Ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, D, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

1 ACTIVITÉ

Dans le tableau suivant, indiquer dans chaque colonne par **oui** ou par **non** suivant que le nombre appartient ou n'appartient pas à l'ensemble indiqué

nombre	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	D	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
3.14					
$\frac{15}{3}$					
$\frac{5\sqrt{3}}{-3}$					
π					
2.2525					
$\frac{18}{-7}$					
0					
-5^2					
$\frac{34}{10^{23}}$					
2.4×10^{12}					
3.44×10^{-15}					

2 Définitions :

2.1 Définition :

$\mathbb{N}$ Est l'ensemble des entiers naturels

$$\mathbb{N} = \{0,1,2,3, \dots \dots\}$$

2.2 Définition :

$\mathbb{Z}$ Est l'ensemble des entiers relatifs

$$\mathbb{Z} = \{\dots \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \dots\}$$

2.2.1 Remarque

Les entiers naturel est un entier relatif

Donc on a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

2.2.2 Définition :

L'ensemble des nombres decimaux est noté D,est constitue de tous les quotients d'un entier reletif par une puissance de 10 c.à.d $d = \frac{r}{10^n}$ ***,avec*** $c\epsilon\mathbb{Z}$ et $n\epsilon\mathbb{N}$ ***. Ainsi :***

$$D = \left\{\frac{r}{10^n}, r\epsilon\mathbb{Z} \text{ et } n\epsilon\mathbb{N}\right\}$$

Autrement dit : un nombre qui s'écrit avec un nombre fini de chiffre et une virgule

2.2.3 Exemple :

$$453,37 = \frac{45337}{10^2}$$

453 *est appelé la partie entière , et* 37 *la partie décimale*

2.2.4 Remarque

Soit n un entier relatif on a : $n = \frac{n}{10^0}\epsilon D$

Donc $\mathbb{Z} \subset D$ ***ainsi*** $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \boldsymbol{D}$

2.3 Définition

L'ensemble des nombres rationnels note $\mathbb{Q}$ ***, est constitué des nombres de la forme*** $\frac{p}{q}$ ***tel que avec*** $p\epsilon\mathbb{Z}$ et $q\epsilon\mathbb{N}^*$

2.3.1 Remarque

- ***Un nombre rationnel peut ne pas être décimal***
- ***Un nombre décimal est rational***

Ainsi on a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \boldsymbol{D} \subset \mathbb{Q}$

2.3.2 Exemple

- $\frac{2}{3} = 0{,}66666\ldots$ ***on écrit*** $0,\overline{6}$
- $0,\overline{123}$ ***on pose*** $x = 0,\overline{123}$

On a :

$$1000 \times x = 123 + x$$
$$1000x - x = 123$$
$$999x = 123$$

Par conséquent : $x = \frac{123}{999}\epsilon\mathbb{Q}$

3 Ensemble des nombres réels

3.1 Activité

- ***Montrer que*** $\sqrt{2}$ ***n'est rationnel***
- ***Soit ABCD un carre dont le cote est 1***
  Déterminer la diagonal de ABCD

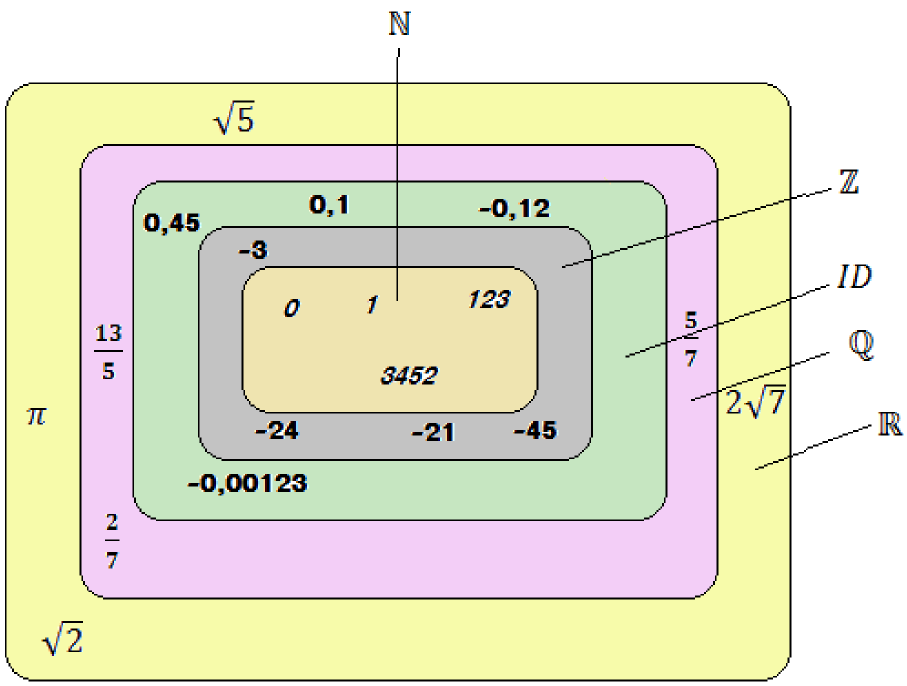
3.2 Définition

- ***Il existe des nombres qui ne sont pas rationnels, on les appels nombres irrationnels*** $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π *etc*
- ***L'ensemble formé de nombres rationnels et irrationnels est appelé ensemble de nombre réels noté*** $\mathbb{R}$

3.2.1 Résultat

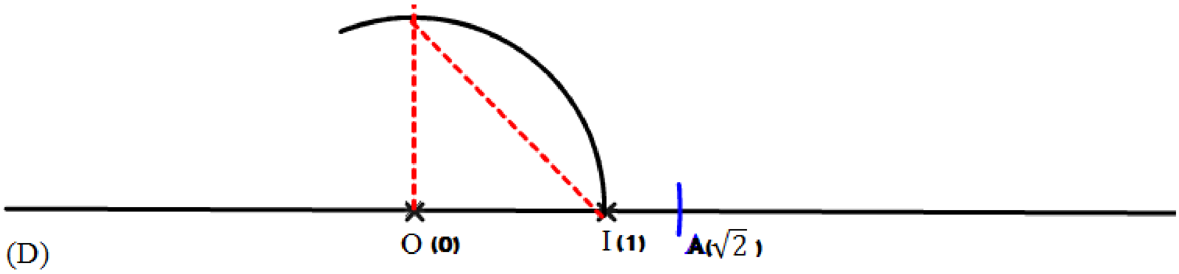
Comme les rationnels sont de réels on déduit :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset D \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$



3.2.2 Représentation de $\mathbb{R}$ sur une droite

Soit (D) ***une droite graduée O son origine et soit I tel que*** $OI = 1$



Chaque point de la droit correspond à un nombre réel et réciproquement . on parle ainsi de la droite réelle

4 Operations dans $\mathbb{R}$

4.1 Somme

Soit a et b deux nombres réels : On a :

- $a+b=b+a$ la somme est commutative
- $(a+b)+c=a+(b+c)$ la somme est associative
- $a+0=0+a$ 0 est l'élément neutre pour
- $a+(-a)=(-a)+b$ $-b$ est l'opposé de b

4.2 Remarque :

- $a-b=a+(-b)$
- $-(a-b)=-a\pm b=b-a$
- $a=b$ équivalent à $a+c=b+c$
- Si $\begin{cases} a=b \\ c=d \end{cases}$ équivalent à $a+c=b+d$

4.3 Multiplication dans $\mathbb{R}$

- $a\times b=b\times a=ab=ba$
- $a(bc)=(ab)c=(ac)b=abc$
- $1\times a=a\times 1=a$
- $si\ a\neq 0\ alors\ \ a\times\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\times a=\frac{a}{a}=1$
- $\frac{1}{a}$ $\ est\ l'iversede\ a\ ,\ \ a\neq 0$
- $a=b\ est\ equivalant$ à $ac=bc$, $(c\neq 0)$
- Si $\begin{cases} a=b \\ c=d \end{cases}$ équivalent à $ac=bd$

4.4 Les fractions

- $\frac{a}{b}=a\times\frac{1}{b}$ $(b\neq 0)$on dit que $\frac{a}{b}$ fraction de a par b ou (est le quotient de a par b)

4.4.1 Propriétés des fractions

- $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$ le dénominateur est réduit
- $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ et $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$ réduction au même dénominateur
- $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ et $k\times\frac{a}{b}=\frac{k\times a}{b}$

- $\frac{1}{\frac{a}{b}}=\frac{b}{a}$ **et** $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{ad}{bc}$ **diviser deux fraction c'est multiplier par l'inverse**

4.4.2 Propriétés équivalentes

- $\frac{a}{c}=c$ *est equivalent à* $a=bc$
- $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ *est equivalent à* $ad=bc$ (*produit en croix*)
- $\frac{a}{b}=0$ *est equivalent à* $a=0$ **(fraction nul c.à.d. numérateur nul)**

4.4.3 Proportionnalité

Définition

a, b, c et d des réels tels que $c\times d\neq 0$ **non nuls**
On dit que a et sont proportionnels à c et d si et seulement si $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

5 Racine carré d'un nombre réel ;

Pour tout nombre réel positif x et tout réel y on a : $\sqrt{x}=y$ *est équivalent à* $\begin{cases} x=y^2 \\ y\geq 0\end{cases}$

5.1 Propriétés des racines carrées

Pour tout $a\in\mathbb{R}^+$ **et** $b\in\mathbb{R}^+$

- $(\sqrt{a})^2=a$ **et** $(\sqrt{a})^n=\sqrt{a^n}$, $n\in\mathbb{Z}$
- $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$
- $\sqrt{\frac{1}{a}}=\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{a}$ **et** $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$ $a\,,b\in\mathbb{R}^{*+}$
- $\sqrt{a}=0$ *est équivalent à* $a=0$

5.2 Propriétés des puissances

Soient $a\in\mathbb{R}^*$, $b\in\mathbb{R}^*$ et $n\in\mathbb{N}$, $\in\mathbb{N}$

- $a^0=1$, $a^1=a$, $a^n\times a^m=a^{n+m}$