Proposition de corrigé pour l'exemple de sujet écrit de mathématiques pour le CRPE 2014

Première partie
Problème

Partie A

1. Les triangles ABC et DEB ont leurs trois côtés de même longueur, ils sont donc superposables. Il en résulte que l'angle $\widehat{ABC}$, formé par les côtés de longueurs a et c d'un de ces triangles et l'angle $\widehat{BED}$, formé par les côtés de longueurs a et c de l'autre triangle, sont égaux.

Or, dans un triangle rectangle, la somme des angles aigus mesure 90°.

Dans le triangle rectangle DEB, on a donc $\widehat{BED}+\widehat{DBE}$ = 90°

Il en résulte que $\widehat{ABC}+\widehat{DBE}$ = 90° et, l'angle $\widehat{CBE}$ étant droit, que $\widehat{ABC}+\widehat{CBE}+\widehat{DBE}$ =180°.

Or $\widehat{ABC}+\widehat{CBE}+\widehat{DBE}$ = $\widehat{ABD}$.

L'angle $\widehat{ABD}$ est donc plat, ce qui revient à dire que les points A, B et D sont alignés.

2. Par hypothèse, (CA) est perpendiculaire à (AB) et (DE) est perpendiculaire à (BD).
Il découle de la question précédente que les droites (AB) et (BD) sont confondues.
Les droites (CA) et (DE) sont donc perpendiculaires à une même troisième droite et en conséquence parallèles entre elles.
Le quadrilatère ADEC, donc les côtés [AC] et [DE] sont parallèles, est un trapèze.

3.Nous allons exprimer l'aire du quadrilatère ADEC, que nous noterons $A_{(ADEC)}$ comme somme des aires des trois triangles, puis en utilisant la formule de calcul de l'aire d'un trapèze.

a) $A_{(ADEC)} = \dfrac{bc}{2}+\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{bc}{2} = bc+\dfrac{a^2}{2}$

b) $A_{(ADEC)} = \dfrac{(b+c)\times(b+c)}{2} = \dfrac{b^2+c^2+2bc}{2} = bc+\dfrac{b^2+c^2}{2}$

4. Il résulte de la question précédente que $bc+\dfrac{a^2}{2} = bc+\dfrac{b^2+c^2}{2}$ donc que $\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{b^2+c^2}{2}$ et que $a^2=b^2+c^2$

Partie B

1. La droite (OV) est tangente en V au cercle (C), donc elle est perpendiculaire au rayon [AV], le triangle OAV est donc rectangle en V.

Dans le calcul qui suit, on notera r la longueur en km du rayon terrestre.
En appliquant le théorème de Pythagore au triangle rectangle OAV, on obtient :
$(r+OM)^2 = OV^2+r^2$, d'où $OV^2=(r+OM)^2-r^2$ puis $OV^2=r^2+2r\times OM+OM^2-r^2$ et
$OV^2=2r\times OM+OM^2$.

OV étant un nombre positif, il résulte de l'égalité précédente que $OV = \sqrt{OM^2 + 2r \times OM}$.
Il suffit alors de remplacer r par la valeur numérique fournie pour obtenir
$OV = \sqrt{OM^2 + 12740 \times OM}$

2. La portée visuelle théorique demandée sera obtenue à l'aide de la calculatrice, en remplaçant dans la formule précédente OM par 0,0017 puisque les longueurs doivent être exprimées en km. En arrondissant au dixième de kilomètre près la valeur fournie par la machine, on obtient une portée visuelle théorique de 4,7 km.

3. Sur le graphique fourni, on peut lire que :
   1) Pour avoir une portée visuelle théorique de 100 km, il faut se situer à une altitude légèrement inférieure à 800 mètres.
   2) à 350 mètres d'altitudes, la portée visuelle théorique est d'environ 65 km, c'est insuffisant pour voir la mer de la tour Eiffel (on peut aussi utiliser la question précédente : comme la mer est à plus de 100 km de Paris, il faut pour la voir être à une altitude supérieure à 800 m).
   3) L'affirmation est fausse. Voici un contre-exemple : la distance de vision théorique est d'un peu plus de 100 km à 800 m d'altitude, mais elle est inférieure à 150 km à 1600 m d'altitude. On peut aussi utiliser le fait que la phrase «si une des deux grandeurs double, l'autre double aussi» caractérise une relation de proportionnalité entre deux grandeurs. Si les deux grandeurs étaient proportionnelles, le graphique serait une demi-droite ayant pour origine l'origine du repère, ce qui n'est pas le cas.

Deuxième partie
Exercices indépendants

Exercice 1

Pour que Suzy gagne un prix, il faut que la roulette s'arrête sur un nombre pair (probabilité de $\frac{5}{6}$ si la roulette est équilibrée) puis qu'elle tire une bille noire (probabilité de $\frac{6}{20}$ si les billes sont identiques et indiscernables au toucher).

La probabilité que ces deux évènements surviennent est de $\frac{5}{6} \times \frac{6}{20}$ soit $\frac{5}{20}$ ou encore $\frac{1}{4}$.

Exercice 2

Soit M la moyenne, la somme des 15 valeurs est égale à 15M.
Pour que la moyenne soit conservée, il faut que la somme des 14 valeurs restantes soit 14M, il faut donc supprimer une valeur égale à la moyenne. (*Il nous semble probable que si cette conclusion est affirmée sans être prouvée elle sera tout de même acceptée*).

Nous devons donc calculer la moyenne des 15 valeurs fournies.

$$\frac{268 + 220 + 167 + 211 + 266 + 152 + 270 + 279 + 192 + 191 + 164 + 229 + 223 + 222 + 246}{15} = 220$$

C'est donc la valeur 220 qu'on peut supprimer sans modifier la moyenne.

Exercice 3

1. A vitesse constante, si on parcourt 5 km en 17 min 30 s, on parcourt :
2,5 km en 8 min 45 s
10 km en 35 min
20 km en 70 min soit 1 heure 10 minutes
40 km en 2 heures 20 minutes
42,5 km en 2 h 28 mn 45 s.

Le coureur mettrait alors moins de 2 h 30 min pour parcourir 42,195 km, il a raison.

2. Le coureur a parcouru les 20 premiers kilomètres à 16 km/h.
Il lui a donc fallu **une heure et quart** (une heure pour 16 km et un quart d'heure pour les 4 km suivants).
Il a ensuite réduit sa vitesse de 10%, sa vitesse était alors de 16 km/h x 0,90 = 14,4 km/h.

Etudions le temps nécessaire pour parcourir 22,195 km à cette vitesse

En **une heure**, il parcourt 14,4 km, il reste alors 7,795 km à parcourir.
En une minute, le coureur parcourt 14400 m : 60 soit 240 m.
En posant la division euclidienne de 7795 par 240 on obtient un quotient de 32 et un reste de 115. L'interprétation de ces résultats est qu'après **32 minutes** supplémentaires de course, il lui restera 115 m à parcourir.
En une seconde, le coureur parcourt 240 m : 60 soit 4 m
115 = 4 x 28 + 3, le coureur parcourt donc 115 m en 28 secondes et trois quarts de seconde, soit **28,75 s**.

Le temps du parcours (obtenu en faisant la somme des durées en gras dans le texte qui précède) a été de 2 h 47 min 28,75 s.

Exercice 4

1. La compétence «Calculer une durée à partir de la donnée de l'instant initial et de l'instant final» est proposée par les textes officiels pour le CM2 (cycle 3). Le problème proposé est donc tout à fait adapté à cette classe puisque la résolution de problèmes de ce type constitue un objectif explicite de la classe.
Cependant, les unités de durée sont déjà mentionnées pour le CM1 : «Connaître et utiliser les unités usuelles de mesure des durées» et même pour le CE2 « Connaître les unités de mesure suivantes et les relations qui les lient. Temps : l'heure, la minute, la seconde, le mois, l'année.» On peut donc considérer que le même problème peut déjà être posé dans ces classes où il constituerait plutôt un problème de recherche.

2. Thomas a compris que la durée s'obtient en soustrayant l'heure de départ de l'heure d'arrivée, ce qui est correct.
Cependant, son calcul comporte deux erreurs :
il a traduit l'expression «neuf heures moins dix» par 9 h 50. il est possible que Thomas considère «moins dix» et «50» comme deux façons synonymes de qualifier neuf heures. Il lui manquerait alors une compréhension qualitative des heures : neuf heures moins dix, c'est avant neuf heures alors que 9 h 50 est après, ça ne peut pas être la même chose.

Cette hypothèse devrait être étayée par l'observation d'autres productions de Thomas, il n'est pas exclu que cette erreur ne soit qu'une étourderie sans signification.

Par ailleurs le résultat de la soustraction écrite en ligne est erroné.
la réponse 90 min résulte probablement du traitement de la soustraction 10h40 - 9h50 comme s'il s'agissait de deux entiers (1040 - 950) ou de deux décimaux (10,40 - 9,50).
Thomas semble donc connaître la technique de soustraction posée pour des entiers ou des décimaux, mais ne pas connaître les limites de sa validité (la technique usuelle de retenue n'est valable que dans le système décimal ; or une heure comporte 60 minutes et non 100).
Il se peut aussi que la réponse 90 min résulte de l'addition de 40 et 50, mais ce n'est pas très probable, car on ne voit pas ce que Thomas aurait fait de «10 h» et «9 h».
On peut également noter que Thomas rédige une réponse en mentionnant l'unité, et que l'ordre de grandeur de sa réponse est correct, et n'est donc pas susceptible de mettre en évidence son erreur.

Kevin :
hypothèse 1 : il fait la somme des nombres présents dans l'énoncé (écrits en lettres ou en chiffres). Cette addition n'a pas de sens, non seulement parce que le calcul de la durée requiert une différence, mais aussi parce que Kevin additionne ensemble des nombres d'heures et de minutes.
Enfin, l'écriture «9 h 69» qui semble être la réponse n'est pas d'un ordre de grandeur vraisemblable et n'est pas cohérente avec l'écriture usuelle des durées en heures et minutes (le nombre de minutes devant être inférieur à 60).
Tous ces éléments peuvent faire penser que Kevin n'a pas du tout compris la question et a simplement effectué un calcul parce qu'il considère que c'est ce qu'il doit faire lorsqu'on lui pose un problème de mathématiques.

hypothèse 2 :
Kevin a compris que ce qu'il doit chercher est «entre le départ et l'arrivée». Cependant, il ne distingue pas le repérage d'un instant et la mesure d'une durée. Il cherche donc à produire un instant compris entre l'heure de départ et celle d'arrivée.
La somme calculée lui permet de fabriquer la réponse «9h69» (et non 10 h 69 par exemple) qui est bien située entre les deux extrémités (d'autant plus que 9 h 69 est probablement interprété comme étant avant 10 heures) et qui résulte d'un calcul à l'aide des données, ce qui répond aux usages les plus fréquents en matière de résolution de problème mathématique.

Troisième partie

I. Situation A.
1- C'est la phrase «à chaque saut, une sauterelle avance de 30 cm.» qui indique qu'il s'agit d'une situation de proportionnalité. Elle permettra par exemple aux élèves, puisque tous les sauts sont identiques, de mettre en œuvre des raisonnements du type «si elle fait n fois plus de sauts, la sauterelle parcourra une distance n fois plus grande».

2- Les réponses sont organisées en regroupant pour chaque élèves les parties a et b de la question.

élève E1
Procédure :
Il a dessiné une échelle graduée (en mètres) puis a représenté les sauts en respectant de façon générale la contrainte suivante : 3 sauts font moins d'un mètre, mais 4 sauts font plus d'un mètre. Il peut avoir pour cela effectué 30 cm + 30 cm + 30 cm = 90 cm puis ajouté à nouveau 30 cm. Etant donné que la longueur fournie est celle d'un seul saut, il est difficile d'affirmer qu'il s'agit là d'une mise en œuvre d'une propriété de la proportionnalité.
Il dénombre ensuite les sauts représentés sur son dessin et en trouve 52.

Erreurs :
La représentation graphique manque de précision. Pour qu'elle soit correcte, il faudrait qu'un mètre corresponde à trois sauts et un tiers de saut ; or elle varie : environ trois sauts et demi pour le premier mètre, environ 4 sauts pour le second…
Le dénombrement final ne correspond pas au dessin, il y a en effet 51 sauts représentés sur le dessin et non 52.

élève E2
Procédure :
L'élève semble avoir posé une division puis l'avoir effacée, probablement 30 : 15
Cela témoignerait de la reconnaissance d'un problème de recherche d'un «nombre de fois», qui se traite généralement à l'aide d'une division euclidienne.
Il a ensuite posé correctement la multiplication 30 x 50 et interprété correctement son résultat (1500 cm sont égaux à 15 m).
Toutefois, cette opération suppose d'avoir déjà déterminé le résultat cherché (50 sauts), elle en constitue une vérification, mais ne permet pas de savoir comment l'élève l'a trouvé.
On peut supposer que le nombre 50 a été déterminé mentalement, probablement en s'appuyant sur une étape intermédiaire comme «10 sauts font 300 cm ou 3 m» ou bien «100 sauts font 100 fois 30 cm ce qui est autant que 30 fois 100 cm c'est-à-dire 30 m».
Il y aurait alors probablement une utilisation implicite de certaines propriétés de la proportionnalité, mais on ne peut pas dire lesquelles étant donné qu'on ne dispose d'aucune trace de la procédure réellement utilisée.
L'opération posée ne témoignerait alors pas vraiment de la procédure utilisée, elle a plutôt pour but, outre la vérification du résultat, de répondre à la consigne «Fais tes calculs dans ce cadre».

Erreurs :
Lors de la phase de division, il n'a pas pris en compte le fait que la longueur du trajet et celle d'un bond ne sont pas exprimées dans la même unité, et il a divisé le plus grand nombre par le plus petit comme c'est généralement le cas quand on pose une division euclidienne. Le quotient obtenu, 2, étant manifestement erroné, il a renoncé à cette procédure.

élève E3
Procédure :
Il a effectué trois opérations à l'aide des données numériques disponibles et a sélectionné l'une des trois comme fournissant la réponse attendue.

Erreurs :
Les opérations posées ne sont pas pertinentes.

A l'exception de l'addition, les opérations sont fausses. Pour la soustraction 30 - 15, deux autres tentatives ont été faites et effacées, dont une donne la réponse erronée 35 et l'autre, partiellement cachée par la multiplication, semble fournir la réponse correcte 15.
La phrase réponse n'est pas adaptée à la question posée puisqu'elle indique un nombre de mètres et non un nombre de sauts.
Cet élève semble avoir voulu respecter un contrat implicite selon lequel pour résoudre un problème il faut poser des opérations.

élève E4
Il détermine plusieurs couples constitués d'un nombre de sauts et de la longueur correspondante.
Il n'indique pas comment il détermine les longueurs, on peut supposer que pour la longueur de 3 sauts et celle de 10 sauts, il a utilisé le sens de la multiplication (difficile d'affirmer qu'il s'agit d'un raisonnement portant sur la proportionnalité étant donné que la donnée initiale est la longueur d'un saut).
En revanche, la détermination des longueurs pour 20 30 40 et 50 sauts peut relever d'une propriété de la proportionnalité : «si j'ajoute 10 sauts, je dois ajouter à la longueur totale la longueur correspondant à 10 sauts». Pour 20 sauts surtout il se peut également que le raisonnement s'appuie sur la propriété appelée «d'homogénéité» dans le document d'accompagnement pour le collège : «pour passer de 10 sauts à 20 sauts, je double le nombre de sauts, la longueur totale double également».
Il a bien pris en compte le fait que les deux longueurs sont données dans des unités différentes et à effectué les conversions de centimètres en mètres pertinentes.

Erreurs :
Dans le cadre de calcul, il est indiqué que 50 sauts correspondent à 13 mètres et non à 15 mètres, ce qui est rectifié dans la phrase réponse. On peut supposer qu'il ne s'agit que d'une étourderie sans signification particulière. L'écriture du chiffre 3 a peut-être été déclenchée par le fait qu'il faut ajouter 3 m (pour 50 sauts, il n'y a plus de passage par les cm) ce qui confirmerait le raisonnement basé sur la propriété additive de la linéarité.

3.
la fonction f suivante : $f : x \rightarrow 30x$ permet de calculer la longueur du trajet en cm en fonction du nombre de sauts.

Pour répondre au problème, on peut résoudre l'équation suivante :

$$f(x) = 1500$$
$$30x = 1500$$
$$x = \frac{1500}{30} = 50$$

Pour parcourir 15 mètres, la sauterelle doit faire 50 sauts.

II. Situation B

1. C'est le mot «identique» qui indique qu'il s'agit d'une situation de proportionnalité.
Cette indication est toutefois ambiguë pour plusieurs raisons :
Il n'est pas explicitement indiqué si 150 € est le prix total (6 objets identiques coûtent en tout 150 €), ce qui est probablement l'interprétation attendue puisque dans le cas

contraire l’indication «6 objets» n’apporte aucune information, ou s’il s’agit du prix unitaire (6 objets identiques coutent chacun 150 €).
Par ailleurs l’usage social est que la proportionnalité est fréquente, mais pas systématique, dans la détermination du prix d’un ensemble d’objets identiques. Il arrive que les lots plus nombreux conduisent à des rabais. On utilise donc ici la proportionnalité non parce qu’on est certain qu’elle modélise correctement la situation, mais parce qu’elle est fréquemment pertinente dans ce type de situation et qu’on ne dispose pas d’informations suffisantes pour répondre à la question si le prix n’est pas proportionnel au nombre d’objets.

2.
On peut relever deux différences importantes entre les deux situations :
La donnée du prix est celle de 6 objets et non celle d’un seul alors que dans la situation précédente on donnait la longueur d’un bond.
Dans la première situation, une même grandeur (la longueur) est donnée dans deux unités différentes, ce n’est pas le cas dans la deuxième situation.

3.
méthode 1
6 objets identiques coûtent 150 € donc 3 objets coûtent 75 € (propriété d’homogénéité : la moitié du nombre d’objets correspond à la moitié du prix)
6 objets identiques coûtent 150 € et 3 objets coûtent 75 € donc 9 objets (6 + 3) coûtent 225 € (propriété additive).

méthode 2
6 objets identiques coûtent 150 € donc un objet coûte 6 fois moins, il coûte 25 € (retour à l’unité, le prix est déterminé en posant la division de 150 par 6).
Un objet coûte 25 € donc 9 objets coûtent 9 fois plus, c’est à dire 25 € x 9 ou 225 €.
Cette procédure est souvent appelée «règle de trois».

méthode 3
6 objets identiques coûtent 150 € donc 3 objets coûtent 75 € (étape identique à celle de la méthode 1)
3 objets coûtent 75 € donc 9 objets (3 fois 3 objets) coûtent 225 € (propriété d’homogénéité).

III. Situation C

1. La caractérisation mise en évidence est la caractérisation par le graphique : tous les points correspondant à un couple de nombres de la situation sont situés sur une même demi-droite dont l’origine est l’origine du repère.

2. Si le professeur avait choisi de faire varier le côté du carré de base, et non la hauteur, la situation ne serait pas une situation de proportionnalité, car le volume du pavé est proportionnel au carré de ce côté, et non au côté. Cette nouvelle situation serait intéressante pour éviter d’associer systématiquement la présentation de données dans un tableau à la représentation par une droite passant par l’origine et à la proportionnalité.

IV. Situation D

1. Il s’agit d’une situation de proportionnalité dans la mesure où le nombre de billes rouges est le double du nombre de billes bleues, toutes les propriétés liées à la proportionnalité sont donc pertinentes (elles ne seront évidemment pas employées par les élèves concernés). Par exemple, le coefficient de proportionnalité est 2.

2. Nous considérons que résoudre le problème, ce n’est pas effectuer réellement l’action envisagée, mais anticiper sur le résultat de cette action.

Parmi les procédures envisageables, on peut songer à :

Un dessin des 3 billes bleues et de deux billes rouges à côté de chaque bille bleue, suivi d’un comptage des billes rouges dessinées.

Une représentation sur les doigts des billes rouges qui seront données : deux pour la première bille bleue, encore deux pour la deuxième… puis une lecture directe du nombre : une main et un doigt, c’est 6 doigts.

Une évocation de la configuration de la face «6» du dé ordinaire dont on a pu remarquer auparavant qu’elle est constituée de 2 lignes de 3 points ou de 3 lignes de deux points. Cela permet de mémoriser que trois fois deux, c’est 6, et de répondre à la question en s’appuyant sur ce fait numérique mémorisé.

Remarques de l’auteur du corrigé.

Contrairement à ce qui s’était passé lors de la publication des «sujets 0» de la précédente version du CRPE, celui-ci ne me semble pas comporter d’erreur… c’est le moins qu’on puisse espérer.

Le document n’indique pas si la calculatrice est autorisée ou non, mais la question 2 de la partie B du problème semble l’imposer puisqu’il est nécessaire de calculer une racine carrée.
Il me semble qu’il serait bien plus intéressant de supprimer cette question et de proposer un travail sans calculatrice. Les exercices 2 et 3 de la seconde partie seraient alors beaucoup plus discriminants sur un critère me semble-t-il raisonnable quand il s’agit de recruter des professeurs d’école : la capacité à conduire manuellement des calculs élémentaires (par exemple selon les procédures choisies dans ce corrigé pour la question 3).

La notation fonctionnelle de la question 3 de la partie B du problème n’apporte rien par rapport à un énoncé du type «on a représenté graphiquement la portée visuelle théorique en fonction de l’altitude». Ce même type de notation est-il attendu dans la question 3 de la situation I de la troisième partie ?

Les analyses de productions d’élèves sont intéressantes, mais les réponses risquent d’être très longues et leur correction plus que difficile : on ne peut pas attendre des candidats qu’ils produisent des analyses aussi détaillées que celles proposées ici, mais on ne peut pas non plus se contenter de réponses du type «il s’est trompé parce qu’il n’a pas

compris» qui n'analysent rien. La détermination de critères à la fois discriminants et raisonnables ne sera pas une partie de plaisir.
On peut également se demander si l'analyse attendue peut ou doit faire référence à des concepts particuliers (par exemple le contrat didactique). J'ai choisi de m'en dispenser, mais il serait bon que les candidats sachent à quoi s'en tenir.

La question 1 de l'exercice 4 de la deuxième partie est inquiétante dans la mesure où elle semble supposer de la part des candidats une connaissance détaillée des programmes… est-ce bien raisonnable ?

La mise à disposition d'extraits des textes officiels pourrait répondre à cette inquiétude, encore faudrait-il que ces textes soient clairs et explicites :

> *l'expression «propriété d'homogénéité» ne sera pas nécessairement comprise par tous les candidats,*
> *l'utilisation du coefficient de proportionnalité à l'école primaire ne suppose pas seulement que le nombre soit simple, mais qu'on puisse donner un sens à ce coefficient, ce qui n'est pas toujours le cas.*

On peut d'ailleurs s'étonner que les textes mis à disposition des candidats au CRPE soient des textes portant sur le collège et non sur l'école primaire… faut-il y voir un signe de la faiblesse des textes pour l'élémentaire concernant la proportionnalité ?

Enfin, mais il s'agit plutôt d'une inquiétude liée à l'organisation générale de la formation qu'au sujet en lui même, on peut se demander s'il sera possible à un candidat n'ayant pas à la base une formation scientifique d'acquérir toutes les compétences nécessaires pour répondre à un sujet analogue à celui-ci entre le mois de septembre et le mois de mars qui suit.
Pour mémoire, en prenant l'exemple de l'académie de Nantes, dans la version précédant la masterisation, les étudiants de PE1 disposaient d'une centaine d'heures de cours répartis entre septembre et mai pour se préparer à une épreuve assez proche. Ils n'avaient par ailleurs aucun examen à préparer, leur année étant entièrement consacrée à la préparation du concours.
Je sais d'expérience qu'il était possible dans ces conditions de permettre à des étudiants qui arrivaient en se disant nuls en maths de reprendre confiance en leurs capacités et de modifier tant leur perception des maths que leurs méthodes de travail suffisamment pour réussir le concours (et accessoirement je l'espère pour ne pas transmettre à leurs élèves la peur des maths).
Est-ce encore possible dans un délai réduit de deux mois, avec un volume horaire de cours diminué d'au moins 30 heures et avec une charge de travail alourdie par toutes les exigences du Master (nombreuses évaluations, initiation à la recherche…) ?
J'aimerais le croire.