EXERCICE III : : JEU AQUATIQUE ET SECURITE (5 POINTS)

Un enfant glisse le long d'un tremplin de plage dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
Pour l'exercice, l'enfant sera assimilé à un point matériel G.

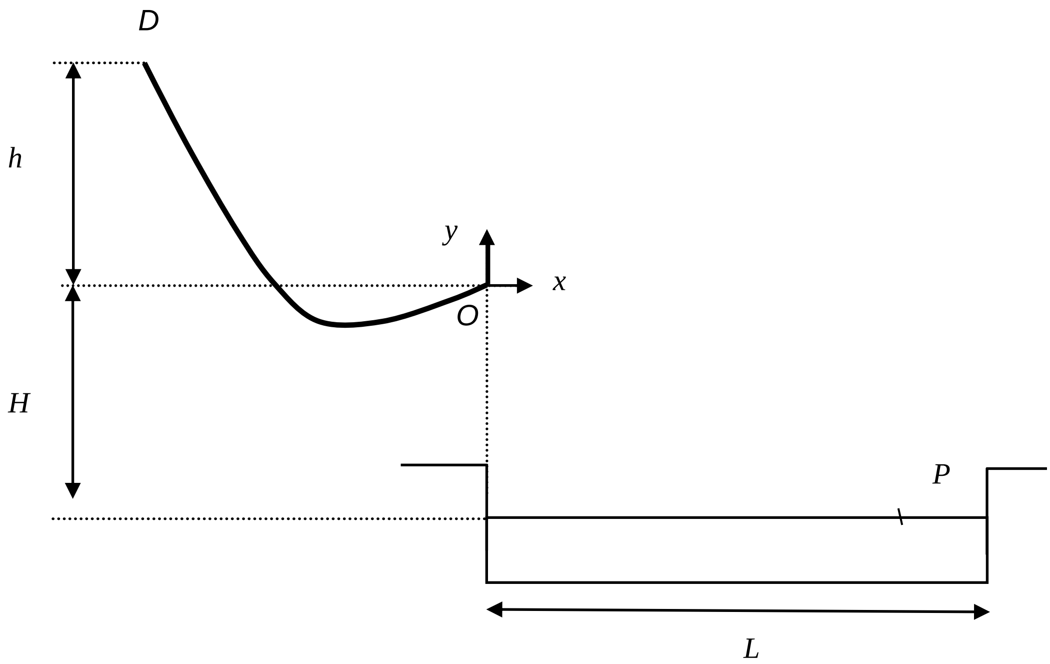
Un tremplin de plage est constitué par :

- *une piste DO qui permet à un enfant partant de D* **sans vitesse initiale** *d'atteindre le point O avec un vecteur vitesse* $\overrightarrow{V_0}$ *faisant un angle* α *avec l'horizontale ;*

- *une piscine de réception de longueur L : la surface de l'eau se trouve à une distance H au dessous du point O.*

Les consignes de sécurité interdisent certaines positions du corps lors de l'utilisation du tremplin.

L'objet de cet exercice est de vérifier que la sécurité de l'enfant est assurée : quelle doit être la longueur L de la piscine ? la vitesse à l'arrivée dans l'eau n'est-elle pas trop importante ?



Données :

- *Choix du repère : origine au point O, axe Ox gradué positivement vers la droite, axe Oy gradué positivement vers le haut (voir schéma ci-dessus).*

- *On choisit l'altitude du point O comme référence pour l'énergie potentielle de pesanteur de l'enfant, soit :* $Epp_O = 0$ *pour* $y_0 = 0$.

- *Masse de l'enfant :* $m = 25$ kg ;

- *Intensité de la pesanteur :* $g = 9{,}8\ m.s^{-2}$

- *Dénivellation* $h = 5{,}0$ m ;

  Hauteur $H = 0{,}50$ m ;

1. Mouvement de l'enfant entre D et O

Dans un premier temps, on néglige les frottements du tremplin ainsi que toutes les actions dues à l'air.

1.1. Donner l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur Epp_D de l'enfant au point D.

D'après les données, on peut écrire : E_{PPD} = mgy$_D$ = mgh

1.2. Donner l'expression de l'énergie mécanique Em_D de l'enfant au point D.

$E_m = E_p + E_c$. En D le système est immobile, son énergie cinétique est donc nulle. L'énergie mécanique en D revient donc à $E_{mD} = E_{PPD}$ = mgh.

1.3. Donner l'expression de l'énergie mécanique Em_O de l'enfant au point O.

D'après les données, E_{PPO} = 0. L'énergie mécanique en O se ramène donc à l'énergie cinétique $\frac{1}{2}mv_o^2$.

$E_{mO} = \frac{1}{2}mv_o^2$.

1.4. En déduire l'expression de V_0 la valeur de la vitesse au point O en justifiant le raisonnement.
Calculer la valeur de la vitesse V_0 de l'enfant en O.

Il n'y a pas de frottements. Il y a la réaction normale du support solide (le toboggan) qui ne travaille pas (car le vecteur $\overrightarrow{R_N}$ est en permanence perpendiculaire au vecteur dépalcement). Enfin, il y a le poids qui est une force conservative.
L'énergie mécanique du système peut donc être prise comme constante (ou se conservant) : E_{mD} = E_{mO}.
Soit : mgh = $\frac{1}{2}mv_o^2$
Cela mène à : $v_o = \sqrt{2gh}$ = 9,9 m.s^{-1}

En réalité, les frottements $\vec{f}$ ne sont pas du tout négligeables : la vitesse au point O vaut V'_0 = 5,0 m.s^{-1}.

1.4. Calculer le travail des forces $W_{DO}(\vec{f})$ des frottements $\vec{f}$ sur le parcours DO.

Plusieurs approches analogues sont possibles. Nous décidons de considérr le théorème de l'énergie cinétique lors du parcours DO :
$\Delta E_c = E_{cO} - E_{cD} = W_{DO}(\vec{P}) + W_{DO}(\vec{R}) + W_{DO}(\vec{f})$
$W_{DO}(\vec{f}) = E_{cO} - E_{cD} - W_{DO}(\vec{P}) - W_{DO}(\vec{R}) = \frac{1}{2}mv_o'^2 - 0 - mg(y_D - y_O) = -9,1\times10^2$ J

2. Étude de la chute de l'enfant dans l'eau

En O, origine du mouvement et des dates dans cette partie, on prendra V_0 = 5,0 m. s^{-1}.

On précise que toutes les actions dues à l'air sont ici négligeables.

Le mouvement de l'enfant a été filmé ; la vidéo a été exploitée par le logiciel REGAVI qui a permis de relever les coordonnées (x,y) du vecteur position $\overrightarrow{OG}$ au cours du temps t ; ces données exportées sur le tableur REGRESSI ont permis de modéliser le vecteur position et d'obtenir les équations horaires ci-dessous :

$$\overrightarrow{OG} \quad \begin{cases} x(t) = 4,3\,t & (1) \\ y(t) = -4,9\,t^2 + 2,5\,t & (2) \end{cases}$$

2.1. Quelle équation horaire ci-dessus et quelle donnée du texte permettent de déterminer la date t_P à laquelle

il y a arrivée de l'enfant à la surface de l'eau (point P sur le schéma) ?

Ecrire cette équation à une inconnue (la date t_P) en précisant toutes les autres valeurs numériques.

La (2) en prenant soin de se placer au niveau de l'eau, c'est-à-dire à y = -H.

Cela donne :

$$-0{,}5 = -4{,}9\,t^2 + 2{,}5\,t \quad \text{ou} \quad -4{,}9\,t^2 + 2{,}5\,t + 0{,}5 = 0$$

En résolvant cette équation on trouve deux solutions : $t_1 = 0{,}67$ s *et* $t_2 = -0{,}15$ s

2.2. Laquelle choisir ? (justifier la réponse)

Une date obligatoirement positive, le mouvement ayant démarré à t = 0 s : $t_1 = 0{,}67$ s

2.3. En déduire la longueur L minimale de la piscine pour que l'enfant tombe au moins à 5,0 m du bord.

Connaissant $t_p = 0{,}67$ s, on peut calculer, grâce à l'équation horaire (1) : $x_P = 4{,}3 \times 0{,}67 = 2{,}9$ m

On y ajoute les 5 m de marge : L = 7,9 m

Un autre enfant de masse égale à 50 kg descend le tremplin : on suppose qu'il arrive également au point O avec une vitesse $V_0 = 5{,}0\ m.s^{-1}$*:*

2.4. Dire sans calcul numérique si son point de chute se situe dans la piscine. Justifier votre réponse.

La masse n'intervient pas dans les expressions permettant de décrire le mouvement étudié : L'autre enfant tombe au même point P dans la piscine.

L'arrivée dans l'eau devient dangereuse (possibilité de traumatisme suivant la position du corps) à partir d'une valeur de l'énergie cinétique de l'ordre de 500 J soit une vitesse de l'ordre de 6 $m.s^{-1}$ *au point P (valeurs valables pour l'enfant de 25 kg).*

2.5. Faire un calcul permettant de conclure si l'arrivée dans l'eau est potentiellement dangereuse pour l'enfant de 25 kg.

Aide : *on pourra au choix partir des équations horaires ci-dessus (calcul de v) ou bien utiliser le théorème del'énergie mécanique.*

Nous choisissons de considérer la conservation de l'énergie mécanique entre O et P (la seule force qui s'exerce, le poids, est conservative) :

$$E_{mO} = E_{mP}$$

$$E_{cO} + E_{ppO} = E_{cP} + E_{PPP}$$

$$E_{cP} = E_{cO} + E_{PPO} - E_{PPP} = = \frac{1}{2}mv_o'^2 + 0 - mg\times(-H) = \frac{1}{2}mv_o'^2 + 0 + mgH = 435 \text{ J}$$

Avec 1 chiffre significatif on est à 400 J plutôt que 500 J, mais c'est assez proche de la valeur limite…

Encore un commentaire qui donnera des points quelle que soit l'orientation prise par votre réponse…