f est continue en a $\Leftrightarrow$ f est continue à gauche et à droite en a.

f est continue sur l'intervalle I si elle est continue en tout point de I. (pour les bornes de I appartenant à I on considère la continuité à droite ou bien à gauche en ces bornes)

Opérations sur les fonctions continues :

Théorème 02:
Soient f et g deux fonctions continues en a et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Les fonctions $\lambda.f$, $|f|$, $f+g$ et $f \times g$ sont continues en a.
- Si $g(a) \neq 0$, Alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues en a.

- Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$
- Toute fonction rationnelle est continue sur chaque intervalle contenu dans son domaine de définition.

Continuité d'une fonction composée

Théorème 03:
Si f et continue en a et g continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a.

Conséquence 1:
Si f est continue en a et positive sur un intervalle contenant a alors $\sqrt{f}$ est une fonction continue en a.

Conséquence 2:
Soient f et g deux fonctions.Si:
($\lim_{x \to a} f(x) = b$ et g et continue en b)

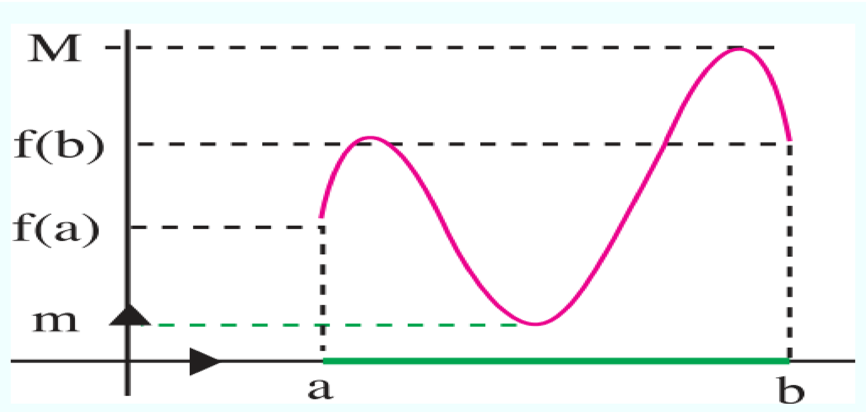
Alors

(La fonction $g \circ f$ admet une limite finie en a et cette limite est égale à $g(b)$).
a étant fini ou infini et b un réel.

Théorème des valeurs intermédiaires

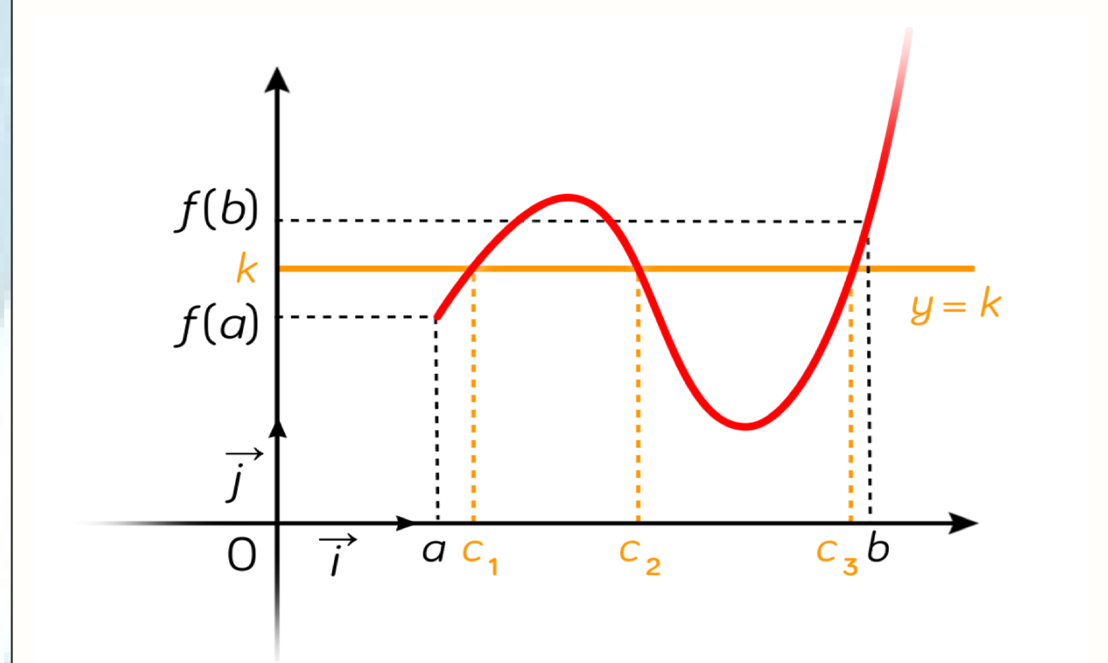
Théorème 04:

- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
- L'image d'un intervalle fermé $[a, b]$ par une fonction continue est un intervalle fermé $[m, M]$.

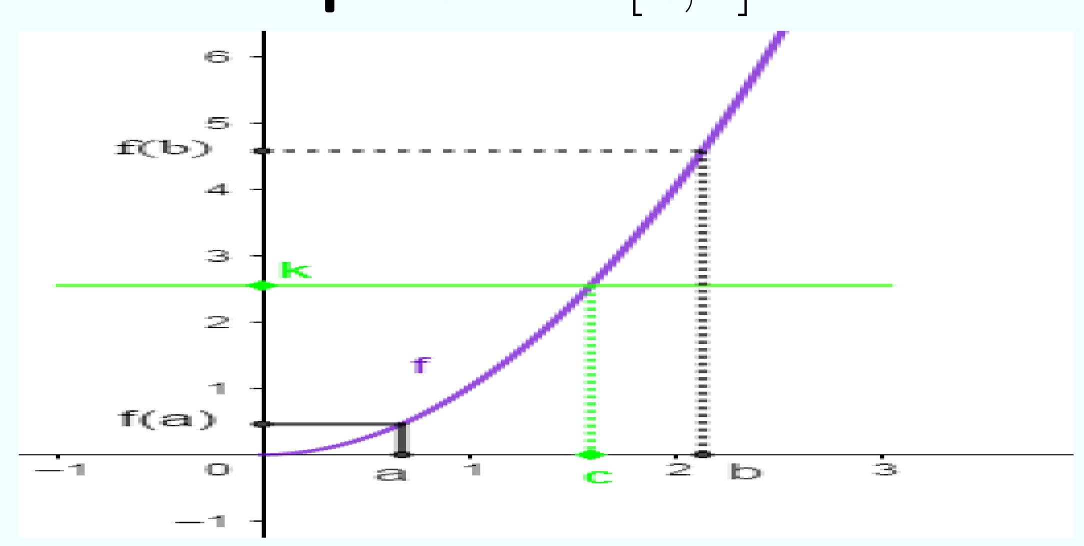


f($[a, b]$)=$[m, M]$.

Théorème 05: T.V.I
Si une fonction f est **continue** sur un **intervalle** fermé $[a, b]$ et si k est un réel quelconque compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors **il existe au moins** un réel c dans $[a, b]$ tel que $f(c) = k$.



Remarque : Si de plus f est **strictement monotone** sur l'intervalle $[a, b]$, alors l'équation $f(x) = k$ admet une **solution unique** c dans $[a, b]$.



Corollaire :
Si f est une fonction **continue** sur un **intervalle** fermé $[a, b]$ et si:
$f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a, b]$.

Théorème de la bijection :

Théorème 06: Si une fonction f est **strictement monotone** sur un intervalle I alors :

- f est une bijection de l'intervalle I sur $f(I)$.
- La fonction réciproque f^{-1} de f a le même sens de variation que f .

Si de plus, la fonction f est **continue** sur I, alors La fonction réciproque f^{-1} de f, est une bijection continue de l'**intervalle** $J = f(I)$ sur I.

Remarque : Pour tout $x \in I$ et $y \in J$:
$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

Théorème 07: Les courbes représentatives de f et de f^{-1} dans un repère orthonormé du plan, sont symétriques par rapport à la droite $\Delta : y = x$.