VALEURS ABSOLUES

I) DEFINITION

1[ère] approche : "une machine à rendre positif"

On appelle valeur absolue de x notée $|\,x\,|$ le nombre x "privé de son signe". La valeur absolue permet donc de "rendre positif" un nombre :

- si $x \geqslant 0$ alors $|\,x\,| =$
- si $x \leqslant 0$ alors $|\,x\,| =$

Ex: $|\sqrt{3}\,| =$

$|-2\,| =$

$|\sqrt{3} - 2\,| =$

$|\,x - 1\,| = \begin{cases} & \text{si } x \geqslant 1 \\ & \text{si } x \leqslant 1 \end{cases}$

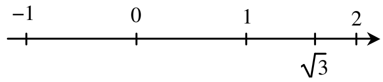
2[ème] approche : "une distance entre 2 nombres"

On cherche à calculer la distance entre deux nombres, c'est à dire la distance qu'il y aurait sur une droite graduée entre les points ayant pour abscisses ces deux nombres.

Ex : la distance entre $\sqrt{3}$ et 2 est :

la distance entre 2 et $\sqrt{3}$ est :

la distance entre -1 et 2 est :



Une distance étant toujours positive, la distance entre deux nombres est donc la différence du plus grand par le plus petit. Ainsi la distance entre x et 1 est : $\begin{cases} & \text{si } x \geqslant 1 \\ & \text{si } x \leqslant 1 \end{cases}$

On voit donc que la distance entre x et 1 est toujours égale à $|\,x - 1\,|$

Plus généralement, x et y étant deux réels quelconques, $|\,x - y\,|$ est la distance entre x et y

Synthèse

Une valeur absolue peut être interprétée comme :	Pour la calculer :
• une machine à rendre positif	• si le nombre est positif, il ne change pas s'il est négatif, on le multiplie par -1
• la distance entre 2 nombres	• plus grand – plus petit

Remarques : pour tout x de $\mathbb{R}$:

- $|\,x\,| = |\,x - 0\,|$ donc $|\,x\,|$ peut être interprétée comme la distance entre x et 0.
- x et $-x$ sont à la même distance de 0 donc $|\,x\,| = |-x\,|$
- Soit A(x ; 0) dans un repère orthonormal,
  on a donc : $OA = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2} = \sqrt{x^2}$
  de plus, O et A étant situés sur l'axe des abscisses qui est une droite graduée,
  on a donc aussi : $OA = |\,x - 0\,| = |\,x\,|$

Bilan : pour tout x de $\mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |\,x\,|$

Utiliser la fonction abs() de la calculatrice
p57: 77, 78
p59: 133, 135, 136

II) OPERATIONS AVEC DES VALEURS ABSOLUES

1) Propriétés

x et y étant des réels quelconques :

Propriété	Exemple
$\lvert x+y \rvert \leqslant \lvert x \rvert + \lvert y \rvert$	$\lvert 2+(-3) \rvert \leqslant \lvert 2 \rvert + \lvert -3 \rvert$
$\lvert x\,y \rvert = \lvert x \rvert\,\lvert y \rvert$	$\lvert 2 \times (-3) \rvert = \lvert 2 \rvert \times \lvert -3 \rvert$
$\left\lvert \dfrac{x}{y} \right\rvert = \dfrac{\lvert x \rvert}{\lvert y \rvert}$	$\left\lvert \dfrac{2}{(-3)} \right\rvert = \dfrac{\lvert 2 \rvert}{\lvert -3 \rvert}$

($y \neq 0$!)

2) Démonstrations

- Démontrons que $\lvert x+y \rvert \leqslant \lvert x \rvert + \lvert y \rvert$ en utilisant l'inégalité triangulaire :
  Soit une droite graduée de repère (O ; I).
  Pour tous réels x et y, on place le point A d'abscisse x et le point B d'abscisse $-y$.
  On a : $\lvert x+y \rvert = \lvert x-(-y) \rvert = AB$
  $\lvert x \rvert = OA$
  $\lvert y \rvert = \lvert -y \rvert = OB$
  Or d'après l'inégalité triangulaire, AB $\leqslant$ OA + OB
  donc $\lvert x+y \rvert \leqslant \lvert x \rvert + \lvert y \rvert$

- Démontrons que $\lvert x\,y \rvert = \lvert x \rvert\,\lvert y \rvert$ en utilisant les propriétés des racines carrées :
  Pour tous réels x et y,
  $\lvert x\,y \rvert = \sqrt{(x\,y)^2} = \sqrt{x^2\,y^2} = \sqrt{x^2}\,\sqrt{y^2} = \lvert x \rvert\,\lvert y \rvert$

Calculer :
$\lvert\, \lvert 2\pi - 7 \rvert - 5 \,\rvert$
$\lvert -\lvert 2\sqrt{2} - 3 \rvert + \lvert 4 - \pi \rvert \,\rvert$
$\lvert (2-\pi)^2 - 1 \rvert - \lvert 2 - \pi \rvert$
$\lvert x+1 \rvert \times \lvert x+1 \rvert$
$\dfrac{\lvert x^2 - 1 \rvert}{\lvert x - 1 \rvert}$

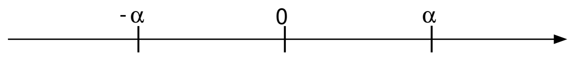
III) EQUATIONS ET INEQUATIONS AVEC DES VALEURS ABSOLUES

1) Propriétés

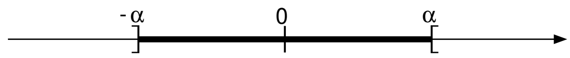
α étant un réel strictement **positif** :

$|x| = 0 \iff x = 0$

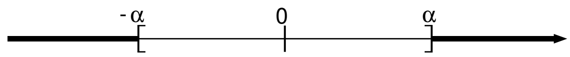
$|x| = \alpha \iff x = -\alpha$ ou $x = \alpha$



$|x| < \alpha \iff -\alpha < x < \alpha$



$|x| > \alpha \iff x < -\alpha$ ou $x > \alpha$



$|x| = |y| \iff x = y$ ou $x = -y$

2) Utilisation dans les exercices

Ex :

$\mid x \mid = 3$	$\iff x = -3$ ou $x = 3$	$S = \{-3 ; 3\}$
$\mid x - 2 \mid = 5$	$\iff x - 2 = -5$ ou $x - 2 = 5 \iff x = -3$ ou $x = 7$	$S = \{-3 ; 7\}$
$\mid x + 5 \mid = 1$	$\iff x + 5 = -1$ ou $x + 5 = 1 \iff x = -6$ ou $x = -4$	$S = \{-6 ; -4\}$
$\mid x + 2 \mid \leqslant 3$	$\iff -3 \leqslant x + 2 \leqslant 3 \iff -5 \leqslant x \leqslant 1$	$S = [-5 ; 1]$
$\mid 1 - x \mid \geqslant 2$	$\iff 1 - x \leqslant -2$ ou $1 - x \geqslant 2 \iff 3 \leqslant x$ ou $-1 \geqslant x$	$S =]-\infty ; -1] \cup [3 ; +\infty[$
$\mid 3x + 2 \mid > 1$	$\iff 3x + 2 < -1$ ou $3x + 2 > 1$	
	$\iff 3x < -3$ ou $3x > -1 \iff x < -1$ ou $x > -1/3$	$S =]-\infty ; -1[\cup]-1/3 ; +\infty[$

Remarque : et si $\alpha < 0$?

$|x| = -3$: une valeur absolue ne peut être négative donc $S = \emptyset$

$|x| \leqslant -3$: une valeur absolue ne peut être négative donc $S = \emptyset$

$|x| \geqslant -3$: une valeur absolue est toujours positive donc $S = \mathbb{R}$

p57: 80, 81, 82, 83, 84, <u>85</u>, 89
p58: 100, 102, <u>104</u>, 107

3) Et si les propriétés ci-dessus ne permettent pas de résoudre l'équation ?

On peut alors distinguer plusieurs cas pour "faire tomber" les valeurs absolues :

Ex :

(E) : $|x+1| = 3x-1$

2 cas :

- Si $x \geqslant -1$ alors $x+1 \geqslant 0$ donc $|x+1| = x+1$

$$\begin{cases}(E)\\ x \geqslant -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+1 = 3x-1\\ x \geqslant -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x = 2\\ x \geqslant -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 1\\ x \geqslant -1\end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

- Si $x \leqslant -1$ alors $x+1 \leqslant 0$ donc $|x+1| = -x-1$

$$\begin{cases}(E)\\ x \leqslant -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-x-1 = 3x-1\\ x \leqslant -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x = 0\\ x \leqslant -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 0\\ x \leqslant -1\end{cases}$$

il n'y a pas de solution dans ce cas

Bilan : $S = \{ 1 \}$

Commentaires :

On ne peut utiliser ici la propriété :

$$|x| = \alpha \Leftrightarrow x = -\alpha \text{ ou } x = \alpha$$

car α, c'est à dire $3x-1$ n'est pas forcément positif !!

(I) : $|1-x| > x$

2 cas :

- Si $x \geqslant 1$ alors $1-x \leqslant 0$ donc $|1-x| = x-1$

$$\begin{cases}(I)\\ x \geqslant 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-1 > x\\ x \geqslant 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0x > 1\\ x \geqslant 1\end{cases}$$

il n'y a pas de solutions dans ce cas

- Si $x \leqslant 1$ alors $1-x \geqslant 0$ donc $|1-x| = 1-x$

$$\begin{cases}(I)\\ x \leqslant 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1-x > x\\ x \leqslant 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1 > 2x\\ x \leqslant 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x < 1/2\\ x \leqslant 1\end{cases} \Leftrightarrow x < 1/2$$

Bilan : $S =]-\infty \,;\, 1/2[$

On ne peut utiliser ici la propriété :

$$|x| > \alpha \Leftrightarrow x < -\alpha \text{ ou } x > \alpha$$

car α, c'est à dire x n'est pas forcément positif !!

2-exo-equations-valeursabsolues.doc