Exercice n° : 1

1. $(1-\sqrt{2})^2=1-2\sqrt{2}+2=3-2\sqrt{2}$.

2. $z^2-(1+\sqrt{2})z+\sqrt{2}=0$:

$$\Delta=(1+\sqrt{2})^2-4\sqrt{2}=1+2\sqrt{2}+2-4\sqrt{2}=1-2\sqrt{2}+2=(1-\sqrt{2})^2$$

d'où $z_1=\dfrac{1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}}{2}=1$ et $z_2=\dfrac{1+\sqrt{2}-1+\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$.

3. (1) : $z+\dfrac{1}{z}=1\Leftrightarrow z^2-z+1=0$, soit $z_1^{'}=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}, z_2^{'}=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$;

(2): $z+\dfrac{1}{z}=\sqrt{2}\Leftrightarrow z^2-\sqrt{2}z+1=0$ soit $z_1^{''}=\dfrac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}, z_2^{''}=\dfrac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}$.

4. $P(z)=z^4-(1+\sqrt{2})z^3+(2+\sqrt{2})z^2-(1+\sqrt{2})z+1$; on développe

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-(1+\sqrt{2})\left(z+\frac{1}{z}\right)+\sqrt{2}=z^2+2z\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-(1+\sqrt{2})z-(1+\sqrt{2})\frac{1}{z}+\sqrt{2},$$

on met au même dénominateur et on simplifie :

$$\frac{z^4+2z^2+1-(1+\sqrt{2})z^3-(1+\sqrt{2})z+\sqrt{2}z^2}{z^2}=\frac{z^4-(1+\sqrt{2})z^3+(2+\sqrt{2})z^2-(1+\sqrt{2})z+1}{z^2}\text{ , ok !}$$

En faisant le changement de variable $z+\dfrac{1}{z}=Z$ on a l'équation $Z^2-(1+\sqrt{2})Z+\sqrt{2}=0$ qui a donc les solutions $Z_1=1, Z_2=\sqrt{2}$. Il reste à revenir sur *z*, ce qui donne les deux équations du 3. et donc les quatre solutions $z_1^{'}, z_2^{'}, z_1^{''}, z_2^{''}$.

Exercice n° : 2

1. $P\left(i\sqrt{3}\right)=9-6\left(-i3\sqrt{3}\right)-72-i18\sqrt{3}+63=0$, $P\left(-i\sqrt{3}\right)=9-6\left(i3\sqrt{3}\right)-72+i18\sqrt{3}+63=0$.

$P(z)=\left(z^2+3\right)\left(z^2+az+b\right)=z^4+az^3+\left(a+3b\right)z^2+3az+3b$ donc $a=-6$ et $b=21$, soit

$$P(z)=\left(z^2+3\right)\left(z^2-6z+21\right).$$

2. $z^2-6z+21$: $\Delta=36-84=-48=\left(i4\sqrt{3}\right)^2$, $z_1=\dfrac{6+i4\sqrt{3}}{2}=3+2i\sqrt{3}$, $z_2=\dfrac{6-i4\sqrt{3}}{2}=3-2i\sqrt{3}$.

P(*z*) = 0 a pour racines $i\sqrt{3}$ et $-i\sqrt{3}$ ainsi que z_1 et z_2 .

3. Comme *A* et *B* d'un côté, *C* et *D* de l'autre sont symétriques par rapport à l'axe ($\left(O,\vec{u}\right)$, les triangles *ABC* et *ABD* ont mêmes cercles circonscrits, ils appartiennent donc au même cercle.

4. *E*, le symétrique de *D* par rapport à *O* a pour affixe $-z_D=-3+2i\sqrt{3}$.

$$\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=\frac{3+2i\sqrt{3}+i\sqrt{3}}{-3+2i\sqrt{3}+i\sqrt{3}}=\frac{1+i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}}=\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(-1-i\sqrt{3}\right)}{1+3}=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}=e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

Le triangle *BEC* est donc équilatéral.

Exercice n° : 3

1. $z^2-8z\sqrt{3}+64=0$: $\Delta=64.3-4.64=-64=(8i)^2$ d'où $z_1=\dfrac{8\sqrt{3}+8i}{2}=4\sqrt{3}+4i$ ou $z_2=4\sqrt{3}-4i$.

2. a. $a=4\sqrt{3}-4i=8\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)=8e^{-i\frac{\pi}{6}}$ et $b=4\sqrt{3}+4i$. $b=4\sqrt{3}+4i=8\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=8e^{i\frac{\pi}{6}}$.

b. Il est immédiat que $OA = OB = 8$; $AB = |b-a| = \left|4\sqrt{3}+4i-4\sqrt{3}+4i\right| = |8i| = 8$. *OAB* est équilatéral.

3. $r: z \to z' = e^{-i\frac{\pi}{3}}z \Rightarrow d = e^{-i\frac{\pi}{3}}(-\sqrt{3}+i) = e^{-i\frac{\pi}{3}}2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2e^{i\frac{3\pi}{6}} = 2i$ (on peut le faire évidemment en utilisant les coordonnées cartésiennes).

4. a. *G* : barycentre de (*O* ; −1), (*D* ; +1), (*B* ; +1) existe car la somme des coefficients n'est pas nulle. Son affixe est $z_G = \frac{1}{-1+1+1}(-1.z_O + 1.z_D + 1.z_B) = d + b = 2i + 4\sqrt{3} + 4i = 4\sqrt{3} + 6i$.

b. Il faut évidemment utiliser les formes trigo…

Exercice n° : 4

1. a. *iy* solution de l'équation *P*(*z*) = 0, soit $P(iy) = 0$, soit

$$-iy^3 - \left(1-i\sqrt{2}\right)y^2 + \left(74-i\sqrt{2}\right)iy - 74i\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \left(y^2+\sqrt{2}y\right) + i\left(-y^3+\sqrt{2}y^2+74y-74\sqrt{2}\right) = 0.$$

Ceci donne le système $\begin{cases} y^2+\sqrt{2}y = 0 \\ -y^3+\sqrt{2}y^2+74y-74\sqrt{2} = 0 \end{cases}$; la première ligne donne comme solutions $y = 0$ qui ne convient pas dans la seconde ligne et $y = -\sqrt{2}$ qui convient.

b. $P(z) = \left(z-i\sqrt{2}\right)\left(z^2+az+b\right) = \left(z-i\sqrt{2}\right)\left(z^2+z+74\right)$.

c. *P*(*z*) = 0 : $z^2+z+74 = 0$, $\Delta = 1-296 = -295 = i^2 \times 5 \times 59$ d'où les racines

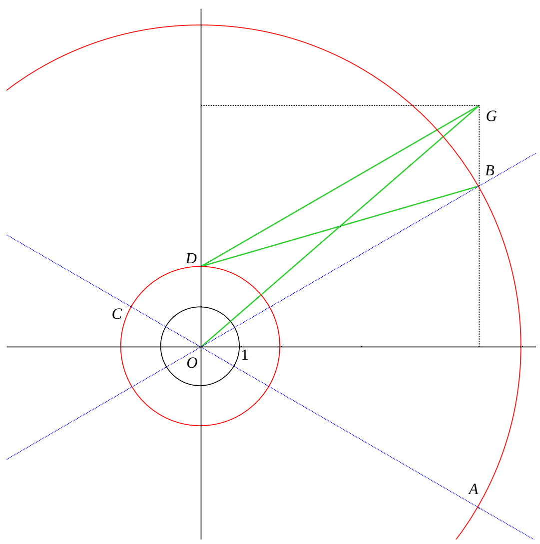
$$z_1 = i\sqrt{2},\ z_2 = \frac{-1+i\sqrt{295}}{2},\ z_3 = \frac{-1-i\sqrt{295}}{2}.$$

2. b. $z' = e^{i\frac{\pi}{4}}z_I = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)i\sqrt{2} = -1+i$.

c. *ABCN* est un parallélogramme si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{NC} \Leftrightarrow z_N = z_A - z_B + z_C = 7+5i-7+5i+1+i = 1+11i$.

d. Calculer $Z = \frac{z_A - z_C}{z_D - z_B} = \frac{-7+5i-1-i}{1+11i+7+5i} = \frac{-8+4i}{8+16i} = \frac{(-2+i)(2-4i)}{4+16} = \frac{10i}{20} = \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$.

On a donc $\left(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CA}\right) = \frac{\pi}{2}$ donc les droites (*AC*) et (*BD*) sont perpendiculaires ; comme *ABCD* est un parallélogramme, c'est un losange.



c. *C*, *D* et *G* sont alignés : $\overrightarrow{CD}$ a pour affixe $d-c=2i-(-\sqrt{3}+i)=\sqrt{3}+i$ et $\overrightarrow{DG}$ a pour affixe $g-d=4\sqrt{3}+6i-2i=4\sqrt{3}+4i=4(d-c)$ donc $\overrightarrow{DG}=4\overrightarrow{CD}$.

d. Appelons *K* le milieu de [*BD*], alors *G* est le barycentre de (*O* ; −1), (*K* ; 2) d'où $\overrightarrow{OG}=\frac{2}{-1+2}\overrightarrow{OK} \Leftrightarrow \overrightarrow{OG}=2\overrightarrow{OK}$, donc *K* est le milieu de [*OG*]. Mêmes milieux donc parallélogramme.

Exercice n° : 5

I. 1. $(-i)^3+(-8+i)(-i)^2+(17-8i)(-i)+17i=i+8-i-17i-8+17i=0$.

2. Développement puis identification donnent $z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=(z+i)(z^2-8z+17)$.

3. $z^2-8z+17=0$ a pour racines 4 + *i* et 4 − *i*.

II. 1. Voir plus loin.

2. $R_{(\Omega,\frac{\pi}{2})}: A\to S \Leftrightarrow s-\omega=i(a-\omega) \Leftrightarrow s=i(4+i-2)+2=1+2i$.

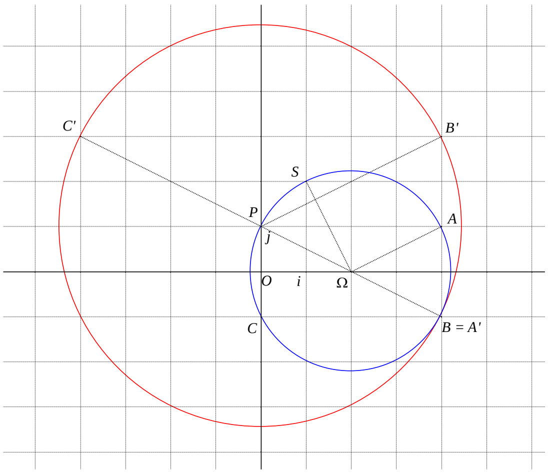
3. Il est assez évident sur la figure que (C) a pour centre Ω et pour rayon $OA=|2+i|=\sqrt{5}$. On vérifie aisément que $\Omega B=\Omega C=\Omega S=\sqrt{5}$.

4. a. $z_{A'}=\frac{i(4+i)+10-2i}{4+i-2}=\frac{9+2i}{2+i}=\frac{(9+2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{20-5i}{5}=4-i$,

$z_{B'}=\frac{i(4-i)+10-2i}{4-i-2}=\frac{11+2i}{2-i}=\frac{(11+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{20+15i}{5}=4+3i$,

$z_{C'}=\frac{i(-i)+10-2i}{-i-2}=\frac{11-2i}{-2-i}=\frac{(11-2i)(-2+i)}{(-2-i)(-2+i)}=\frac{-20+15i}{5}=-4+3i$.

b. Il est immédiat que $PA'=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}=PB'=PC'$.



c. $|z'-i|=\left|\frac{iz+10-2i}{z-2}-i\right|=\left|\frac{iz+10-2i-iz+2i}{z-2}\right|=\left|\frac{10}{z-2}\right|=\frac{10}{|z-2|}$.

d. *M* un point d'affixe *z* appartenant au cercle (C) est tel que $|z-2|=\sqrt{5}$ d'où $|z'-i|=\frac{10}{\sqrt{5}}=\frac{10\sqrt{5}}{5}=2\sqrt{5}$.

e. Donc si *M* appartient au cercle (C), *M'* appartiendra au cercle de centre le point *P* d'affixe *i*, de rayon $2\sqrt{5}$.

Exercice n° : 6

1. $a^5=e^{5.i\frac{2\pi}{5}}=e^{i2\pi}=1$.

2. Les points *I*, *A*, *B*, *C*, *D*, sont les images successives les uns des autres par la rotation de centre *O* d'angle $\frac{2\pi}{5}$: *I* va sur *A*, *A* sur *B*, etc. On a donc égalité des distances (une rotation est une isométrie).

3. On développe et ça marche tout seul.

4. Comme $a^5 = 1$, *a* est une solution de l'équation $z^5 = 1$, soit de $(z-1)(1+z+z^2+z^3+z^4)=0$, mais comme *a* ne vaut pas 1, *a* est solution de $1+z+z^2+z^3+z^4=0$ et est donc tel que $1+a+a^2+a^3+a^4=0$.

5. $a^3 = \left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^3 = e^{i\frac{6\pi}{5}}$, $\bar{a}^2 = \left(e^{-i\frac{2\pi}{5}}\right)^2 = e^{-i\frac{4\pi}{5}} = e^{i2\pi - i\frac{4\pi}{5}} = e^{i\frac{6\pi}{5}}$. Même chose pour $a^4 = \bar{a}$.

6. Utilisons $a^3 = \bar{a}^2$ et que $a^4 = \bar{a}$ dans $1+a+a^2+a^3+a^4=0 \Leftrightarrow 1+a+a^2+\bar{a}^2+\bar{a}=0$,

or $(a+\bar{a})^2 = a^2+2a\bar{a}+\bar{a}^2 = a^2+2+\bar{a}^2$, on retrouve bien la même relation.

7. Les solutions sont $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$, $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

8. $(a+\bar{a}) = e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{-i\frac{2\pi}{5}} = 2\cos\frac{2\pi}{5}$, donc en rempalçant dans $(a+\bar{a})^2+(a+\bar{a})-1=0$, on a $(2\cos\frac{2\pi}{5})^2+(2\cos\frac{2\pi}{5})-1=0 \Leftrightarrow 4\cos^2\frac{2\pi}{5}+2\cos\frac{2\pi}{5}-1=0$, $\cos\frac{2\pi}{5}$ est donc une des deux solutions précédentes. Comme il est forcément positif ($\frac{2\pi}{5} = 72° < 90°$), il vaut $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Exercice n° : 7

(E) : $z^3+2z^2-16=0$.

1. a. $2^3+2.2^2-16=0$ donc 2 est solution ; on développe :

$$(z-2)(az^2+bz+c) = az^3-2az^2+bz^2-2bz+cz-2c \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b-2a=2 \\ c-2b=0 \\ -2c=-16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=4 \\ c=8 \end{cases}$$

d'où $z^3+2z^2-16=(z-2)(z^2+4z+8)=0$.

b. $\Delta = 16-32=(4i)^2$ d'où les racines $z_1 = \frac{-4+4i}{2} = -2+2i = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $z_2 = \frac{-4-4i}{2} = -2-2i = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$.

2. $z_A = -2-2i$, $z_B = 2$ et $z_D = -2+2i$.

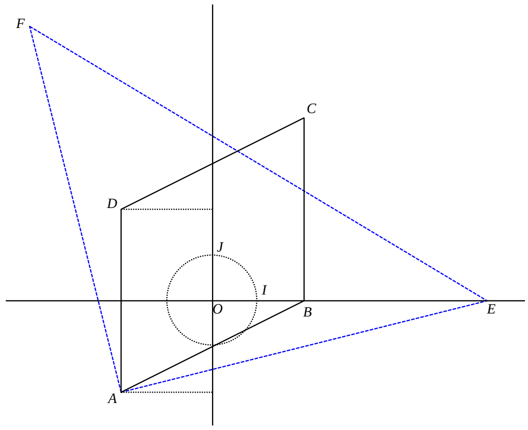
a. Figure ci-dessous.

b. On doit avoir $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow z_C - z_B = z_D - z_A \Leftrightarrow z_C = 2+(-2+2i)-(-2-2i) = 2+4i$.

3. a. $z_E - z_B = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_C - z_B) \Leftrightarrow z_E = 2-i(2+4i-2) = 6$

et $z_F - z_D = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_C - z_D) \Leftrightarrow z_F = -2+2i+i(2+4i+2-2i) = -2+2i-2+4i = -4+6i$

b. Voir figure.



4. a. $\dfrac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = \dfrac{(-4+6i)-(-2-2i)}{6-(-2-2i)} = \dfrac{-2+8i}{8+2i} = \dfrac{i(2i+8)}{8+2i} = i$.

b. On a donc $\left|\dfrac{z_F - z_A}{z_E - z_A}\right| = |\,i\,| = 1 \Leftrightarrow \dfrac{AF}{AE} = 1 \Leftrightarrow AF = AE$ donc *AFE* est isocèle en *A*. De même on a

$\arg \dfrac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = \arg i = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}) = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow AF \perp AE$, le triangle est rectangle.

c. Comme *I* est le milieu de l'hypothénuse du triangle rectangle isocèle *AEF*, les triangles *AIE* et *AIF* sont également rectangles isocèles. Par la rotation de centre *I* et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ on a donc *E* va en *A* et *A* va en *F*. Enfin comme *BE* = *AD* et (*BE*) est orthogonal à (*AD*), les triangles *EBA* et *ADF* sont isométriques donc *B* a pour image *D* (on peut le faire par le calcul).