TD2 - Dérivées partielles, suite

Exercice 1. On pose $f(x,y) = \ln(x+y^2)$, $x(s,t) = se^t$, $y(s,t) = te^{-s}$, et $F(s,t) = f(x(s,t), y(s,t))$. Calculer $\dfrac{\partial F}{\partial s}$ et $\dfrac{\partial F}{\partial t}$.

Exercice 2. On pose $f(x,y,z) = xy^4 + y^2 z$, $x(s) = s^2$, $y(s) = s^{1/2}$, $z(s) = s^{-1}$, et $F(s) = f(x(s), y(s), z(s))$. Calculer $\dfrac{dF}{ds}$.

Exercice 3. Soit $\phi \in C^1(\mathbb{R})$. Montrer que $v(x,y) = \phi(x^2+y^2)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$y\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = x\frac{\partial v}{\partial y}(x,y).$$

Exercice 4. Si $z(x,t)$ représente le déplacement vertical d'une corde élastique au temps t à la position x, alors z vérifie l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}(x,t),$$

où $c > 0$ est une constante qui dépend de la tension de la corde. Montrer que

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+ct \\ x-ct \end{pmatrix}$$

est un changement de variables bijectif de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Soit $\phi \in C^2(\mathbb{R})$ et $\psi \in C^2(\mathbb{R})$. Montrer que

$$z(x,t) = \phi(x+ct) + \psi(x-ct)$$

vérifie l'équation des ondes précédente.

TD3 - Aires, volumes et intégrales multiples

Exercice 1. Soient $f(x,y) = x + 2y$ et $D = [0,2] \times [1,5]$. Calculer $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Exercice 2. Soient $f(x,y) = 1 + 6xy^2$ et $D = [0,1] \times [1,2]$. Calculer $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Exercice 3. On note $\mathcal{R}$ la région bornée du plan comprise entre les deux courbes d'équation $x = -y^2 + 2$ et $x = -2y - 1$. Calculer l'aire de $\mathcal{R}$.

Exercice 4. On note $\mathcal{R}$ la région bornée du plan comprise entre les deux courbes d'équation $y = x$ et $y = x^2$. Calculer l'aire de $\mathcal{R}$.

Exercice 5. Calculer l'intégrale double $\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ dans les cas suivants :

1. $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ est le triangle de sommets $A = (0,0)$, $B = (\pi, 0)$ et $C = (0, \pi)$ et $f(x,y) = x\cos(x+y)$.
2. $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ est le triangle de sommets $A = (0,0)$, $B = (1,3)$, et $C = (4,0)$ et $f(x,y) = x + y$.
3. $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geqslant 0,\ x + y \leqslant 1\right\}$ et $f(x,y) = (x+y)e^{-x}e^{-y}$.
4. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant x \leqslant \cos y\}$ et $f(x,y) = x \sin y$.

Exercice 6.

1. On note $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + x \leqslant y \leqslant 3x + 8\}$. Vérifier que $(4, 20)$ et $(-2, 2)$ sont deux points frontières de D. Représenter D. Calculer l'intégrale double :
$$\iint_D (x+2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$
2. On note $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0,\ 0 \leqslant y \leqslant 5,\ y \leqslant 1 + x^2,\ y \geqslant 5(x-1)\}$. Calculer l'intégrale double :
$$\iint_D (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Exercice 7. En utilisant un changement de variables, calculer l'intégrale de f sur D avec

1. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \pi^2 < x^2 + y^2 \leqslant 4\pi^2\}$; $f(x,y) = \sin\sqrt{x^2+y^2}$;
2. $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}$ avec a , $b > 0$; $f(x,y) = x^2 + y^2$.

Exercice 8. Soient $a, b, c > 0$. Calculer le volume de l'ellipsoïde
$$\mathcal{E} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1\right\}.$$