

M1 SUTS

Introduction aux Techniques Spatiales - Examen de Mécanique Spatiale

22 Mars 2023

Consignes : Nous avons conscience que le sujet est long, et que vous n'aurez sans doute pas le temps de tout faire en 2h, nous ajusterons le barème. La section 5bis est hors-barème et ne pourra que rajouter des points si vous vous y essayez. Surtout n'hésitez pas à faire des schémas, et réfléchissez bien aux unités utilisées dans vos équations.

Exercice n°1 : Questions de cours

- 1) Énoncez les 3 lois de Kepler.
- 2) Donnez la définition d'une orbite héliosynchrone.
- 3) Expliquez en quelques lignes et schéma le principe de l'assistance gravitationnelle.

Exercice n°2 : Retour à la maison

Vous et votre meilleur ami êtes en route pour revenir sur Terre pour ramener une cargaison venue d'en dehors du système solaire. Après être sortis de l'hyperespace à 32 UA du Soleil pour accomplir vos formalités administratives, vous devez poursuivre votre voyage. Vous partez d'une orbite circulaire de rayon 32 UA, située dans le plan de l'écliptique.

- 1) Si l'on suppose une orbite de transfert de type Hohman entre votre orbite et la Terre, quel est l'objet du système solaire qui occupera l'un des foyers de notre orbite ?
- 2) Estimer le temps nécessaire pour revenir sur Terre depuis l'astéroïde avec cette stratégie.
Aide : simplifiez-vous la vie en utilisant la 3e loi de Kepler dans le système solaire avec des unités judicieusement choisies. Sinon, vous trouverez des données utiles juste ici :
 - Unité astronomique : $1UA = 149597870.700km$
 - Constante de gravitation universelle : $G = 6.6743 \times 10^{-11} m^3.kg^{-1}.s^{-2}$
 - Masse du Soleil : $M_s = 1.9884 \times 10^{30}kg$
- 3) Quelle est la stratégie de transfert que vous pouvez utiliser pour réduire la durée de votre voyage ?

Exercice n°3 : Space Baseball

Malheureusement, suite à une avarie, votre vaisseau s'est écrasé sur un astéroïde de glace sphérique de rayon $R = 20$ km, dont le demi-grand axe est égal à 30 UA. Étrangement cet astéroïde garde une orientation fixe dans l'espace inertiel, que ce soit avant ou après l'impact.

Votre cargaison est composée de balles de métal de la taille d'une balle de baseball mais qui vous semblent très légères.

Comme les secours n'arriveront pas avant plusieurs jours vous décidez de tuer le temps en lançant quelques balles.

- 1) Vous lancez une balle horizontalement à 36km/h soit 10m/s. Elle se place en orbite circulaire!
Calculez la masse M de l'astéroïde
Vous pourrez pour cela négliger votre propre taille, c'est-à-dire considérer que la balle est lancée à l'altitude $h = 0m$.
Données :

- Rayon de l'astéroïde : $R = 20km$

- 2) Vous restez au même endroit à admirer le paysage désolé et l'immensité de l'espace quand votre balle vous percute après avoir complété une orbite.
Combien de temps après le lancer avez-vous été percuté? (en d'autres termes calculer la période T de l'orbite)

Pour toute la suite de l'exercice, on utilisera comme paramètre gravitationnel de l'astéroïde la valeur $\mu = 2 \times 10^6 m^3.s^{-2}$

- 3) Vous lancez maintenant la balle à 50 km/h.
- Calculez le demi-grand axe a et l'excentricité e de l'orbite
 - Sur quel type de trajectoire est la balle?
 - Comment s'appelle le point le plus éloigné de l'astéroïde sur cette trajectoire?
 - Calculez la période T , le rayon r_a , l'altitude h_a et la vitesse V_a du point de la trajectoire le plus éloigné de l'astéroïde.
- 4) Vous lancez la balle à 51 km/h
- Calculez le demi-grand axe a et l'excentricité e de l'orbite
 - Qu'est devenue la trajectoire?
 - Calculez la vitesse de libération V_{lib_0} à l'altitude $h = 0m$

Exercice n°4 : Sauvetage

Votre compagnon de voyage n'a pas eu autant de chance que vous. Il a été éjecté du vaisseau avant le crash et est coincé en orbite autour de l'astéroïde.
Il est sur une orbite circulaire à une altitude $H = 10km$ au-dessus de l'astéroïde.

- 1) Calculez la période orbitale T_c et la vitesse orbitale V_c de votre ami sur son orbite circulaire.

Vous discutez par radio et réfléchissez à une stratégie pour l'aider à redescendre sur le sol.

En regardant de plus près une balle vous apercevez une inscription qui vous avait échappé auparavant :
« Unobtainum, masse = 10kg ».

La faible gravité vous a joué des tours, vos balles sont en fait particulièrement massives.

Vous avez désormais votre stratégie, inspirée d'un demi transfert de Hohmann : vous allez lancer une balle à votre ami, de face par rapport à son mouvement. En l'attrapant, sa vitesse orbitale va diminuer ce qui lui permettra de modifier sa trajectoire et de se rapprocher de l'astéroïde.

- 2) Faites un schéma de la stratégie de sauvetage sur lequel apparaîtront :
- L'astéroïde et son rayon,
 - L'orbite de votre ami, son rayon et son sens de parcours,
 - L'ellipse de votre lancer, son apoastre, son périastre et son sens de parcours.
- 3) Calculez le demi-grand axe a , la période T et l'excentricité e de l'ellipse de votre lancer.
- 4) Votre ami passe au-dessus de votre tête à la date $t_0 = 0s$, à quelle date t devez-vous lancer la balle pour qu'il puisse l'attraper?
- 5) A quelle vitesse V_p devez-vous lancer la balle pour la placer sur la bonne trajectoire?
- 6) Quelle sera la vitesse V_a de la balle à l'apoastre de l'ellipse du lancer?
- 7) Faites apparaître les vitesses V_c (cf. question 1), V_a et V_p sur le schéma de la question 2.

Exercice n°5 : Sauvetage → conséquences

Après plusieurs essais, votre ami parvient enfin à attraper la balle.

- 1) Sachant que la masse de votre ami est $M_a = 70\text{kg}$ et que la masse de la balle est $M_b = 10\text{kg}$, en utilisant la conservation de la quantité de mouvement du système « balle + ami », calculez la nouvelle vitesse V_{a2} de votre ami une fois la balle attrapée.
Aide : on rappelle que dans un choc parfaitement inélastique, la conservation de quantité de mouvement signifie que, suite à une collision entre un objet de masse m_1 , de vitesse \vec{v}_1 et un objet de masse m_2 , de vitesse \vec{v}_2 , la vitesse finale \vec{v}' commune aux deux corps est donnée par :
$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}'$$

On négligera les effets sur la santé de notre ami liés au fait de se prendre une balle de 10kg à grande vitesse dans le torse.
- 2) Montrez alors que l'incrément de vitesse négatif ΔV que la réception de la balle lui a permis d'effectuer vaut $\Delta V = V_{a2} - V_c = -1.933492\text{m.s}^{-1}$
- 3) Calculez le demi-grand axe a_2 et le rayon du périastre r_{p2} de sa nouvelle trajectoire.
Votre ami va-t-il pouvoir atteindre le sol après seulement un lancer ?
- 4) Calculez sa vitesse V_i à l'impact sur le sol.
- 5) Pensez-vous qu'il va s'en sortir indemne ?
Pour vous aider à répondre à cette question, calculez la hauteur de chute équivalente sur Terre pour avoir la même vitesse V_i au sol.
On prendra pour cela l'accélération de la gravité terrestre constante et égale à $g_0 = 9.81\text{m.s}^{-2}$ et on négligera le frottement de l'atmosphère terrestre.

Exercice n°5bis : Sauvetage → crash !

Cette partie consiste en des questions bonus.

Aide : On donne le demi-grand axe a_2 de la question 5.3 : $a_2 = 21163.559\text{m}$

- 1) A quelle distance de vous sur l'astéroïde va-t-il atterrir ?
Aide : commencez par utiliser l'équation polaire de l'ellipse pour en déduire l'anomalie vraie d'atterrissage
- 2) Si l'on suppose qu'il a réceptionné la balle à $t_0=0\text{s}$, à quelle date t va-t-il atteindre le sol ?
Aide : utilisez l'équation de Kepler pour résoudre ce problème
- 3) En supposant que vous partiez en courant juste après avoir lancé la balle, pensez-vous être capable d'amener un matelas à votre ami au point d'impact pour amortir sa chute ?
- 4) Votre ami sait que vous n'êtes pas un grand sportif et décide de s'en sortir seul. Pour ralentir sa vitesse à l'impact, il va lancer sa balle de face le plus fort possible juste avant de toucher le sol. A quelle vitesse doit-il lancer sa balle juste avant l'impact pour que sa vitesse d'impact soit équivalente à une chute de 3m de haut sur Terre ?

Heureusement, à vous deux, vous parvenez à réparer suffisamment vos équipements pour demander une assistance. Les secours arrivent rapidement et vous pouvez repartir avec votre cargaison. Bon retour sur Terre!