REGLES DE CALCUL - EQUATIONS - INEQUATIONS

I) A PROPOS DES NOMBRES

1) Les différents ensembles de nombres

• **Les entiers naturels** sont les nombres qui servent à compter.

N : 0 1 2 3 4 ... 1000 ...

• **Les entiers relatifs** sont les entiers naturels et leurs opposés

Z : ... -3 -2 -1 0 1 2 3 ...

• **Les décimaux** sont les nombres qui n'ont pas une infinité de chiffres après la virgule

Δ : $-2{,}712$ $\qquad \frac{1}{2} = 0{,}5$: c'est un décimal $\qquad \left(\text{par contre } \frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots \text{ n'est pas un décimal}\right)$

• **Les rationnels** sont les nombres qui peuvent s'écrire sous forme de fraction (quotient de 2 entiers)

Θ : $\frac{5}{7}$ $-\frac{4}{19}$ 5 $\qquad \left(\text{par contre } \frac{\sqrt{3}}{\pi} \text{ n'est pas un rationnel}\right)$

• **Les réels** englobent tous les nombres que nous connaissons en 2nde

P : -3 -2 -1 0 1 2 3

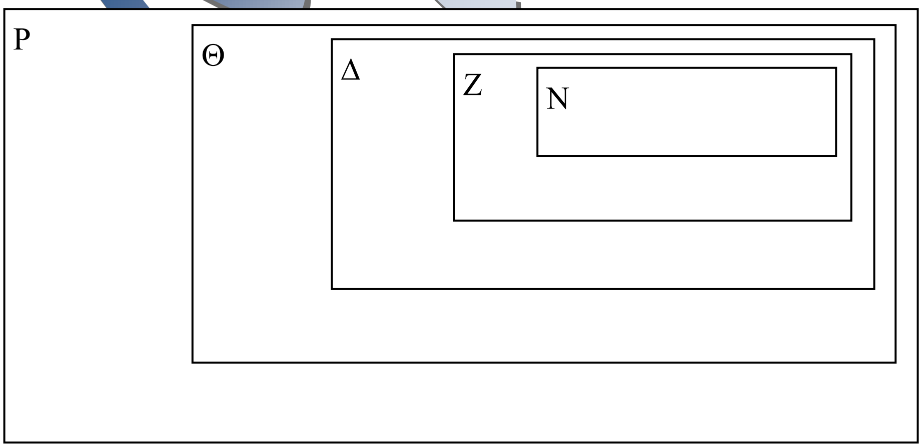
$-1{,}6$ 1/3 $\sqrt{3}$ π

Exercice :
Classer les nombres suivants dans le bon ensemble :

$\frac{5}{9}$ $\quad 0{,}003$ $\quad 0$ $\quad -593$ $\quad -\frac{72}{100}$ $\quad \sqrt{2}$ $\quad \frac{14}{6}$

$58{,}2$ $\quad -190{,}08$ $\quad \frac{3}{5}$ $\quad \frac{19}{7}$ $\quad \pi$ $\quad \frac{18}{2}$

$\sqrt{3}$ $\quad 3$ $\quad \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\quad \frac{9}{11}$ $\quad -\frac{\pi}{3}$ $\quad \sqrt{4}$



Remarques :

• Tout élément de N est aussi un élément de Z. On dit que N est inclus dans Z et on écrit : N ⊂ Z
De même, on a : N ⊂ Z ⊂ Δ ⊂ Θ ⊂ P

• On note aussi :
P^+ est l'ensemble des réels positifs ou nuls
Θ* est l'ensemble des rationnels sauf zéro
N − {5} est l'ensemble des entiers naturels sauf 5

2) Les différentes écritures d'un nombre

Un nombre peut en général avoir plusieurs écritures différentes :

$0{,}5$	$=$	$\dfrac{1}{2}$	$=$	5×10^{-1}
écriture décimale		écriture fractionnaire (quotient d'entiers)		notation scientifique $a\times10^{p}$ avec $1 < a < 10$

3) Calculatrices et valeurs exactes

Avec la calculatrice :

$$\frac{1}{0{,}99999} = 1{,}00001$$

$$\frac{1}{0{,}99999} - 1{,}00001 \neq 0 \text{ !}$$

! dès qu'une calculatrice n'est pas capable d'afficher la valeur exacte d'un résultat, elle l’arrondit <u>sans prévenir</u> !

II) REGLES DE CALCUL

1) Avec la calculatrice :

$\frac{1}{0} =$ $\sqrt{-1} =$ $0^0 =$

Ainsi, dans un calcul avec des inconnues, il faut toujours vérifier que :
- les dénominateurs sont non nuls
- les radicandes sont positifs ou nuls

2) Quotients :

CONDITIONS	REGLE
	$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$ $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$ $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

3) Racines :

CONDITIONS	REGLE
	$\sqrt{0} = 0$ $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

! Il n'y a pas de règle avec $\sqrt{a + b}$

4) Puissances : (n ∈ N* et m ∈ N*)

CONDITIONS	REGLE
	$a^0 = 1$ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $a^m \times a^n = a^{m+n}$ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $(a^m)^n = a^{m \times n}$ $(ab)^n = a^n b^n$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

! Il n'y a pas de règle avec $a^m + a^n$

III) LES NOMBRES PREMIERS

1) Définition

Un nombre premier est un entier naturel que l'on ne peut diviser que par lui-même ou par 1.
Remarque : 1 n'est pas considéré comme étant un nombre premier.

Ex: 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47; 53; 59; 61; 67; 71 ...
Par contre, $12 = 3 \times 4$ donc 12 n'est pas premier.

2) Décomposition d'un nombre en produit de nombres premiers.

Tout entier naturel supérieur à un qui n'est pas premier peut se décomposer en un produit de nombres premiers.
Cette décomposition est unique.

Ex: décomposons 72 :

Au brouillon :

$$\begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \end{array}$$

Sur la copie :

$$72 = 2^3 \times 3^2$$

3) Cette décomposition permet de simplifier certaines fractions ou racines.

Ex: Simplifions $A = \dfrac{72 \times 10^{-4} \times 3 \times 36}{-60 \times 10^{-9} \times 25 \times 5^2}$

$$A = -\frac{2^3 \times 3^2 \times (2 \times 5)^{-4} \times 3 \times (2 \times 3)^2}{2^2 \times 3 \times 5 \times (2 \times 5)^{-9} \times 5^2 \times 5^2}$$

$$A = -\frac{2^3 \times 3^2 \times 2^{-4} \times 5^{-4} \times 3 \times 2^2 \times 3^2}{2^2 \times 3 \times 5 \times 2^{-9} \times 5^{-9} \times 5^2 \times 5^2}$$

$$A = -\,2^{3-4+2-2+9} \times 3^{2+1+2-1} \times 5^{-4-1+9-2-2}$$

$$A = -\,2^8 \times 3^4$$

Ex: Simplifions $B = \sqrt{72}$

$$B = \sqrt{2^3 \times 3^2}$$

$$B = 6\sqrt{2}$$

IV) FACTORISER UNE EXPRESSION

Factoriser une expression, c'est chercher à la transformer en un produit ou un quotient de facteurs si possible du 1er degré. Pour cela, 3 possibilités à essayer dans l'ordre :

1) D'abord, chercher un facteur commun

$A = (4x - 3)(x + 2) - x(8x - 6) - 4x + 3$
$A = (4x - 3)(x + 2) - 2x(4x - 3) - (4x - 3)$
$A = (4x - 3)[x + 2 - 2x - 1]$
$A = (4x - 3)(1 - x)$

2) Ensuite seulement, chercher une identité remarquable

$B = 32x^2 - 48x + 18$
$B = 2(16x^2 - 24x + 9)$
$B = 2(4x - 3)^2$

3) Puis, en dernier recours, chercher à faire apparaître une identité remarquable

Dans une factorisation, il arrive que l'on n'ait pas vu un facteur commun ou une identité remarquable. On finit souvent par se retrouver devant une expression du second degré que l'on ne sait pas factoriser.
Voici une petite ruse de calcul qui rend service :

$C = 2x^2 + x - 3$	
$C = 2\left(x^2 + \frac{1}{2} \times x - \frac{3}{2}\right)$	mettre sous la forme $x^2 + bx + c$
$C = 2\left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} - \frac{3}{2}\right]$	mettre sous la forme $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \ldots$
$C = 2\left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}\right]$	reconnaître $A^2 - B^2$
$C = 2\left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2\right]$	
$C = 2\left[\left(x + \frac{1}{4} - \frac{5}{4}\right)\left(x + \frac{1}{4} + \frac{5}{4}\right)\right]$	
$C = 2(x - 1)\left(x + \frac{3}{2}\right)$	
$C = (x - 1)(2x + 3)$	

V) EQUATIONS

1) Equivalences

Résoudre une équation, c'est trouver <u>toutes</u> les solutions et <u>seulement</u> les solutions de cette équation.
C'est la raison pour laquelle nous procéderons toujours par équivalences successives en nous appuyant sur les propriétés suivantes :

A, B, C étant des réels quelconques, on a :

- $A = B \Leftrightarrow A + C = B + C$ (1)
- $A = B \Leftrightarrow A - C = B - C$ (2)
- **<u>Si C ≠ 0 alors</u>** : $A = B \Leftrightarrow AC = BC$ (3)
- **<u>Si C ≠ 0 alors</u>** : $A = B \Leftrightarrow \frac{A}{C} = \frac{B}{C}$ (4)
- $AB = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ou $B = 0$ (5)

Ex: Résoudre dans P, (E) : $3x^2 = 9x$

Méthode fausse :
(E) $\Leftrightarrow 3x = 9$ cf (4)
(E) $\Leftrightarrow x = 3$ cf (4)
$S = \{3\}$

Equivalence fausse :
On a divisé les 2 membres de (E) par x qui peut être nul !

Méthode juste :
(E) $\Leftrightarrow 3x^2 - 9x = 0$ cf (2)
(E) $\Leftrightarrow 3x(x - 3) = 0$
(E) $\Leftrightarrow 3x = 0$ ou $x - 3 = 0$ cf (5)
(E) $\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 3$ cf (4) et (1)
$S = \{0 ; 3\}$

2) Conditions sur *x*

Avant de transformer l'équation pour la résoudre, il faut commencer par éliminer les valeurs de x qui sont "interdites" car :

• Elles annulent un dénominateur

• Elles rendent strictement négatif un radicande.

3) Dans les exercices

Exemple	*Méthode*
Résoudre dans P : (E) $\dfrac{3x^2}{x+1} = \dfrac{6x^2-4x}{(3x-2)(x+1)}$	
Conditions : $\begin{cases} x+1 \neq 0 \\ (3x-2)(x+1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq -1 \text{ et } x \neq \dfrac{2}{3}$	Avant toute chose, penser aux conditions
(E) $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3x^2}{x+1} - \dfrac{6x^2-4x}{(3x-2)(x+1)} = 0 \\ x \neq -1 \text{ et } x \neq \dfrac{2}{3} \end{cases}$ cf (2)	
(E) $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3x^2}{x+1} - \dfrac{2x\cancel{(3x-2)}}{\cancel{(3x-2)}(x+1)} = 0 \\ x \neq -1 \text{ et } x \neq \dfrac{2}{3} \end{cases}$	
(E) $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3x^2}{x+1} - \dfrac{2x}{x+1} = 0 \\ x \neq -1 \text{ et } x \neq \dfrac{2}{3} \end{cases}$	Ensuite, à chaque étape, penser à l'équivalence et réécrire les conditions
(E) $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3x^2-2x}{x+1} = 0 \\ x \neq -1 \text{ et } x \neq \dfrac{2}{3} \end{cases}$	
(E) $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x(3x-2)}{x+1} = 0 \\ x \neq -1 \text{ et } x \neq \dfrac{2}{3} \end{cases}$	
(E) $\Leftrightarrow \begin{cases} x(3x-2) = 0 \\ x \neq -1 \text{ et } x \neq \dfrac{2}{3} \end{cases}$ cf (3)	**<u>Factoriser</u>** en un **<u>produit</u>** **<u>nul</u>** …
(E) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } 3x-2 = 0 \\ x \neq -1 \text{ et } x \neq \dfrac{2}{3} \end{cases}$ cf (5)	… pour utiliser la propriété : Un **<u>produit</u>** est **<u>nul</u>** ssi l'un des facteurs est nul
(E) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } x = \dfrac{2}{3} \\ x \neq -1 \text{ et } x \neq \dfrac{2}{3} \end{cases}$ cf (1) et (4)	
(E) $\Leftrightarrow x = 0$	
S = {0}	Conclure par S = …

VI) INEQUATIONS

1) Intervalles de P

a) Définition

a et b sont deux réels tels que $a < b$

L'intervalle fermé [a ; b] est l'ensemble des réels x tels que $a < x < b$

L'intervalle ouvert]a ; b[est l'ensemble des réels x tels que $a < x < b$

Ex: $x \in [1 ; 5[\Leftrightarrow 1<x<5$

b) intervalles illimités

Considérons l'ensemble des réels x tels que $x > 1$

Cet ensemble est illimité "à droite"

On le note $[1 ; +\infty[$

"plus l'infini"

c) Dans P, il y a donc équivalence entre les notations suivantes :

$x \in [1 ; 5[\quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad x < 10$

$x \in]0 ; 1[\quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \qquad \Leftrightarrow \quad x \in P^+$

$\Leftrightarrow \quad x \neq 0 \quad \Leftrightarrow$

2) Equivalences

Pour être certain de résoudre les inéquations par équivalences successives, nous nous appuierons sur les propriétés suivantes :

A, B, C étant des réels quelconques, on a :

- $A > B \Leftrightarrow A + C > B + C$ (a)
- $A > B \Leftrightarrow A - C > B - C$ (b)
- **<u>Si C > 0 alors</u>** : $A > B \Leftrightarrow AC > BC$ (c)
  <u>Si C < 0 alors</u> : $A > B \Leftrightarrow AC < BC$
- **<u>Si C > 0 alors</u>** : $A > B \Leftrightarrow \dfrac{A}{C} > \dfrac{B}{C}$ (d)
  <u>Si C < 0 alors</u> : $A > B \Leftrightarrow \dfrac{A}{C} < \dfrac{B}{C}$

! Il n'y a pas de propriété simple pour les inéquations produit !
Ex : $ABC < 0 \Leftrightarrow$ (A>0 et B>0 et C<0) ou (A>0 et B<0 et C>0) ou (A<0 et B>0 et C>0) ou (A<0 et B<0 et C<0) !!!!
Il nous faudra donc trouver autre chose : les tableaux de signes…

Ex: Résoudre dans P, (I) : $\dfrac{4}{x} > 1$

Conditions : $x \neq 0$

Méthode fausse :

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 4 > x \\ x \neq 0 \end{cases} \qquad \text{cf (d)}$$

S =]-∞ ; 0[Y]0 ; 4]

Equivalence fausse :
On a multiplié les 2 membres de (I) par x qui peut être soit positif, soit négatif !

Méthode juste :

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{x} - 1 > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \qquad \text{cf (b)}$$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4 - x}{x} > 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

(I) $\Leftrightarrow$ ($4 - x > 0$ et $x > 0$) ou ($4 - x < 0$ et $x < 0$)
(I) $\Leftrightarrow$ ($x < 4$ et $x > 0$) ou ($x > 4$ et $x < 0$)
(I) $\Leftrightarrow 0 < x < 4$
S =]0 ; 4]

3) Signe d'une expression du 1er degré ($ax + b$ avec $a \neq 0$)

a) Exemple : signe de $-2x + 3$

$-2x + 3 > 0 \iff -2x > -3 \iff x < \dfrac{3}{2}$

$-2x + 3 < 0 \iff -2x < -3 \iff x > \dfrac{3}{2}$

Récapitulons ces résultats dans un "tableau de signe" :

x	$-\infty$		$3/2$		$+\infty$
$-2x+3$		$+$	0	$-$	

b) Propriété

Dans un tableau de signe :
"A droite" de $-\dfrac{b}{a}$ l'expression $ax + b$ est du signe de a.
"A gauche" de $-\dfrac{b}{a}$ l'expression est du signe contraire.

c) Démonstration

Soit (I) : $x > -\dfrac{b}{a}$ $(a \neq 0)$

(I) $\iff \begin{cases} a^2 x > -ba \\ a \neq 0 \end{cases}$

(I) $\iff \begin{cases} a^2 x + ab > 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$

(I) $\iff \begin{cases} a(ax + b) > 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$

(I) $\iff \begin{cases} ax + b \text{ et } a \text{ sont du même signe} \\ a \neq 0 \end{cases}$

Bilan, pour $a \neq 0$ on a : $x > -\dfrac{b}{a} \iff ax + b$ est du signe de a

4) Dans les exercices

Exemple	*Méthode*
Résoudre dans P : (I) $\dfrac{4\,(x+1)}{x+3} > x+1$	
Conditions : $x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$	Déterminer les conditions
(I) $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4\,(x+1) - (x+1)(x+3)}{x+3} > 0 \\ x \neq -3 \end{cases}$	
(I) $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+1)\,(4-x-3)}{x+3} > 0 \\ x \neq -3 \end{cases}$	**<u>Factoriser en un produit ou un quotient supérieur ou inférieur à zéro</u>**
(I) $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+1)\,(1-x)}{x+3} > 0 \\ x \neq -3 \end{cases}$	

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$1-x$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
Quotient		$+$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	

Faire un **<u>tableau de signe</u>**

S = $]-\infty\,;-3[\ \cup\ [-1\,;1]$

Conclure par S = …