Géométrie – transformation du plan.

I. Cercle 2
A. Définitions 2
B. Positions relatives d'une droite et d'un cercle 2
C. Positions relatives de deux cercles 2
II. Triangle 2
A. Construction à la règle et au compas d'un triangle dont on connaît les longueurs des 3 cotés 2
B. Médiane et centre de gravité 2
1. Définition. 2
2. Propriétés. 2
C. Hauteur et orthocentre 2
1. Définition. 2
2. Propriété. 3
D. Médiatrices et centres du cercle circonscrit. 3
1. Définition 3
2. Propriété (démontrable). 3
E. Bissectrice et centre du cercle inscrit 3
1. Définition. 3
2. Propriété. 3
F. Triangles particuliers 3
III. Autres polygones 3
A. Polygones 3
1. Définitions. 3
2. Dénomination des polygones. 4
3. Propriétés. 4
B. Quadrilatères particuliers 4
IV. Quelques transformation planes 4
A. Isométrie. 4
B. Translations 4
1. Définition 4
2. Propriétés fondamentales. 4
3. Construction de l'image d'un point par une translation. 4
4. Images. 4
5. Propriétés des translations 4
C. Symétries centrales 5
1. Définition. 5
2. Images. 5
3. Propriétés des symétries centrales 5
D. Symétries axiales ou symétries orthogonales par rapport à un axe 5
1. Définition. 5
2. Images 5
3. Propriétés des symétrie axiales. 5
E. Projections 5
1. Définition. 5
2. Propriété fondamentale. 5
F. Homothétie 5
1. Définition. 5
2. Images 5
3. Propriétés. 5
G. Rotations 5
1. Orientation du plan. 5
2. Définition des rotations. 5
3. Images. 5
4. propriétés 5
H. Composition de transformations 6
1. Définition générale. 6
2. Exemple : homothétie négative. 6
I. Cas d'isométrie des triangles. 6
V. La géométrie des formes et des transformations à l'école 6
A. Les activités et les supports. 6
B. Les contenus géométriques 6
C. Les difficultés 6
1. Les difficultés liées au support. 6
2. Les difficultés liées à la complexité de la figure. 6
3. Les difficultés liées au vocabulaire 6
4. Les difficultés liées aux instruments 6

I. Cercle

A. Définitions

Le cercle C de centre O et de rayon R est l'ensemble des points M tels que OM = R.
Le disque de centre O et de rayon R est l'ensemble des points M tels que OM ≤ R.
Rayon :

- Segment ayant pour extrémités le centre et un point du cercle
- La longueur de ce segment

Un diamètre du cercle C est un segment dont les deux extrémités sont points du cercle et qui passe par le centre.
Une corde du cercle C est un segment [AB] dont les deux extrémités A et B sont des points de C.

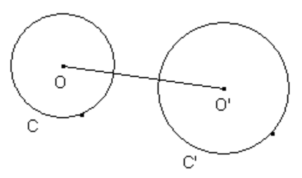
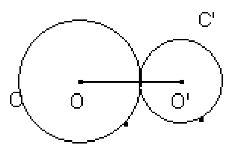
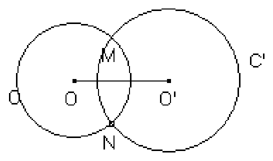
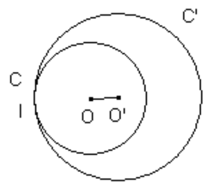
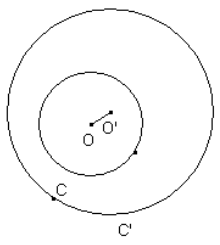
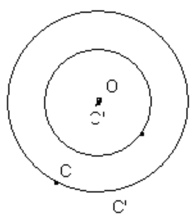
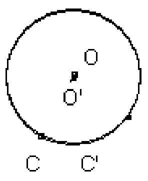
B. Positions relatives d'une droite et d'un cercle

Soit C le cercle de centre O et de rayon R, d une droite et I le pieds de la perpendiculaire abaissée de O sur d. le nombre de points d'intersection du cercle C avec la droite d dépend de la distance du centre O à la droite d, la distance OI.

- Si OI > R : pas d'intersection. d est extérieure à C
- Si OI = R : un point d'intersection : I. la droite d est tangente à C en I
- Si OI < R : 2 points d'intersection. C et d sont sécants.

C. Positions relatives de deux cercles

Soient C et C', deux cercles de centres respectifs O et O' et de rayons respectifs R et R' avec par hypothèse R > R'. Le nombre de point d'intersection est fonction de OO'.

OO' > R + R'	pas de point d'intersection. Les deux cercles sont extérieurs l'un à l'autre	
OO' = R + R'	un point d'intersection I. Les deux cercles sont tangents extérieurement l'un à l'autre et O, I et O' sont alignés.	
R-R' < OO' < R + R'	2 points d'intersection et les cercles sont dits sécants.	
0 < OO' = R – R'	Un seul et unique point d'intersection I. O, I et O' sont alignés. C est tangent intérieurement à C'.	
0 < OO' < R – R'	Pas de point d'intersection. C est intérieur à C'	
OO' = 0.et R' < R	Pas de point d'intersection Les cercles sont concentriques	
OO' = 0 et R = R'	Infinité de points les deux cercles sont confondus	

II. Triangle

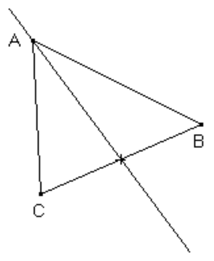
A. Construction à la règle et au compas d'un triangle dont on connaît les longueurs des 3 cotés

=> pas toujours possible.
Si chacune des longueurs est inférieure à la somme des deux autres c'est possible. Si l'une des longueurs est µ la somme des deux autres, c'est impossible.

B. Médiane et centre de gravité

1. Définition.

La médiane issue de A dans le triangle ABC est la droite qui joint le sommet A au milieu du coté opposé [BC]. Ce nom désigne à la fois la droite, le segment et parfois la longueur.



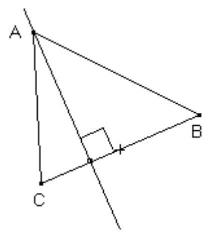
2. Propriétés.

Les médianes d'un triangle quelconque ABC sont concourantes. Leur point d'intersection G est le **centre de gravité** du triangle ABC.
Le centre de gravité du triangle est situé au 2/3 de chaque médiane à partir du sommet.

C. Hauteur et orthocentre

1. Définition.

La hauteur issue de A dans le triangle ABC est la perpendiculaire à (BC) passant par A.



2. Propriété.

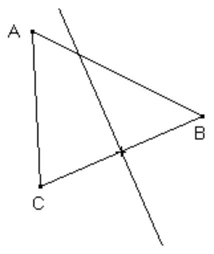
Les trois hauteurs d'un triangle quelconque ABC sont concourantes. Leur point d'intersection est **l'orthocentre**.

Si le triangle à un angle obtus alors l'orthocentre est situé en dehors du triange.

D. Médiatrices et centres du cercle circonscrit.

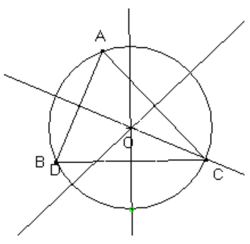
1. Définition

La médiatrice du côté [BC] est la perpendiculaire à (BC) passant par A.



2. Propriété (démontrable).

Les 3 médiatrices sont concourantes au centre du **cercle circonscrit** au triangle.



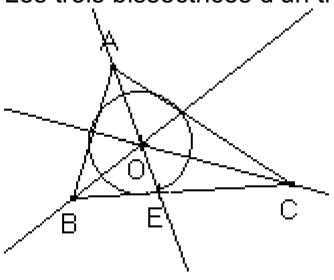
E. Bissectrice et centre du cercle inscrit

1. Définition.

La bissectrice de l'angle $\hat{A}$ du triangle ABC est la droite passant par A qui partage l'angle en deux angles de même mesure.

2. Propriété.

Les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes au **centre du cercle inscrit**.



F. Triangles particuliers

Triangle	Définition	Propriétés
Triangle isocèle	Deux cotés de même longueur. Le triangle ABC est isocèle de sommet principal A si AB =AC	• Le triangle ABC est isocèle de sommet principal A si et seulement si les angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$ sont égaux • Si le triangle ABC est isocèle de sommet principal A alors les quatre droites : hauteur issue de A, médiane issue de A, bissectrice de l'angle $\hat{A}$ et médiatrice de la base [BC] sont confondues et inversement.
Triangle équilatéral	Les trois cotés sont de même longueur.	• Un triangle est équilatéral si et seulement si ses angles mesurent tous 60°. • Un triangle est équilatéral si et seulement s'il est isocèle et possède un angle de 60°. • Si le triangle ABC est équilatéral alors les points centre de gravité, orthocentre, centre du cercle inscrit, centre du cercle circonscrit sont confondus, et inversement.
Triangle rectangle	Un triangle est rectangle s'il a deux côtés perpendiculaires.	• Un triangle ABC est rectangle en A si et seulement si cercle de diamètre [BC] passe par A ou si et seulement si le centre de son cercle circonscrit est le milieu de [BC].
Triangle rectangle isocèle	Les angles à la base valent chacun 45°	

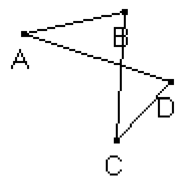
III. Autres polygones

A. Polygones

1. Définitions.

n désignant un entier naturel supérieur ou égal à 3, un polygone à n côtés est une ligne brisée fermée constituée de n segments et n'ayant pas 3 sommets consécutifs alignés.

Un polygone est dit croisé si deux côtés non consécutifs sont sécants

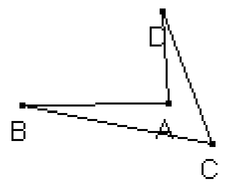


Une diagonale d'un polygone est un segment joignant deux sommets non consécutifs.

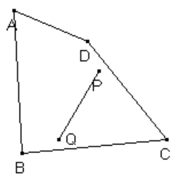
Tout polygone non croisé délimite deux régions du plan, l'une dite intérieure au polygone et l'autre extérieure au polygone.

Aucune droite ne peut être entièrement incluse dans une région intérieure.

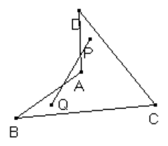
La région extérieure contient des droites.



Un polygone est convexe si quelque soient les points P et Q intérieurs au polygone le segment [PQ] est entièrement à l'intérieur du polygone.



Dans le cas contraire, il n'est pas convexe.



Un polygone est régulier lorsque tous ses côtés ont même longueur et lorsque ses angles saillants formés par deux côtés consécutifs sont tous égaux.

2. Dénomination des polygones.

Nombres de sommets	Nom	Nom lorsqu'il est régulier
3	Triangle	Triangle équilatéral
4	Quadrilatère	Carré
5	Pentagone	Pentagone régulier
6	Hexagone	Hexagone régulier
7	Heptagone	Heptagone régulier
8	Octogone	Octogone régulier
9	Ennéagone	Ennéagone régulier
10	Décagone	Décagone régulier
11	Hendécagone	Hendécagone régulier
12	Dodécagone	Dodécagone régulier

Un polygone régulier croisé est dit étoilé.

3. Propriétés.

Etant donné un polygone non croisé quelconque et deux points A et B distincts et n'appartenant pas au polygone, l'un intérieur et l'autre extérieur, le segment [AB] coupe le polygone en au moins un point.

Etant donné un polygone quelconque et un point A intérieur au polygone et ne lui appartenant pas, toute droite passant par A coupe le polygone en au moins deux points.

Si un polygone est régulier, il existe un cercle qui passe par tous ses sommets, on l'appelle cercle circonscrit au polygone.

Somme des angles intérieurs d'un polygone non croisé : pour n côtés et n > 2 : (n-2) x 180°.

Mesures d'un angle au centre : 360° / n

Mesure d'un angle au sommet : $\dfrac{(n-2)x180°}{n}$

B. Quadrilatères particuliers

Quadrilatère	Définition	Propriété
parallélogramme	Un quadrilatère est un parallélogramme s'il a deux paires de côtés opposés parallèles.	• Les diagonales se coupent en leur milieu. • Les cotés opposés ont deux à deux même longueur.
Losange	Un losange est un quadrilatère dont les 4 côtés ont la même longueur.	• Ses diagonales sont médiatrices l'une de l'autre => les diagonales se coupent en leur milieu et sont perpendiculaire. • Tout losange est un parallélogramme.
rectangle	Un quadrilatère est un rectangle si chaque sommet est le sommet d'un angle droit.	• Tout rectangle est un parallélogramme. • Les diagonales ont même longueur • Tout rectangle est inscriptible dans un cercle centré au point d'intersection de ses diagonales
carré	Un carré est un rectangle qui a deux cotés consécutifs de même longueur.	• Tout carré est un losange • Les diagonales sont perpendiculaires et de même longueur • Inscriptible dans un cercle centré au point de rencontre de ses diagonales.
trapèze	Un quadrilatère convexe est un trapèze s'il a deux cotés opposés parallèles. • Le plus grand est appelé grande base et le plus petit petite base.	
Trapèze isocèle	Un trapèze de bases [AB] et [CD] est trapèze isocèle si $\widehat{ADC} = \widehat{BCD}$ ou si $\widehat{DAB} = \widehat{ABC}$	• Si ABCD est un trapèze isocèle de bases [AB] et [CD] alors (AB) // (CD) et $\widehat{ADC} = \widehat{BCD}$, $\widehat{DAB} = \widehat{ABC}$ et AD = BC
Trapèze rectangle	Un trapèze est dit rectangle s'il a un angle droit	• Au moins deux angles droits

IV. Quelques transformation planes

A. Isométrie.

On dit qu'une transformation est une isométrie si elle satisfait aux trois propriétés suivantes :

- tout point du plan a une image unique
- tout point du plan a un antécédent unique
- étant donné deux points quelconques M et N du plan, leurs images respectives M' et N' vérifie M'N' = MN. : l'isométrie conserve les distances ;

B. Translations

1. Définition

Etant donné des points fixes A et A' le translation t transformant A en A' associe à tout point M le point M' tel que les segments [AM'] et [A'M'] aient même milieu.

2. Propriétés fondamentales.

- Lorsque M ϖ (AA'), M' est l'image de M par la translation t si et seulement si AA'M'M est un parallélogramme.
- Lorsque M χ (AA'), M' est l'image de M par la translation t transformant A en A' si et seulement si M χ (AA'), AA' = M'M et AM = A'M'.

3. Construction de l'image d'un point par une translation.

On peut soit s'appuyer sur la définition, soit utiliser un procéder découlant de l'utilisation d'un parallélogramme.

4. Images.

L'image d'une droite par une translation est une droite qui lui est parallèle. Elle est formée des images des points de la droite antécédent..

L'image d'un cercle de centre O et de rayon R par la translation t est le cercle de centre O' = t(O) et de même rayon.

5. Propriétés des translations

- Si A et A' sont distinct, aucun point n'est invariant par la translation transformant A en A'.
- Les translations sont des isométrie.
- Les translations conservent l'alignement, les angles et les aires.

C. Symétries centrales

1. Définition.

Etant donné un point fixe O, la symétrie s_O de centre O associe à tout point M le point M' tel que O soit le milieu de [MM'].

2. Images.

L'image d'une droite par une symétrie centrale est une droite qui lui est parallèle.

➔ Soit d une droite passant par O. d est invariante par s_O.

L'image du cercle de centre I et de rayon R par une symétrie s_O est le cercle de centre I' = s_O(I) et de même rayon R.

➔ les cercles de centre O sont globalement invariant mais en réalité les points sont inversés sur le cercle.

3. Propriétés des symétries centrales

- O est sont propre symétrique. C'est le seul invariant.
- Les symétries centrales sont des isométries.
- La symétrie centrale conserve l'alignement, les milieux, les angles et les aires.

D. Symétries axiales ou symétries orthogonales par rapport à un axe

1. Définition.

Etant donné une droite d, la symétrie s_d d'axe d associe à tout point M :

- Le point M' tel que d soit la médiatrice du segment [MM'] si M n'appartient pas à d
- Le point M lui-même si M est sur d.

2. Images

- L'image d'une droite par symétrie axiale est une droite.
  - L'image de d par s_d est d elle-même par définition.
  - Une droite perpendiculaire à d est invariante par s_d.
  - Une droite parallèle à d à pour image une droite parallèle à elle-même.
- Les images de deux droites parallèles par une symétrie axiale dont deux droites parallèles.
- Les images de deux droites sécantes en I par une symétrie axiale s_d sont deux droites sécantes en I'=s_d(I).
- L'image du cercle de centre O et de rayon R par la symétrie axiale s_d est le cercle de centre O'= s_d(O) et de même rayon R.

3. Propriétés des symétrie axiales.

- Les points de l'axe d sont les seuls points invariants par la symétrie axiale s_d d'axe d.
- Les symétries axiales sont des isométrie.
- Les symétries axiales conservent l'alignement, les milieux, les angles et les aires.

E. Projections

1. Définition.

a) Cas général.

Etant donné deux droites sécantes d et d', la projection p du plan sur d parallèlement à d associe à tout point M le point M', intersection de d et de la parallèle à d' passant par M.

M' est le projeté de M sur d parallèlement à d'.

b) Cas particulier : la projection orthogonale.

Etant donné une droite d, la projection orthogonale p' du plan sur d associe à tout point M le point M', intersection de d et de la perpendiculaire à d passant par M.

2. Propriété fondamentale.

Etant donné une projection p parallèlement à d' sur une droite d et une droite d1 du plan, si M et N sont deux points quelconques de d_1 d'images respectives M' et N', alors le rapport $\frac{M'N'}{MN}$ est indépendant de M et N. Ce rapport est appelé rapport de projection de d_1 sur d par p.

F. Homothétie

1. Définition.

Soient un point O et un réel strictement positif k, l'homothétie h de centre O et de rapport k associe à tout point M le point M' tel que OM' = k OM et tel que si M <> O, M' appartienne à [OM)

2. Images

L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle.

L'image du cercle de centre I et de rayon R par l'homothétie h est le cercle de centre I'= h(I) et de rayon kR.

3. Propriétés.

- Etant donné un point O et un nombre réel strictement positif k différent de 1, O est le seul point invariant par l'homothétie de centre O et de rapport k.
- Les homothétie de rapport k > 0 multiplient les distances par k.
- Les homothéties conservent l'alignement, les milieux, les angles
- Les homothéties multiplient les aires par k².

G. Rotations

1. Orientation du plan.

Soit O un point et C un cercle de centre O. On considère un point M variable se déplaçant sur C sans changer de sens.

- Sens des aiguilles d'une montre : sens rétrograde.
- Sens inverse : sens direct.

2. Définition des rotations.

Etant donné un sens de rotation, un point O et un angle α, la rotation r de centre O et d'angle α dans le sens choisi associe à tout point M le point M' tel que OM' = OM et si M <> O, le sens de rotation de M à M' autour de O étant le sens choisi.

3. Images.

L'image d'une droite par une rotation est une droite.

L'image du cercle de centre I et de rayon R par la rotation r est le cercle de centre I'=r(I) et de même rayon R.

4. propriétés

- le centre O d'une rotation r d'angle α non nul est le seul point invariant par cette rotation.
- Les rotations sont des isométries.
- Les rotations conservent l'alignement, les milieux, les angles et les aires.

H. Composition de transformations

1. Définition générale.

Etant donné deux transformations du plan t1 et t2, composer les transformations t1 et t2 (dans cet ordre) consiste, pour un point M quelconque du plan, à trouver son image M' par t1, puis à trouver l'image M'' de M' par t2.

L'ordre des transformations à une importance.

2. Exemple : homothétie négative.

Etant donné un point O et un nombre k > 0, l'homothétie de centre O et de rapport –k est la transformation qui à tout point M du plan associe le point M' tel que OM' = kOM, O, M et M' soient alignés et O soit placé entre M et M'.

En fait, il s'agit de la composée d'une homothétie de centre O et de rapport k et de la symétrie de centre O.

I. Cas d'isométrie des triangles.

- Si deux triangles ont leurs cotés deux à deux de même longueur alors ils sont isométriques.
- Si deux triangles ont deux côtés deux à deux de même longueur et les secteurs délimités par ces côtés de même angle, ils sont isométriques.
- Si deux triangles ont deux secteurs deux à deux de même angle et des côtés placés entre ces deux secteurs de même longueur, ils sont isométriques.

V. La géométrie des formes et des transformations à l'école

Attention il s'agit des programmes de 1995.

A. Les activités et les supports.

	Cycle 1	Cycle 2	Cycle 3
Activités	A1 : Travail sur des objets. Coloriage de formes et de pavages. Puzzles et mosaïques.	A2 : A1 + Pliage. Découpage Reproductions sur quadrillage Description de quelques figures simples et repérages de propriétés. Reconnaître une symétrie axiale Trouver un axe de symétrie Compléter une figure en utilisant la symétrie axiale ou la translation	A3 : A2 + Reproduire, Décrire, Représenter, Construire.
Supports	S1 : Gabarits de forme, Papier calque	S2 : S1 + Règle graduée Equerre Gabarit d'angle Papier quadrillé	S3 : S2 + *Compas* (heu je l'ai vu au cycle 2 – CE1), Rapporteur Guide-âne[1] Papier-blanc

B. Les contenus géométriques

	Cycle 1	Cycle 2	Cycle 3
Positions et positions relatives	P1 : Repérage Déplacement Vocabulaire de localisation Frontière, région	P2 : P1 + Repérage de points et de positions Parallélisme Orthogonalité	P3 : P2 + *Réaliser des plans* (je l'ai vu dans Picbille Cp !), des maquettes Réaliser un programme de construction
Formes du plan et de l'espace	F1 : Solides Reconnaissance et désignation de quelques formes planes	F2 : F1 + Polyèdres, Carré, rectangle Triangle Décomposition de formes complexes en figures simples.	F 3 : F2 + quadrilatères Cercles et polygones Triangles particuliers Droites remarquables Polyèdres et leurs patrons
Transformation du plan	T1 : Approche de la symétrie axiale	T2 : T1 + Approche de la translation	T3 : T2 + Agrandissement réduction

C. Les difficultés

1. Les difficultés liées au support.

Le papier quadrillé est une aide. Il crée des obstacles en privilégiant des directions particulières.

2. Les difficultés liées à la complexité de la figure.

Savoir changer de point de vue, savoir composer et décomposer une figure complexe en figures simples est un apprentissage qui prends du temps .

Lorsque les traits de construction d'une figure n'apparaissent pas, il peut être très difficile de les recréer par la pensée.

3. Les difficultés liées au vocabulaire

Les mots de géométrie sont parfois sources de confusions avec les mots de langage courant (ex : milieu, moitié, centre…)

4. Les difficultés liées aux instruments

Les jeunes enfants sont malhabiles pour tenir une règle et tracer en même temps un trait.

Repérer l'angle droit de l'équerre, utiliser un rapporteur est souvent difficile.

Usuellement le compas n'est reconnu par les élèves que comme un outil servant à tracer des cercles alors qu'il peut également servir à reporter des longueurs.

[1] http://www.jlsigrist.com/guideane.html