Géométrie - notion : Transformations

1. Définition et propriétés

a) Définition

Une transformation est une **isométrie** si elle conserve les distances, c'est-à-dire que l'image d'un segment est un segment de même longueur.

b) Propriétés

Par une isométrie :

L'image d'une droite est une droite : on dit qu'**une isométrie conserve l'alignement.**

L'image d'un angle est un angle de même mesure : on dit qu'**une isométrie conserve les angles.**

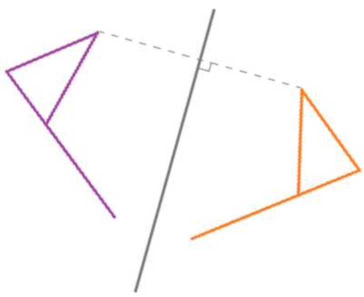
En particulier, l'image d'un couple de droites perpendiculaires est un couple de droites perpendiculaires : on dit qu'**une isométrie conserve la perpendicularité.**

L'image du milieu d'un segment est le milieu de l'image de ce segment : on dit qu'**une isométrie conserve la propriété de milieu.**

L'image d'un cercle est un cercle de même rayon et dont le centre est l'image du centre.

2. La symétrie axiale

a) Approche expérimentale et définition



Deux figures sont symétriques par rapport à une droite (d) lorsque par pliage sur la droite (d), elles se superposent.

Définition :

Le symétrique d'un point M par rapport à une droite (d) est :

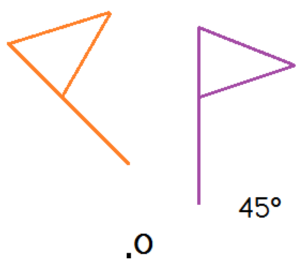
- Le point M' tel que (d) soit la médiatrice de [MM'], si M n'est pas sur la droite (d) ;
- Le point M lui-même si M est située sur la droite (d).

b) Propriétés de la symétrie axiale

La **symétrie axiale** est une **isométrie** et en a donc toutes les propriétés. L'ensemble des **points invariants** est l'**axe de symétrie.**

3. La rotation

a) Approche expérimentale et définition



Une figure (F') est l'image d'une figure (F) par une rotation de centre 0, et d'angle Δ et de sens direct (ou indirect) si, lorsqu'on fait « pivoter autour du point 0 » la figure (F) d'un angle Δ de sens direct (ou indirect), elle se superpose avec (F').

Définition :

Soit C un point donné et Δ un angle,

- Si M≠C, l'image du point M par rotation de centre C, d'angle de mesure Δ et de sens direct (respectivement indirect) est le point M' tel que :
  - CM' = CM
  - L'angle orienté ([CM) ; [CM')) = + Δ si le sens est direct (respectivement - Δ s'il est indirect).
- Si M = C alors M' = C ;

La rotation de centre C et d'angle de mesure Δ est notée $\mathscr{R}_{(C,\Delta)}$ si le sens est direct et $\mathscr{R}_{(C,-\Delta)}$ si le sens est indirect. On écrira M' = $\mathscr{R}_{(C,\Delta)}$ (M).

b) Propriétés de la rotation

La **rotation** est une **isométrie** et en a donc toutes les propriétés.

Le seul **point invariant** par une rotation d'angle non nul est le **centre de la rotation.**

Cas particulier :

La **symétrie centrale** est une rotation dont le centre est le centre de la symétrie et l'angle est 180° de sens quelconque.

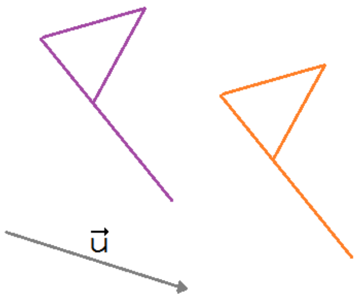
3. La translation

a) Vecteur

Un vecteur se caractérise par un sens, une direction (correspondant à un faisceau de droites toutes parallèles) et une longueur (appelée aussi norme).

b) Approche expérimentale et définition

Une figure (F') est l'image d'une figure (F) par une translation si, en la faisant glisser sans la retourner, elle vient se superposer à la figure (F).



Définition

Soit un vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. L'image du point M par la translation de vecteur $\vec{u}$ est le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

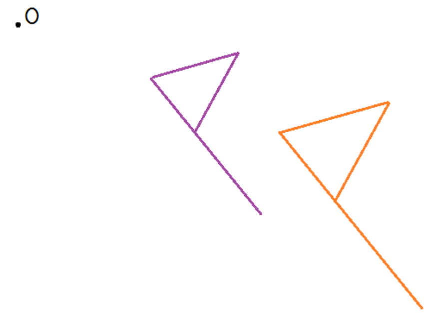
La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ se note $t_{\overrightarrow{AB}}$. On écrira M' = $t_{\overrightarrow{AB}}$ (M).

c) Propriétés de la translation

La **translation** est une **isométrie** et en a donc toutes les propriétés. Il n'y a **pas de point invariant** par une translation de vecteur non nul.

4. L'homothétie

a) Approche expérimentale et définition



Une figure (F') est l'image d'une figure (F) par une homothétie si c'est un agrandissement ou une réduction de (F) tel que les côtés images l'un de l'autre restent parallèles.

Définition :

Soient k un réel non nul et O un point. L'image du point M par l'homothétie de centre O et de rapport k est le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k \times \overrightarrow{OM}$.

L'homothétie de centre O et de rapport k se note $\mathcal{H}_{(O,\,k)}$. On écrira M' = $\mathcal{H}_{(O,\,k)}$ (M).

b) Propriétés de l'homothétie

Si k = 1, l'homothétie est l'identité c'est-à-dire la transformation qui à tout point associe le même point ;

Si k = -1, l'homothétie est la symétrie central de centre le centre de l'homothétie.

Dans ces deux cas, et dans ces deux cas seulement, l'homothétie est une isométrie.

De façon générale, une homothétie n'est pas une isométrie.

Elle a les propriétés suivantes :

- L'image d'une droite est une droite (l'homothétie conserve l'alignement) qui lui est parallèle (l'homothétie conserve la direction).
- L'image d'un segment est un segment mais il n'est pas de même longueur, sauf lorsque k = 1 ou k = -1.
- L'image d'un angle est un angle et il est de même mesure.
- L'image du milieu d'un segment est le milieu de l'image de ce segment : on dit que l'homothétie conserve le milieu.
- L'image d'un cercle de rayon r est un cercle de rayon kr si k positif et -kr si k négatif et dont le centre est l'image du centre.

Le seul point invariant est le centre de l'homothétie lorsque $k \neq 1$ (si k = 1, tous les points sont invariants).